数学名著译丛

数学

——它的内容，方法和意义

第三卷

〔俄〕A.D.亚历山大洛夫 等 著

王 元 万哲先 等 译

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书是前苏联著名数学家为普及数学知识撰写的一部名著,用极其通俗的语言介绍了现代数学各个分支的主要内容,历史发展及其在自然科学和工程技术中的应用.本书内容精练深入浅出,只要具备高中的数学知识就能阅读.全书共20章,分三卷出版.每一章介绍一个数学分支,本卷是第三卷,内容包括实变函数论、线性代数、抽象空间、拓扑学、泛函分析、群及其他代数系统.

图字:01-2000-2677 号
图书在版编目(CIP)数据

数学——它的内容,方法和意义(第3卷)/(俄罗斯)亚历山大洛夫等著;王元,万哲先等译 .-北京:科学出版社,2001
(数学名著译丛)
ISBN 7-03-009598-7

Ⅰ.数… Ⅱ.①亚… ②王… Ⅲ.数学 Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 044593 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001年11月第 一 版 开本:850×1168 1/32
2001年11月第一次印刷 印张:10 5/8
印数:1—3 000 字数:282 000

定价:28.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

目　　录

第　三　卷

第十五章　实变数函数论(С. Б. 斯捷奇金著)……………………1

§1. 绪论 ……………………………………………………1

§2. 集合论 …………………………………………………2

§3. 实数 ……………………………………………………10

§4. 点集 ……………………………………………………16

§5. 集合的测度 ……………………………………………24

§6. 勒贝格积分 ……………………………………………30

第十六章　线性代数 (Д. К. 法德杰也夫著) ……………………35

§1. 线性代数的对象和它的工具 …………………………35

§2. 线性空间 ………………………………………………46

§3. 线性方程组 ……………………………………………58

§4. 线性变换 ………………………………………………72

§5. 二次型 …………………………………………………81

§6. 矩阵函数和它的一些应用 ……………………………89

第十七章　抽象空间 (А. Д. 亚历山大洛夫著) ……………………93

§1. 欧几里得公设的历史 …………………………………93

§2. 罗巴切夫斯基的解答 …………………………………97

§3. 罗巴切夫斯基几何 ……………………………………103

§4. 罗巴切夫斯基几何的现实意义 ………………………112

§5. 几何公理，它们利用一定的模型来检验 ……………120

§6. 从欧几里得几何分出的独立的几何理论 ……………127

§7. 多维空间 ………………………………………………134

§8. 几何对象的推广 ………………………………………148

§9. 黎曼几何 ………………………………………………160

§10. 抽象几何和现实空间 …………………………………173

第十八章　拓扑学(П. С. 亚历山大洛夫著)……………………186

§1. 拓扑学的对象 …………………………………………186

§ 2. 曲面 ……………………………………………………………189
§ 3. 流形 ……………………………………………………………194
§ 4. 组合方法 ………………………………………………………197
§ 5. 向量场 …………………………………………………………205
§ 6. 拓扑学的发展 …………………………………………………210
§ 7. 度量空间与拓扑空间 …………………………………………213
第十九章 泛函分析 (И. М. 盖尔芳特著) ……………………218
§ 1. n 维空间……………………………………………………………219
§ 2. 希尔伯特空间(无穷维空间) …………………………………222
§ 3. 依直交函数系的分解 …………………………………………228
§ 4. 积分方程 ………………………………………………………234
§ 5. 线性运算子及泛函分析进一步的发展 ………………………241
第二十章 群及其他代数系统(А. И. 马尔采夫著)……………251
§ 1. 引言 ……………………………………………………………251
§ 2. 对称和变换 ……………………………………………………252
§ 3. 变换群 …………………………………………………………260
§ 4. 费得洛夫群 ……………………………………………………272
§ 5. 伽罗华群 ………………………………………………………280
§ 6. 一般群论的基本概念 …………………………………………283
§ 7. 连续群 …………………………………………………………292
§ 8. 基本群 …………………………………………………………294
§ 9. 群的表示与指标(特征标) ……………………………………301
§ 10. 一般群论……………………………………………………………306
§ 11. 超复数……………………………………………………………306
§ 12. 结合代数…………………………………………………………316
§ 13. 李代数……………………………………………………………324
§ 14. 环…………………………………………………………………327
§ 15. 格…………………………………………………………………333
§ 16. 一般代数系统……………………………………………………335

第十五章　实变数函数论

§1. 绪　　论

在十八世纪末、十九世纪初的时候，微积分学已基本上被发掘了. 在这个时候(正确地说是十八世纪)，学者们开始建立它的各个分支，揭示了很多新而又新的事实，发展了微积分学在力学、天文学与技术科学方面的种种问题的日新月异的应用. 现在已经出现综观所有获得的结果的可能性，使它们系统化并深入探究分析的基本概念的意义. 但在这个时候，已经可以看出来，分析基础本身并不是毫无问题的.

还在十八世纪，那时的大数学家关于什么是函数就没有一致的见解，因此长期争论着问题的这样与那样的解答，这样与那样的具体数学结果，弄不清究竟谁是正确的. 逐渐才知道了分析的另一些基本概念也需要进一步精确. 如果对什么是连续性及连续函数的性质是些什么，都没有足够清晰的理解，那就常常会引起一系列错误的论断. 例如，认为连续函数总是可微的. 由于数学中已经处理着这样复杂的函数，以至于仅仅依凭直观与猜测已经是不可能的了. 因此，分析的基本概念的整理就成为燃眉之急了.

第一个在这方面认真尝试的是拉格朗日，在他之后，柯西又走上了这条道路，柯西将直到今天还广泛运用的极限、连续性与积分的定义严格化了. 大约就在那个时候，捷克数学家波尔察诺也认真地研究着连续函数的基本性质.

我们详细地讨论一下连续函数的一些性质. 命 $f(x)$ 是某个间隔 $[a, b]$ (即满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有的点 x) 上的连续函数. 如果在间隔的端点上，函数取异号的数值，那么在间隔中间必定有一点，使函数的值为零. 这件事在过去认为是显然的，现在这个命

题已经得到了严格的论证. 同样严格地证明了间隔上的连续函数必定在其上的某些点取自己的最大值与最小值.

连续函数的这些性质的研究, 迫使人们深入地去探究实数的本性, 因此就出现了实数的理论, 而数轴的基本性质也得到了确切的表述.

数学分析的进一步发展, 促使人们必须去研究愈来愈多的"坏"的函数, 特别是间断的函数. 例如, 间断函数作为连续函数的极限而出现. 早先, 人们并不知道, 极限函数是否连续. 间断函数也在描绘突然改变的过程时出现, 因此产生了一个新的问题——把分析的工具推广到间断函数上去.

黎曼研究了这样一个问题, 即积分的概念可能推广到怎样的间断函数上去. 由于所有这些奠定分析基础的活动, 使一个新的数学分支——实变数函数论出现了.

如果古典数学分析是基于处理一些"好"的函数(例如连续函数和可微函数), 那么实变数函数论主要是处理更为广泛的函数类. 如果在数学分析里对于连续函数给出了某些运算(例如积分)的定义, 那么实变数函数论就以研究这样一些问题为特征, 即这个定义可以应用于怎样的函数类, 以及这个定义应该怎样改变, 才能更为广泛. 特别是, 只有在实变数函数论里才能满意地回答这样的问题, 即什么是曲线的长度? 及对于怎样的曲线, 讨论它的长度才有意义?

实变数函数论本身是建立在集合论的基础上的.

正由于这个原因, 我们先叙述集合论的原理, 然后转入点集的讨论, 而以叙述实变数函数论的基本概念之一——勒贝格积分作为本章的结束.

§2. 集 合 论

人们经常需要考虑各种各样事物的集合, 正如第一章(第一卷)所阐明的, 这就引起了数的概念的产生, 然后是集合的概念的产

生；这是数学中基本而又简单的概念之一，不能再加以精确的定义了．以下讨论的目的，无非是要弄清楚集合是什么，而不必纠缠于它的定义．

不管按照什么特征或者依循什么规律结合起来的事物的总体都称之为集合．集合的概念是通过抽象化的途径而产生的．人们把任意东西的总和看成集合，是抽去了集合中各个东西之间的所有联系与关系，而仅仅保留了这些东西的个别特性．这样一来，由五个钱币做成的集合与五个苹果做成的集合就完全不相同了．但是另一方面，围成一个圆圈的五个钱币做成的集合与一个个叠起来放的五个钱币所做成的集合，则被看成是相同的．

我们试举几个集合的例子，例如，沙粒的集合，太阳系所有行星的集合，在给定的时间里，在某个房子里所有人的集合及这本书的全部书页的集合．数学里也常常碰到各种各样的集合，例如，给定的方程所有的根的集合，全体自然数的集合及直线上所有的点的集合等等．

研究集合不依赖于组成它的事物的特性的性质，即仅仅研究集合的一般性质的数学分支称之为集合论．这一分支是在十九世纪末及二十世纪初才开始蓬勃发展起来的．德国数学家康托尔(G. Cantor)是科学的集合论的奠基人．

康托尔关于集合论的工作产生于三角级数收敛性问题的研究．由于具体数学问题的研究而引起非常抽象与普遍的理论的建立，已经是一种非常普通的现象了．这些抽象理论的意义在于它不仅与产生它的那个具体问题有联系，而且由于它对于另外一系列问题也有着应用．集合论也就是如此．集合的想法与概念已经浸透到所有的数学分支，并且改变了它们的面貌，所以不熟悉集合论的原理就不可能对近代数学获得正确的理解．而集合论对于实变数函数论则有着特别巨大的作用．

假如对于任何东西，都可以知道它属于集合或者不属于集合，那么集合就算被给出来了；换言之，集合是由所有属于它的东西所完全确定的．如果集合 M 是由而且仅仅是由 a, b, c, …这些东

西构成，那么就写成

$$M=\{a,\ b,\ c,\ \cdots\}.$$

组成任意集合的东西，通常称为它的元素．当一个东西 m 是集合 M 的元素时，就记作

$$m\in M.$$

读做“m 属于 M”或者“m 是 M 的元素”．如果有一个东西 n 不属于集合 M，则记作 $n\overline{\in} M$．每一个东西只能是给定的集合的一个元素；换言之，一个集合中所有的元素彼此都是不同的．

集合 M 的元素，本身可以是集合．但是，为了避免矛盾起见，应该要求集合 M 本身不是组成它自己的一个元素，即 $M\overline{\in} M$．

不包含任何东西的集合称为空集．例如，方程

$$x^2+1=0$$

所有的实根组成的集合就是空集．以后我们用 θ 来表示空集．

对于两个集合 M 与 N，如果集合 M 的每个元素 x 同样也是集合 N 的元素，那么就说 M 含在 N 之中；M 是 N 的一部分；M 是 N 的子集或者 N 包含 M．而记作

$$M\subseteq N \quad \text{或} \quad N\supseteq M.$$

例如集合 $M=\{1,\ 2\}$ 是集合 $N=\{1,\ 2,\ 3\}$ 的一部分．

显然 $M\subseteq N$ 恒成立．为了方便起见，我们把空集看作是任何集合的子集．

如果两个集合是由完全相同的元素构成的，那么就说这两个集合相等．例如，方程 $x^2-3x+2=0$ 所有的根的集合与集合 $\{1,2\}$ 是相等的．

我们来定义集合上的运算规律．

联或和　给出集合 $M,\ N,\ P,\ \cdots$．集合

$$X=M+N+P+\cdots,$$

即由它的“被加数”$M, N, P, \cdots$ 的所有元素所组成的集合，称为这些集合的联或和．但是，如果元素 x 属于很多被加数，那么 x 只能归入和 X 一次．显然

$$M+M=M.$$

而且当 $M \subseteq N$ 时，有

$$M+N=N.$$

交 同时属于所有的集合 $M, N, P, \cdots$ 的那些元素的全体所组成的集合 Y，称为 $M, N, P, \cdots$ 的交或这些集合的公共部分.

显然 $M \cdot M=M$. 如果 $M \subseteq N$，则 $M \cdot N=M$.

如果集合 M 与 N 的交是空集，即 $M \cdot N=\theta$，则称这两个集合不相交.

为了标记集合的和与交的运算，我们仍旧沿用记号 Σ 与 Π. 因此

$$E=\sum E_i$$

为诸集合 E_i 之和，而

$$F=\prod E_i$$

为它们的交.

请读者自己证明，集合的和与交服从普通的结合律

$$M(N+P)=MN+MP.$$

同样也服从规律

$$M+NP=(M+N)(M+P).$$

差 所有属于 M 而不属于 N 的元素所组成的集合 Z，称为两个集合 M 与 N 的差：

$$Z=M-N.$$

如果 $N \subseteq M$，则差 $Z=M-N$ 也称为集合 N 关于 M 的补集.

不难证明，关系式

$$M(N-P)=MN-MP$$

与

$$(M-N)+MN=M$$

恒成立.

因此，集合的运算规则与普通算术运算规则有很大的不同的.

有限集合与无限集合 由有限多个元素组成的集合，称为有限集合. 如果集合的元素的个数是无限的，那么这个集合就称为无限集合. 例如全体自然数所组成的集合就是无限集合.

我们研究任意两个集合 M 与 N，并且提出这样的问题，即这两个集合的元素的数量是否一样.

如果集合 M 是有限的，那么它的元素的数量可以由某个自然数(即其元素的数目)来表达. 在这种情形之下，为了比较集合 M 与 N 的数量，就只要计算一下 M 与 N 的元素的个数，然后比较一下所得到的这两个数目就可以了. 同样，假若集合 M 与 N 中，一个是有限的，另一个是无限的，那么很自然地可以认为无限集合包含着比有限集合更多的元素.

然而，如果两个集合 M 与 N 都是无限集合，那么用简单地计算元素的个数的方法是什么也得不到的. 所以立刻引起这样的问题，即是否所有的无限集合的元素的数量都是一样的，或者是否存在元素数量互相不同的无限集合? 假如后者是正确的，那么用什么方法可以比较无限集合的元素数量呢? 我们就要讨论这些问题.

一一对应 重新命 M 与 N 为两个有限集合. 如果不利用计算集合中元素的个数的方法，又如何来判断这两个集合中哪一个包含的元素更多一些呢? 为此我们将要确定它的对应关系，即将 M 中的一个元素与 N 中的一个元素联结成一对. 因此，假若 M 有任何一个元素在 N 中找不到它所对应的元素，那么显然 M 的元素较 N 为多. 我们只要观察一些例子，就很清楚了.

假若大厅里有若干个人及若干把椅子. 为了要知道哪样多一些，只要让人们都去找座位. 如果有人没有位子坐，那么人就比椅子多. 但是，假如所有的位子都有人坐上了，那么人和椅子正好一样多. 上面所讲的比较集合元素的数量的方法比依次计算元素个数的方法有着无比的优越性. 这是因为不需要特别的改变，这个方法就不仅能够用之于有限集合，而且可以用之于无限集合.

我们研究所有自然数的集合

$$M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$$

与所有偶数的集合

$$N=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}.$$

哪一个集合包含着更多的元素呢？一眼看去，似乎前者的元素更多些．然而，我们可以在这两个集合的元素之间建立一对对的关系，如下表所示：

表 1

M	1	2	3	4	…
N	2	4	6	8	…

没有任何 M 的元素，也没有任何 N 的元素找不到它所对应的元素．我们也可以建立如下的对应关系：

表 2

M	1	2	3	4	5	…
N	—	2	—	4	—	…

因此 M 有很多元素找不到它所对应的元素．但是另一方面，我们也可以将对应关系确定如下表：

表 3

M	—	1	—	2	—	3	—	…
N	2	4	6	8	10	12	14	…

现在 M 又有很多元素没有对应的元素了．

因此，如果集合 A 与 B 是无限的，那么用不同的方法来建立对应关系，就得到完全不同的结果．假如存在这样一个建立对应关系的方法，使 A 的每个元素与 B 的每个元素都有它所对应的元素，那么就说在集合 A 与 B 之间可以建立一一对应的关系．例如，恰如表 1 所示，上面所考虑过的集合 M 与 N 之间，就可以建立一一对应的关系．

如果在集合 A 与 B 之间可以建立一一对应的关系，那么就说他们的元素有同一数量，或者称它们同势．如果用任何方法来建立对应关系，集合 A 中总有若干个元素没有与之对应的元素，那

么就说，集合 A 的元素比 B 多，或者 A 的势比 B 大.

因此，我们获得了上面提出的问题的解答，即如何比较无限集合的元素的数量. 然而这却一点也不能给另外一个问题以丝毫的回答，即是否存在不同势的无限集合？为了要回答这一问题，我们来研究某些简单类型的无限集合.

可数无限集合 如果可以在集合 A 的元素与全体自然数所组成的集合

$$Z=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

的元素之间建立一一对应的关系，那么就称集合 A 是可数无限的. 换言之，假若集合 A 的元素可以用全体自然数来标记号码，即可以将它写成序列的形式

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

那么就说 A 是可数无限集合.

表 1 说明了全体偶数所组成的集合是可数无限的（前一列的数，现在被看成是它所对应的后一列各数的指标数）.

由上所述容易看出，最小的无限集合正是可数无限集合，即每一无限集合皆包含一个可数无限集合为其子集.

如果两个非空的有限集合互不相交，那么它们的和的元素的个数比它们中的任何一个的元素个数都多，但对于无限集合，这个规律就可能不成立. 事实上，命 Ч 是所有偶数所组成的集合，H 是所有奇数做成的集合，而 Z 是全体自然数组成的集合. 表 4 说明，集合 Ч 与 H 都是可数无限集合. 然而 $Z=Ч+H$ 仍然是可数无限集合.

表 4

Ч	2	4	6	8	…
H	1	3	5	7	…
Z	1	2	3	4	…

对于无限集合，“整体多于部分”这一法则被破坏了，这就表明无限集合有本质上异于有限集合的特性. 从有限过渡到无限，完

全符合了熟知的辩证法的规律——性质的质变.

现在我们来证明全体有理数所组成的集合是可数无限集合. 为此我们将有理数排列成下表:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
1	2	3	4	5	6	…
0	-1	-2	-3	-4	-5	…
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	…
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$	…
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	…
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{8}{3}$	…
…	…	…	…	…	…	…

此处第一列按照大小递升的次序安排了所有的自然数, 第二列遵循递降的顺序安置着零及负整数, 第三列又依照递升的次序安放着分母为 2 的所有正的既约分数, 第四列则又遵循着递降的顺序排列着分母为 2 的所有负的既约分数, 如此等等. 显然, 每一有理数在这张表上都能够而且只能被找到一次, 现在我们将这张表上所有的数都按箭头指示的方向, 依次标以号码. 于是, 所有的有理数都依次被安排成一个序列如下:

有理数对应的指标数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
有　理　数	1	2	0	3	-1	$\frac{1}{2}$	4	-2	$\frac{3}{2}$	…

这样一来, 在全体有理数与所有的自然数之间建立了一一对应, 于是, 全体有理数的集合是可数无限的.

连续统势的集合 假如可以在集合 M 的元素与间隔 $0\leqslant x\leqslant 1$

的全体点之间建立一一对应的关系，那么就称集合 M 具有连续统势．例如按照这个定义可知，间隔 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的点的集合本身，就具有连续统势．

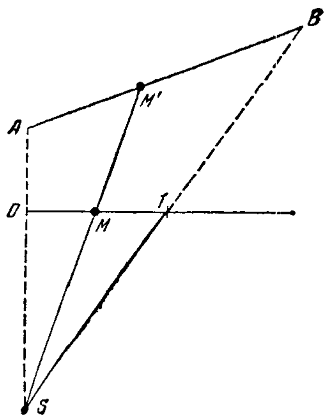

图 1

由图 1 可以看出，任何间隔 AB 的点的全体具有连续统势．由几何投影的方法，建立了它的点与间隔 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的点之间的一一对应关系．

不难证明，任何区间 $a<x<b$ 与直线 $-\infty<x<+\infty$ 上所有点所组成的集合，都具有连续统势．

更为有趣的事情是正方形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 的点的集合有连续统势．因此，粗略地说，正方形中的点与间隔上的点"一样多"．

§3. 实　　数[1)]

数的概念的发展已经在第一章(第一卷)中详细介绍过了，现在我们将粗略地介绍实数的理论．这个理论是由于要建立分析的基本概念，在十九世纪产生的．

有理数　我们假定读者已经熟悉有理数的基本性质．这里我们只回忆一下这些性质，而不去详细叙述它们．有理数集合是由形如 m/n 的数所做成的数集，此处 m，n 为整数，而 $n\neq 0$．有理数有两个由一些规律(公理)所确定的运算(加法与乘法)．以下用 a，b，c，… 来表示有理数．

I．加法公理

1) $a+b=b+a$　(交换律)．

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$　(结合律)．

1) 写这段时，作者与阔尔莫果洛夫(А. Н. Колмогоров)作了有益的讨论．

3) 方程 $$a+x=b$$
有唯一的解(存在逆运算).

由这些公理立刻可以看出，表达式 $a+b+c$ 有确定的意义. 存在有理数零(零元素)，使 $a+0=a$. 又存在加法的逆运算——减法，因而表达式 $b-a$ 是有意义的.

从代数的观点来看，对于加法的运算关系，全体有理数做成交换群.

II. 乘法公理

1) $ab=ba$ (交换律).

2) $a(bc)=(ab)c$ (结合律).

3) 方程 $$ay=b$$
当 $a\neq 0$ 时有唯一的解(存在逆运算).

由这些公理立即得知，表达式 abc 是有意义的，存在有理数 1 使 $a\cdot 1=a$. 又对于异于零的有理数，存在逆运算——除法. 因此对于乘法运算来说，除零外的所有有理数做成交换群.

III. 分配律

1) $(a+b)c=ac+bc$.

有理数满足所有的公理 I—III. 对于加法及乘法的运算关系来说，全体有理数组成一个所谓代数域.

IV. 良序公理

1) 对于任意两个有理数 a 与 b，在下面三个关系中，有一个而且仅有一个成立：$a<b$，$a>b$ 或 $a=b$.

2) 若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$.

3) 若 $a<b$，则 $a+c<b+c$ (加法的不变性).

4) 若 $a<b$ 与 $c>0$，则 $ac<bc$ (乘以 $c>0$ 的不变性).

由于所有这些公理都满足，所以我们称有理数集合为良序域. 除有理数外，还有其他事物的集合也满足这些公理，因而也是良序域.

我们还应该注意下面所讲的有理数的两个重要性质：

稠密性 对于任何有理数 a 与 b，而 $a<b$，总可以找到有理

数 c, 使得 $a<c<b$.

可数性 全体有理数的集合是可数无限集合(见§2).

量的度量 仅仅考虑量的度量这样一个重要的问题, 就可以看出,对于数学的发展来说,仅仅有有理数是不足的. 我们观察一个最简单的例子,即间隔长度的度量问题.

考虑一条直线. 在直线上确定了方向、原点(点 O)及单位度量. 这样一来,就确定了端点在 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$ 等等的间隔 OA. 一般说来, 每一个有理数 a 都在直线上对应一个点 A, 即点 A 的坐标 $x=a$. 因此 a 就表示方向为 OA 的间隔的长度. 然而用这个方法所定义的长度, 并不是每一个间隔都是可以用某个(有理)数来度量的. 例如,在古希腊时就已经熟知的,边长为单位的正方形的对角线的长度,就不能用任何有理数来度量. 换言之,直线上的点多于有理点. 这就很自然地引起了这样的问题——建立数与直线上的点的一一对应关系,也就是进一步扩充数的概念.

实数 我们已经说过,仅用有理数去度量量是不够的,因而数的概念应当进一步扩充, 使数与直线上的点一一对应起来. 为了这个目的,我们希望弄清楚,仅仅借助于有理点是否可能确定直线上任意点的位置,从而类似于有理数的构造,使我们得到实数的概念.

命 α 为直线上的任意点,于是所有的有理点 a 可以分成两类: 一类是位于 α 左方的全体有理点 a, 另一类则是位于 α 右方的全体有理点 a. 如果这两类有一交点 α(假如 α 正好是有理数), 那么 α 可以属于任何一类. 有理点的这种分类就称为分割. 如果两个分割的左方与右方的有理点都是相同的(至多除掉一点), 那么就称这两个分割恒等. 现在不难看出,不同的点 α 与 β, 所确定的分割也是不同的. 事实上,由于有理数是处处稠密的,所以总可以找出两个有理数 r_1 与 r_2, 都位于 α 与 β 之间且它们都不等于 α 或 β, 那么对于一个分割,它们位于其右方,对于另一个, 就位于其左方.

因此直线上每一点都确定了有理数范围内的一个分割. 不同的点对应不同的分割. 值得重视的是分割也可以用与此多少有些不同的方法来定义, 也就是让 α 本身不出现在定义内. 把有理数的全体分成两个非空非交的集合 A 与 B, 对任意 $a \in A$, $b \in B$ 都有 $a < b$, 我们就称这是有理数的一个分割. 这样定义的分割, 唯一地确定了一个点(界点). 换言之, 借助于有理数范围内的分割可以确定直线上的任何点. 这种构造方法是德国数学家戴德金首创的, 因此后人称之为戴德金分割.

分割并不是借助于有理点来确定直线上任意点的位置的唯一可能的方法. 普通度量所常用的是下面要讲的康托尔的方法. 重新命 α 为直线上任何一点, 那么总可以找到两个有理数 a 与 b, 其距离小于任意给定的常数, 使 α 位于 a 与 b 之间. 这样一来, a 与 b 就确定了 α 的近似位置. 我们介绍的这种近似确定点 α 的位置的过程可以不断延续下去, 使每作一次, 精确度就增加一次. 因此得到了端点为有理数的一系列的间隔 $[a_n, b_n]$, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 及 $b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$. 满足这些条件的诸间隔, 称为间隔套. 这样的间隔套唯一地确定了点 α 的位置.

借助于有理数类似的构造, 也可以定义实数. 进一步, 我们将定义实数上的运算关系, 使之满足与有理数上的运算关系同样的公理. 现在由于直线上的每一点都对应一个实数, 且其逆也真, 所以常常称实数的全体为数轴.

连续性准则 有理数全体所成的集合与全体实数所成的集合之间存在着本质的差别, 那就是实数的全体具有一系列的性质, 它们刻划出这个集合的连续特性. 但有理数的全体所成的集合却不具有这些性质. 这些性质就称为连续性准则. 现在我们列举其中重要的几条.

戴德金准则 若将所有的实数分成两个无公共元素的非空集合 X 与 Y, 对于任意的 $x \in X$, $y \in Y$, 皆满足 $x < y$, 那么存在唯一的数(界) ξ, 对于任何 $x \in X, y \in Y$ 皆有 $x \leqslant \xi \leqslant y$. 适合 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的全体, 称为直线上的间隔, 我们记之为 $[a, b]$. 若