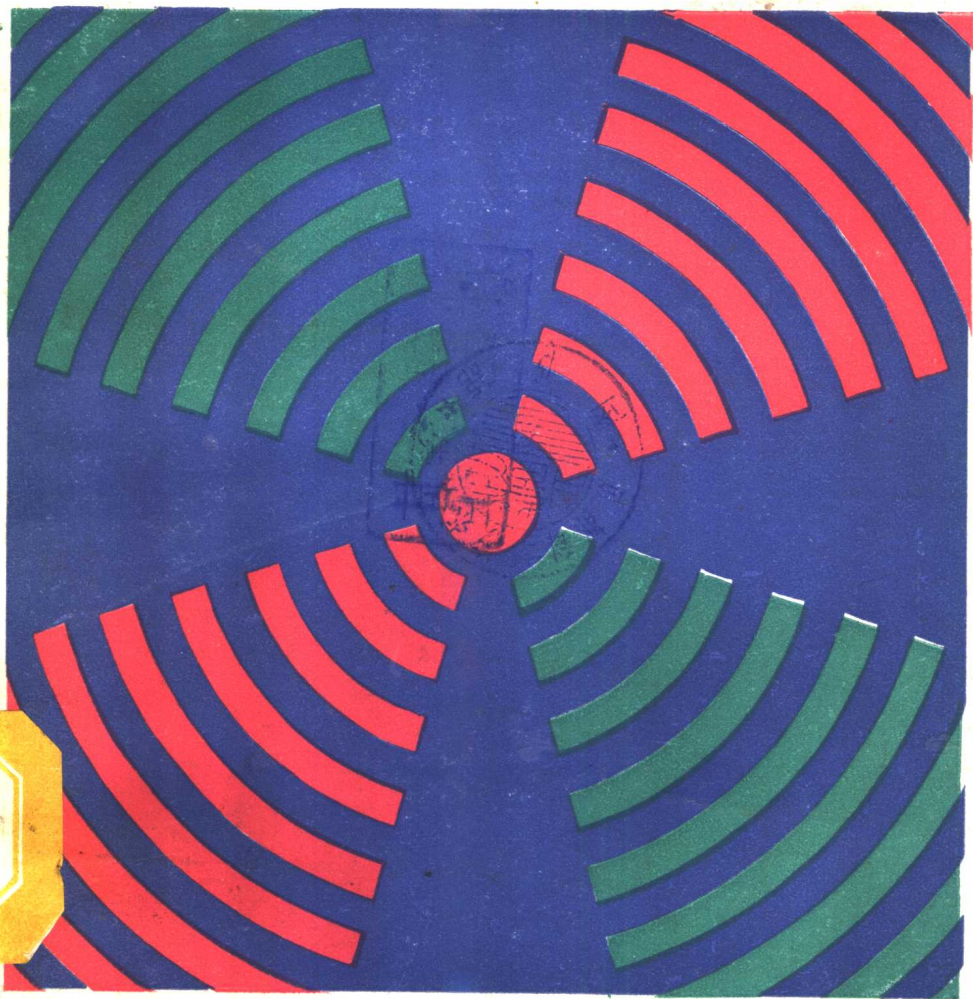


922293

转子动力学理论基础

张 文 著



科 学 出 版 社

转子动力学理论基础

张 文 著

科 学 出 版 社

1990

内 容 简 介

本书介绍近代转子动力学中的若干重要内容,其中包括复杂转子系统的建模和分析方法;转子动力学中的模态综合法;广义陀螺特征值问题;离心力场下的柔性系统动力特性;转子系统在各种非保守力下的失稳分析,如油膜振荡、蒸气振荡、密封失稳和干摩擦失稳等;还介绍了不对称转子、粘弹性转子、裂纹转子和充液转子等专题。

本书可供从事转子动力学、结构振动、一般力学、旋转机械设计的科学研究人员、工程技术人员、高等院校教师、研究生和本科生阅读、参考。

转子动力学理论基础

张 文 著

责任编辑 李成香

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1990 年 12 月 第 一 版 开本 850×1168 1/32

1990 年 12 月 第一次印刷 印张: 9 1/4

印数: 0001—1100 字数: 238 000

ISBN 7-03-001851-6/O · 362

定价: 10.40 元

前 言

在人类生产活动中,旋转机械的使用已有很长时间了.自本世纪初以来,对有关力学现象陆续进行了研究,但研究成果大多散见于振动书籍和文献.近三十年来,由于工业部门的需要和推动,转子动力学才获得了较大发展,成为振动领域中的一个重要分支.国外陆续出版了不少专著和论文集^[1-7].我国转子动力学研究起步不算太晚,这归功于能源工业和航空工业的迫切需要.在80年代,出版了两种供研究生使用的著作^[8,9]和两种译本^[3,4].前两种书,内容由浅入深,材料丰富,对推动我国转子动力学的发展起了很大作用.后两种翻译书虽受到原书出版时间的限制,难以反映近年成果,但作为入门书籍,至今仍有很大的参考价值.

考虑到转子动力学的基础性知识已有众多书籍介绍,本书侧重介绍近代转子动力学一些比较深入的基础性材料、分析方法和近期成果,具体有以下十个方面的内容:

1. 复杂转子系统的建模手段和分析方法,包括集聚参数法,有限元素法,假设形态法和模态综合法(第一章到第五章);
2. 离心力场下柔性旋转系统动力学(第六章);
3. 大型广义陀螺特征值问题基本理论和解法(第七章);
4. 线性运动稳定性理论,陀螺系统和循环系统(第八章);
5. 不对称转子系统(第九章);
6. 裂纹转子(第十章);
7. 油膜失稳,密封失稳和蒸汽振荡(第十一、十二章);
8. 粘弹性转子动力学(第十三章);
9. 充液转子系统(第十四章);
10. 转子系统的干摩擦失稳(第十五章).

在分析转子动力学中的许多复杂现象时,不少文献常限于简

单转子模型,比如文献[3]中自始至终只讨论单盘转子,其优点是机理清晰,分析简洁,且回避了数学上的累赘。但它没有提供实际转子的分析途径。从理论性和应用性考虑,本书注重对多自由度转子系统建立运动方程,提供分析求解方法并寻求普遍运动规律和失稳准则。读者可以发现,一些文献中的特定结论和分析方法在本书中已推广到一般情况。

为了数学表达和演绎的简洁,本书常采用矩阵和向量符号作运算。

必须指出,复杂转子系统和多自由度转子系统,是近代转子动力学的主要研究对象,其原因如下:

1. 近代高速旋转机械的一个重要特征是高转速,它们处于超临界,甚至超过二、三个临界转速的高柔性状态下运转。低转速时视为“刚体”的旋转部件,这时都应视为弹性部件参与耦合振动,从而构成复杂的柔性旋转系统,航空发动机的柔性盘-叶片-轴耦合系统即为一例。每个旋转部件质点的预离心力在变形位移上作功引起的附加刚度,力学上称为几何刚度阵,它的计算至今尚未完全解决。

2. 近代高速旋转机械工程师们都已逐步接受下列观点:采用柔性支承和柔性基础,是使超临界运行安全可靠的有效设计途径。一味加固基础的观念已经陈旧而且还会导致适得其反的结果。柔性支承和柔性基座伴随着柔轴一起振动,乃是使超临界转子减少振幅,降低支承反力,安全运行的有力保证。降低支承刚度和实施轻基础设计,是近代高速旋转机械设计思想上的一个飞跃。但在作动力分析时,就必须把转子系统和不转动的支承-基础系统作为一个耦合整体处理,从而增加了分析难度。近代大型汽轮发电机组的转子-油膜-支承-基础系统和航空发动机的转子-支承-机匣系统即为复杂转子-结构系统的典型实例。

3. 当然,同时也出现了转子自身结构复杂的旋转机械,如航空发动机的双转子、三转子系统,化工机械中的进动式旋转机械(进动式离心机,进动式搅拌机,粉碎机),纺织机械中的高速纱锭等。

这些旋转机械的旋转系统已不再是单一的旋转体形象,而是有多个旋转轴,彼此可以有不同的旋转角速度大小,甚至有不同的旋转方向。对这类复杂转子系统,连通常的临界转速概念都需修改。

可见,旋转机械高转速轻结构的趋势,更复杂转子系统成了近代转子动力学的基本研究对象。首要问题是如何建立它们的简化力学模型,以便做理论分析和在计算机上实行。传递矩阵法需要改进,以便处理分叉结点,还需克服高频段的数值不稳定性。70年代以来,分析复杂转子系统的大型有限元程序纷纷出台,但有限元模型常常导致成百上千个自由度,给计算机容量和经济性带来严重困难。于是,人们开始引入模态综合法,它能大幅缩减自由度并保证精度。该方法成了目前处理复杂转子系统的重要手段。因此,本书用较多篇幅(第二至六章)介绍一些建模方法和分析手段。

低转速时,因不计陀螺效应,转子运动方程常被简化为振动方程(若不计其他非保守力)。但在高转速下,陀螺力的存在必将导致大型广义陀螺特征值问题。和结构动力学中的求解大型对称阵特征值问题的丰富成果相比,陀螺特征值问题的研究还很不够。70年代后,陆续推出了一些求解方法,但主要适用于自由度数目不太大的陀螺系统。因此,寻求大型广义陀螺特征值问题的有效解法,是近代转子动力学的一个新任务。目前文献对这一专题尚较少作系统介绍。为此本书第七章将作详细介绍。

高转速提高了旋转机械的性能,但也带来了许多严重的失稳现象,成了困扰工程师们的难题。近代转子动力学的一大任务是分析转子系统的稳定性问题,当然已不能仅仅停留在对失稳机理的解释上,还需要对实际转子系统提出分析计算方法,需要把握各个参数对失稳的影响,从而为工程实际服务。

有许多因素可引起失稳,其普遍原因是存在一个切向力,它克服了外阻尼并导致转轴作增幅涡动。幅值之所以不会猛长是由于非线性因素的抑制。这一切向力可以由广义速度引起,称为陀螺力,也可以由广义位移引起,称为循环力,或者是它们的联合作用。另外,非正定的保守力也会使系统失稳。引起失稳的物理因素有:

1. 油膜力, 主要是指交叉刚度系数和交叉阻尼系数引起的陀螺力和循环力. 2. 密封力, 它属于循环力型. 3. 叶尖气隙力(Alford 力), 它也是循环力. 4. 转轴的刚度不对称. 这时转轴的挠度和弹性恢复力方向不一致, 引起切向分量. 5. 转轴材料的粘弹特性和转轴的结构阻尼, 造成转轴截面零应力线和零应变线不重合, 激发出切向分量. 6. 转子和静子在间隙内的相互碰摩引起干摩擦力, 这是典型的切向力. 7. 充液转子. 若为理想约束, 这是一个会引起负刚度效应的流-固耦合系统.

本书第八章简单介绍线性运动稳定性基本理论, 介绍陀螺系统和循环系统的失稳理论. 从第九章开始到第十五章, 逐个讨论上面列举的每种失稳现象. 物理上, 介绍每种非保守力的力学模型、失稳机理. 数学上, 立足于多自由度转子系统, 推导各种非保守力模型下多自由度转子系统的涡动方程并寻求稳定性判据和失稳的一般规律.

必须指出, 转子动力学的发展包括两个平行的方面: 分析方法的改进和力学模型的完善. 因此, 在某些章节中, 将花较多篇幅详细讨论力学模型. 这是因为, 许多失稳问题的分析和力学模型的可靠性要比精细计算更重要. 再好的数学手段也弥补不了力学模型上的缺陷. 目前, 有许多非保守力的力学模型, 还不能令人满意, 油膜力就是一例. 现在国内外都已研制出一套非常完善的从计算油膜动特性直到分析整个转子系统油膜稳定性的大型计算程序. 但油膜动特性模型, 至今还在继续研究之中. 在高转速下, 由于紊流效应, 介质惯性力效应, 粘度温度效应, 表面粗糙度, 泄流等因素, 即使在雷诺方程中添加了许多修正因子, 算出的 8 个动力系数仍常常与实测值不一致. 已有人怀疑这种愈来愈繁的计算模式是不是一种好的建模途径. 比如大量实验和现场观察表明, 油膜失稳引起半速涡动. 但在解释这一现象时, 一些精细的油膜力模型不见得比某些简单的油膜力模型更好. 可见, 简单未必粗糙, 而复杂未必精确, 关键是如何把握住主要特征. 在第十一章中我们将介绍油膜力的 Muszynska 模型, 以供读者思考和研究. 在

第十章中的裂纹影响模型,第十二章中的密封力、Alford力的力学模型,都将有类似的讨论.希望这些内容能对读者进一步研究有所帮助.

材料内耗会引起转轴失稳,这一事实早就被揭示.但早期研究限于简单的 Kelvin-Voigt 粘弹模型和单盘转子一类的转子模型.高转速引起涡动转子的材料内部强烈的交变应力,使结构内阻尼和材料内耗对转子的失稳影响愈加明显.工程界已开始重视内阻尼问题.第十三章介绍实际转子系统在一般粘弹物质模型下的内耗失稳理论,提出了蠕变失稳这一概念.

转子动力学远远不止上述这些内容,特别是在实验方法和理论方面,由于作者水平有限、知识面狭窄而无力涉及,希望读者原谅.

本书在写作中得到了胡海昌先生的极大支持和帮助,同时作者还得到赵令诚、黄文虎、晏励堂、闻邦椿、郑兆昌、顾家柳、夏松波、龚汉声、陈德成、恽伟君、于尧治等国内专家教授的大力支持、鼓励和帮助,作者也得到复旦大学同事王文亮、张慧生和王皓的大力协助,在此一并表示深切的谢意.

书中难免会有不少缺点错误,恳请广大读者指正.

作者

参 考 文 献

- [1] Tondl A., Some Problems of Rotor Dynamics, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1965.
- [2] Niordson F. I., Ed., Dynamics of Rotors, IUTAM Symposium (1974), Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [3] Gasch R., Pfützner H., Rotordynamik, Eine Einführung, Springer-Verlag, Berlin, 1975. (有中译本:周仁睦译,蔡家宝校,转子动力学导论,机械工业出版社,1986年.)
- [4] Кельзон, А. С., Циманский Ю. П., Яковлев В. И., Динамика роторов в упругих опорах, Наука, 1982. (有中译本:董师予译,汪一鹏校,转子动力学,弹性支承,科学出版社,1987年.)
- [5] Rao J.S., Rotor Dynamics, John Wiley & Sons, Singapore, 1983.

- [6] Dimarogonas A. D., Paipetis S. A., Analytical Methods in Rotor Dynamics, Applied Science Publishers, London and New York, 1983.
- [7] Mahrenholtz O., Ed., Dynamics of Rotors-Stability and Stiffness Identification, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [8] 顾家柳、丁奎元、刘启洲、夏松波、刘方杰、黄太平, 转子动力学, 国防工业出版社, 1985年.
- [9] 钟一谔、何衍宗、王 正、李方泽, 转子动力学, 清华大学出版社, 1987年.

目 录

前言

第一章 力学基础	1
§ 1.1 广义坐标的复数表示	1
§ 1.2 广义坐标的列向量表示	5
§ 1.3 刚体定点运动与欧拉角	7
§ 1.4 卡尔丹角	9
§ 1.5 角速度的矩阵求解公式	12
§ 1.6 欧拉参数法	13
§ 1.7 投影角法	15
§ 1.8 弹性应变能	17
§ 1.9 影响系数, 柔度阵和刚度阵	19
§ 1.10 有刚体自由度系统的刚度阵	21
参考文献	22
第二章 集聚参数转子系统的涡动运动	23
§ 2.1 涡动方程与涡动频率	23
§ 2.2 临界转速	26
§ 2.3 横向各向同性转子系统	27
§ 2.4 轴向镜像对称转子, 平行涡动和锥形涡动	31
§ 2.5 旋转坐标系中的转子涡动方程	34
参考文献	37
第三章 连续转轴的涡动运动	38
§ 3.1 Rayleigh 梁-轴模型	38
§ 3.2 Timoshenko 梁-轴模型	40
§ 3.3 连续转轴自由涡动的一个精确解	41
参考文献	43
第四章 连续转子系统的离散化方法	45
§ 4.1 Rayleigh 梁-轴有限单元法	45

§ 4.2 Timosheako 梁-轴有限单元法	49
§ 4.3 假设形态法 (Rayleigh-Ritz 法)	53
参考文献	57
第五章 复杂转子系统——模态综合法	59
§ 5.1 模态综合法的一般步骤	59
§ 5.2 约束子系统法	62
§ 5.3 自由子系统法	65
§ 5.4 子系统假设形态法	68
§ 5.5 状态空间中的模态综合法	72
参考文献	75
第六章 离心力场下的弹性系统动力学	77
§ 6.1 定常自旋弹性体的扰动运动方程	77
§ 6.2 旋转梁的振动	80
§ 6.3 旋转梁的屈曲失稳	84
§ 6.4 旋转状态下柔轴-弹性盘的耦合振动	87
参考文献	94
第七章 陀螺系统特征值问题	96
§ 7.1 问题的一般背景	96
§ 7.2 陀螺特征值问题的基本性质	97
§ 7.3 反对称阵的典则型	99
§ 7.4 广义 Jacobi 法	100
§ 7.5 三维旋转法	103
§ 7.6 Meirovitch 法	107
§ 7.7 三对角对称降阶法	108
§ 7.8 反对称阵的 Lanczos 法	111
§ 7.9 广义 Rayleigh-商	113
参考文献	115
第八章 线性系统运动稳定性基础	117
§ 8.1 Lyapunov 运动稳定性	117
§ 8.2 线性系统的运动稳定性判据	118
§ 8.3 保守系统	122
§ 8.4 陀螺系统	123

§ 8.5 循环系统	128
参考文献	130
第九章 不对称转子系统	132
§ 9.1 不等主刚度下的单盘转子	132
§ 9.2 不等主刚度下的多盘或连续转子系统	135
§ 9.3 副临界转速	138
§ 9.4 不对称转动惯量和不对称刚度的联合作用	139
参考文献	142
第十章 裂纹转子	143
§ 10.1 开裂纹	143
§ 10.2 开闭裂纹	144
§ 10.3 Schmied-Krämer 近似	150
§ 10.4 Dimarogonas 方法	153
§ 10.5 开闭裂纹的一般模型	159
参考文献	161
第十一章 油膜动特性模型和转子系统的油膜失稳	163
§ 11.1 滑动轴承油膜力线性化模型	163
§ 11.2 油膜动力特性分析	166
§ 11.3 Muszynska 模型	174
§ 11.4 刚性转子的平行涡动	177
§ 11.5 刚性转子的锥形涡动	180
§ 11.6 Jeffcott 单盘弹性转子的平行涡动	182
§ 11.7 多自由度转子-油膜系统的失稳理论	186
参考文献	188
第十二章 密封轴承, 气隙力和磁轴承	190
§ 12.1 密封动特性模型和转子的密封失稳	190
§ 12.2 叶尖的气隙效应	194
§ 12.3 磁轴承和磁阻尼器	197
参考文献	201
第十三章 材料内耗与粘弹性转子	204
§ 13.1 几种简单的粘弹材料本构关系	205
§ 13.2 多盘 Voigt 粘弹转子的涡动方程和稳定性判据	208

§ 13.3	多盘组合模型粘弹转子的涡动方程和稳定性判据	214
§ 13.4	静载荷下内耗转子的静变位	216
§ 13.5	内耗失稳的物理解释	218
§ 13.6	盘-轴热套配合的内阻尼模型	224
§ 13.7	线性粘弹材料的普遍本构关系	226
§ 13.8	Maxwell 模型,三参数模型和幂律体模型	230
§ 13.9	普遍运动方程	233
§ 13.10	有限自由度下的离散型运动方程	236
§ 13.11	静载荷下一般粘弹转轴的静变位	240
§ 13.12	三参数模型粘弹转轴的运动稳定性	241
§ 13.13	幂律体粘弹转子的蠕变失稳	246
	参考文献	248
第十四章	充液或部分充液柔性转子系统	250
§ 14.1	充液单盘转子的规则圆涡动	250
§ 14.2	充液单盘转子的动力稳定性	257
§ 14.3	充液弹性转轴	262
	参考文献	268
第十五章	干摩擦失稳	269
§ 15.1	单盘转子的干摩擦失稳	270
§ 15.2	多盘转子系统的干摩擦失稳	272
§ 15.3	重刚体转子的干摩擦涡动	278
	参考文献	283

第一章 力学基础

转子动力学研究的对象,主要是定常自旋物体的扰动运动.本章将介绍扰动运动的一些基本的数学描述手段,以作为以后章节的基础.

§ 1.1 广义坐标的复数表示

考虑图 1.1 所示单盘转子 (Jeffcott 转子), 盘位于轻质柔轴中央. 无扰动变形时, 圆盘中心位于水平轴 Ox 上, 并与无变形轴一起以角速度 Ω 绕 x 轴作自转. 由于扰动, 盘心 C 产生横向偏离, 柔轴发生变形. 在静止坐标系 $O-xyz$ 中, 质心偏离 $\delta = y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ 可用列向量表出如下:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

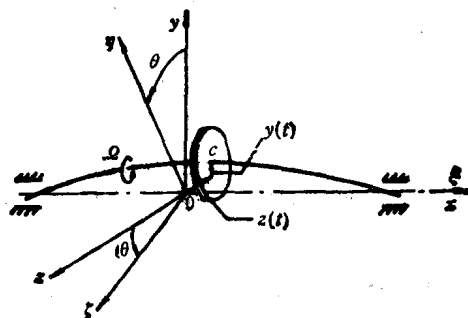


图 1.1 单盘转子

或用复数形式表示为

$$P = y + iz \quad (1.1.2)$$

取另一旋轴坐标系 $O-\xi\eta\zeta$, ξ 轴与 x 轴重合, 并绕 x 轴以角速度 $\dot{\theta}(t)$ 旋转, 设在动系 $O-\xi\eta\zeta$ 中观察, C 点的相对偏离为 $\delta =$

$\eta(t)\eta + \zeta(t)\zeta$, 则有下列坐标转换式:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

或

$$\rho = \eta + i\zeta = P e^{-i\theta(t)} \quad (1.1.4)$$

或反过来, 写为

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad P = \rho e^{i\theta(t)} \quad (1.1.5)$$

把(1.1.5)式的第二式对时间求导, 得

$$\dot{P} = \dot{\rho} e^{i\theta} + i\dot{\theta} \rho e^{i\theta} \quad (1.1.6)$$

$$\ddot{P} = \ddot{\rho} e^{i\theta} + 2i\dot{\theta} \dot{\rho} e^{i\theta} + i\ddot{\theta} \rho e^{i\theta} - \dot{\theta}^2 \rho e^{i\theta} \quad (1.1.7)$$

其中“ $\cdot$ ”表示对时间求导。上二式即为下列理论力学中关于点的平面复合运动速度和加速度公式

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

的复数表示式。

若 ρ 是常值复数, 与时间无关, 又设 $\theta = \omega t$, 即

$$P = \rho e^{i\omega t} \quad (1.1.8)$$

质心的这种运动称为圆涡动或圆进动, ω 为涡动(或进动)频率。在静止坐标系中观察, 轨迹是一个圆。

设转子的自转角速度是 Ω , 则当 ω 与 Ω 同向, $\omega \cdot \Omega > 0$ 时, 称为同向涡动(正进动), 反之称为反向涡动(逆进动)。当 $\omega = \Omega$ 时, 不仅质心 C , 而且转盘上任意一点 M 都以 Ω 绕 x 轴旋转, 此时为同步涡动, 见图 1.2, 即圆盘作定轴旋转。当 $\omega \neq \Omega$ 时, 称为异步涡动。

现考虑两个同一频率的正、逆进动的合成运动:

$$P = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \quad (1.1.9)$$

其中 A, B 都是常值复数。

设 $A = a_1 + ia_2$, $B = b_1 + ib_2$, 代入(1.1.9)得

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & b_2 - a_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} \quad (1.1.10)$$

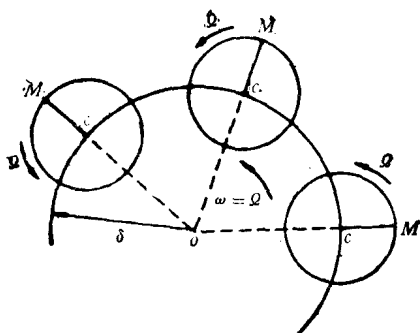


图 1.2 同步振荡

若该式右边矩阵的行列式不为零, 消去 t 得

$$[(a_1 - b_1)y + (a_2 - b_2)z]^2 + [(a_1 + b_1)y - (a_2 + b_2)z]^2 = (a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2)^2 \quad (1.1.11)$$

此为椭圆方程, 可见, (1.1.9) 一般代表椭圆进动, $A = 0$ 或 $B = 0$ 时, 为圆进动. 若 (1.1.10) 右边矩阵行列式为零, 则

$$\frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = \frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} = k \quad (1.1.12)$$

代入 (1.1.10), 得

$$z = ky \quad (1.1.13)$$

它为直线方程. 因 (1.1.12) 式可改写为 $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$, 因此, 当 $|A| = |B|$ 时, (1.1.9) 退化为直线振动. 有些文献^[1,2]认为: 当 $A = B$ 时 (1.1.9) 退化为直线运动, 其实, 仅需 $|A| = |B|$ 即可.

可进一步指出, 当 $|A| > |B|$ 时, (1.1.9) 作正椭圆进动, 反之, 作逆椭圆进动. 事实上, 令 $A = r_1 e^{i\varphi}$, $B = r_2 e^{i\psi}$, 代入 (1.1.9), 得

$$y = r_1 [\cos(\omega t + \phi) + \varepsilon \cos(\omega t + \phi)]$$

$$z = r_1 [\sin(\omega t + \phi) - \varepsilon \sin(\omega t + \phi)]$$

其中 $\varepsilon = r_2/r_1$. 于是幅角

$$\text{tg } \theta = \frac{z}{y} = \frac{\sin(\omega t + \phi) - \varepsilon \sin(\omega t + \phi)}{\cos(\omega t + \phi) + \varepsilon \cos(\omega t + \phi)}$$

两边对 t 求导, 得

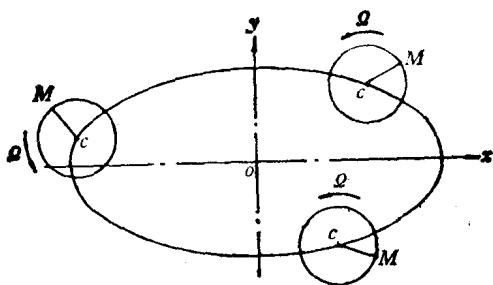


图 1.3 椭圆正进动

$$\dot{\theta} = \frac{(1 - \varepsilon^2) \cos^2 \theta}{[\cos(\omega t + \phi) + \varepsilon \cos(\omega t + \phi)]^2}$$

可见, $\varepsilon < 1$ 时, $\dot{\theta} > 0$, 作正进动(图 1.3), 否则作逆进动。

若转盘横向尺寸(半径)可观, 则应把它看作刚体, 它的扰动除质心偏离外, 还有方位偏离。常取盘的单位外法向量 $\mathbf{n}$ 在 xy , xz 平面上的投影线与 x 轴的夹角 θ_y, θ_z 表示方位偏离。在小扰动下, θ_y 和 θ_z 的量值等于 $\mathbf{n}$ 的矢端的线位移, 见图 1.4。因此, 前面对

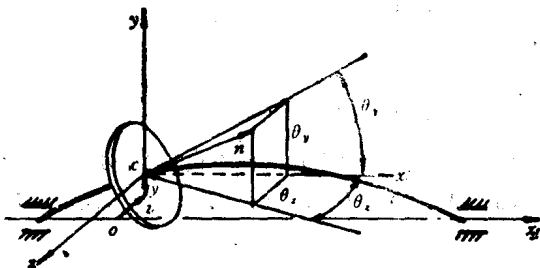


图 1.4

线位移的表示法也适用于角位移, 比如

$$\theta = \theta_1 e^{i\omega t} + \theta_2 e^{-i\omega t} \quad (1.1.14)$$

代表向量 $\mathbf{n}$ 以角速度 ω 扫出的一个椭圆锥, 见图 1.5, 于是, y, z, θ_y, θ_z 构成了描述单个转盘偏离运动的四个广义坐标。

对多盘转子系统, 设第 j 个盘的广义坐标为 $y_j, z_j, \theta_{y,j}, \theta_{z,j}$, 令 $P_j = y_j + iz_j, \theta_j = \theta_{y,j} + i\theta_{z,j}$, 又记 $\mathbf{P} = [P_1, \dots, P_n]^T, \boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T, \mathbf{Q} = [P^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T$, 则 $\mathbf{Q}$ 是该转子系统的复广义坐标总