

矿井通风网络图论



T0725
746
2

矿井通风网络图论

李恕和 王义章 编著

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书应用网络理论分析、研究矿井通风网络的结构,论述了矿井通风网络数学模型的建立。在此基础上提出了在正常情况及发生火灾等灾变条件下的通风工况分析,最佳控制,矿井扇风机工况分析、调节、选型以及矿井通风系统通过能力的计算方法,并给出了有关的计算机程序框图和算例。

本书可供矿业院校师生和科研、生产、设计部门的通风安全技术人员参考。

责任编辑:王 振 铎

矿 井 通 风 网 络 图 论

李恕和 王义章 编著

*

煤炭工业出版社 出版

(北京安定门外和平北路16号)

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本787×1092¹/₁₆

印张 11

字数 268 千字

印数1—3,720

1984年5月第1版

1984年5月第1次印刷

书号15035·2803 定价3.00元

前 言

矿井通风是保证矿井安全生产，促进采矿工业现代化的极为重要的条件，而矿井通风工作也应该向现代化的方向发展。目前矿井通风的某些理论和方法却不能适应现代化的需要。为了有助于实现矿井通风的自动控制，本书依据网络理论的基本原理，对矿井通风网络风流的分配及控制等方面从理论上进行了研究，提出了一套较为完整的数学模型和计算方法。这样就进一步改进、完善、补充了传统的矿井通风理论体系，使某些按传统理论难以阐述和求解的问题能通过数值计算得到解决。书中将对矿井通风系统在正常通风或发生火灾情况下通风状况的分析、风流控制以及矿井扇风机工作状况分析和调节等方面的理论及计算方法进行较为详细的阐述。

根据本书所述理论及方法所编制的DJS-21机ALGOL60 程序已调试通过，并对某些实例进行了解算，取得较为满意的效果。所述方法也同样适用于手算。

为了使读者顺利地阅读本书，在第一、二章编写了有关的数学基础知识，并对有关方法配有相应的程序框图及算例。

鉴于本书是对矿井通风网络理论进行论述的初次尝试，加之我们水平所限，不妥之处在所难免，诚挚地希望得到读者的批评指教。

本书在编写过程中，中国矿业学院黄元平教授，贵州工学院刘勤堂副教授都给予了很大地支持和帮助，特此表示谢意。

李 恕 和 于贵州工学院
王 义 章

一九八二年二月

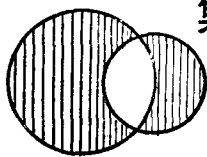
ABA 17/03

目 录

第一章 集合与矩阵代数基础	1
第一节 集合及其基本运算	1
第二节 矩阵代数基础	6
第二章 图 及 其 运 算	17
第一节 图的基本概念	17
第二节 图的矩阵表示	24
第三节 树	32
第四节 回路和割集	38
第三章 矿 井 通 风 网 络	48
第一节 矿井通风网络图	48
第二节 矿井通风网络基本数学模型	61
第四章 矿井扇风机运转特性与分析	69
第一节 矿井扇风机的运转数学模型	70
第二节 矿井扇风机工况分析	78
第三节 扇风机特性在电子计算机中的存贮	83
第四节 矿井扇风机的调节	86
第五章 通风网络工况的计算与分析	93
第一节 网络自然分风数学模型	93
第二节 计算方法	96
第六章 矿井通风网络风流的控制和调节	112
第一节 矿井通风网络的风流控制	112
第二节 调节方法	113
第三节 风量调节计算	116
第四节 风流控制方案的优选	128
第五节 井下发生火灾时的通风状况分析和风流控制	133
第七章 矿井通风设计中的有关问题	144
第一节 矿井通风网络的通过能力	144
第二节 矿井扇风机的选型	148
第八章 算 例	152

第一章

集合与矩阵代数基础



集合和矩阵代数是现代数学的基础，它已日益广泛地应用到各科学技术领域，成为不可缺少的数学工具。本章仅对书中所需要的有关内容作一扼要介绍。

第一节 集合及其基本运算

一、集合及其表示法

我们把具有某种属性的事物组成的集体称为一个集合（或简称为集），而这些事物中的每一个体则称为该集合的元素（或成员）。例如：

煤矿通风系统中，通风巷道的全体；

煤矿通风系统中，各通风巷道通过的风量的全体；

煤矿通风系统中，各通风巷道风阻的全体；

不同型号的矿山用扇风机的全体。

一般，用大写字母 $A, B, C, \dots, Y, Z$ 表示集合，而用小写字母 $a, b, c, \dots, y, z$ 表示集合的元素。

如果 a 是集合 S 的元素，记为 $a \in S$ ，读作“ a 属于 S ”。否则，记为 $a \notin S$ ，称 a 不属于 S 。

通常表示集合的方法有两种：

一种是枚举法，即把一个集合的元素罗列出来。例如：

26个英文字母构成的集合 $L = \{a, b, c, \dots, y, z\}$ ；

自然数集合 $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ；

正整数集合 $I_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ；

整数集合 $I = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ 。

另一种是概括法，即把一个集合的元素特征表示出来。用 $A = \{x | p(x)\}$ 表示 A 是使命题式 $p(x)$ 为真的变元 x 的全体构成的集合。例如：

$S = \{x | x \text{ 是中国的省会或自治区首府}\}$ ；

$I_m = \{x | x \in I \text{ 和 } 2 < x < 7\}$ ；

$Q = \{x | x = p/q, p, q \text{ 是整数}\}$ 。

于是， S 是中国的省会和自治区首府组成的集合； I_m 是小于 7 而大于 2 的整数集合； Q 则是有理数全体所成的集合。

集合 S 中的不同元素的数目，称为集合的基数（或势），记作 $|S|$ 。因此，集合的基数或势是表示集合中元素多少的指标。称基数是有限的集合为有限集，否则称为无限集。本书中，主要讨论有限集。

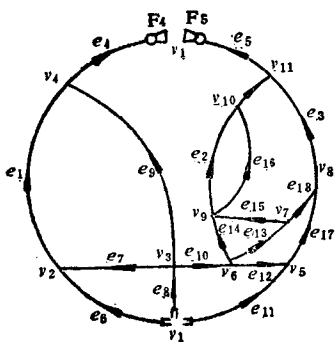


图 1-1

如图1-1所示的通风网络图, $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$ 表示结点的集合, 而 $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{17}, e_{18}, e_{19}\}$ 则表示通风巷道的集合. $|V| = 11, |E| = 19$. 所以, V, E 均为有限集.

定义 1-1 称不含有任何元素的集合为**空集**, 记作 ϕ .

例如: $\{x | x^2 + x + 1 = 0, x \text{ 是实数}\} = \phi$.

必须把空集和只有一个零元素的集 $\{0\}$ 区别开来. $\{\phi\}$ 也不是空集, 它含有一个元素 ϕ .

二、集合间的关系

定义1-2 两个集合 A 和 B , 当且仅当 A 和 B 有共同的元素, 即 $x \in A \iff x \in B$ (符号 $\iff$ 称为等价符), 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

例如: $A = \{x | x \in I \text{ 和 } 2 < x < 7\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $A = B$;

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}.$$

定义1-3 两个集合 A 和 B , 当 $a \in A$ 时必有 $a \in B$, 则称 A 是 B 的**子集**, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

上述两个集合的关系, 也称作 B 包含 A 或 A 被 B 包含. 例如:

$$\{x | x \in I \text{ 和 } 2 < x < 7\} \subseteq \{3, 4, 5, 6\};$$

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{x | -3 \leq x \leq 3\}.$$

如果集合 A 不包含集合 B , 则记作 $A \not\supseteq B$ 或 $B \not\subseteq A$.

定义1-4 两个集合 A 和 B , 如果 $A \subseteq B$, 且 B 中至少有一个元素不属于 A , 则称 A 是 B 的**真子集**, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

上述两个集合的关系, 也称作**真包含**.

例如: $\{1, 2, 3\} \subset \{x | -3 \leq x \leq 3\}$;

$$\{x | x^2 + x + 1 = 0, x \text{ 是实数}\} \subset \{0\}.$$

根据空集的定义, 显然, 对任一集合 A , 均以空集为其子集, 即 $\phi \subseteq A$. 而对于任一集合 A , 因为它的每一个元素都属于自身, 所以, $A \subseteq A$. 也就是说, 任何一个集合均是其自身的子集.

必须把成员关系 (属于关系) 和包含关系区别开来: 属于关系 $a \in A$, 系指元素 a 和集合 A 之间的关系; 而包含 $B \subseteq A$, 则是两个集合 A 和 B 之间的关系.

例如: $1 \in \{1, 2, 3\}$ 和 $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$

具有不同的含义.

一个集合允许拥有集合作为它的元素. 例如, $A = \{\{1\}, 2, 3\}$, 则下列关系是正确的.

$$\{1\} \in A.$$

$$2 \in A.$$

$$\{\{1\}, 2\} \subset A.$$

$$\{\{1\}\} \subset A.$$

定理1-1 设 A 和 B 是两个集合, 当且仅当 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$ 时, 有 $A = B$.

根据定义1-2, 这个定理是显然的。一般在证明两个集合相等时, 常使用本定理。

定理1-2 设A, B和C是三个集合, 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ 。

证明 因为 $A \subseteq B$, 则 $x \in A \Rightarrow x \in B$ 。又因 $B \subseteq C$, 又有 $x \in B \Rightarrow x \in C$ 。即是 $x \in A \Rightarrow x \in C$, 因此, $A \subseteq C$ 成立。

三、集合的运算

根据运算规则, 对一个或多个集合进行运算, 能够产生新的集合。

定义1-5 两个集合A和B的并集C, 是由属于A或属于B的一切元素所组成的集合, 记作 $C = A \cup B$ 。即

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ 或 } x \in B$$

例如:

$$\{2, 3, 4\} \cup \{3, 5, 7\} = \{2, 3, 4, 5, 7\};$$

$$\text{若 } A = \{x | -1 < x < 2\}, B = \{x | 1 < x < 3\},$$

$$\text{则 } A \cup B = \{x | -1 < x < 3\}.$$

定义1-6 两个集合A和B的交集C, 是由同时属于A和B的一切元素所组成的集合, 记作 $C = A \cap B$ 。即

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ 和 } x \in B.$$

例如:

$$\text{若 } A = \{x | x > -2\}, B = \{x | x < 3\},$$

$$\text{则 } A \cap B = \{x | -2 < x < 3\};$$

$$\text{若 } A = \{x | x > 3\}, B = \{x | x < -2\},$$

$$\text{则 } A \cap B = \phi.$$

定义1-7 两个集合A和B的差集C, 是由属于A而不属于B的一切元素所组成的集合, 记作 $C = A - B$ 。即

$$x \in A - B \iff x \in A \text{ 和 } x \notin B.$$

例如:

$$\text{若 } A = \{x | 0 \leq x \leq 5\}, B = \{x | 3 \leq x < 7\},$$

$$\text{则 } A - B = \{x | 0 \leq x < 3\};$$

$$\text{而 } B - A = \{x | 5 < x < 7\}.$$

定义1-8 两个集合A和B的对称差集C, 是由属于A或属于B, 但不同时属于A和B的一切元素所组成的集合, 记作 $C = A \oplus B$ 。即

$$C = A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

例如:

$$\text{若 } A = \{x | 0 \leq x \leq 5\}, B = \{x | 3 \leq x \leq 7\},$$

$$\text{则 } C = A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$= \{x | 0 \leq x \leq 7\} - \{x | 3 \leq x \leq 5\}$$

$$= \{x | 0 \leq x < 3 \text{ 或 } 5 < x \leq 7\}.$$

根据对称差的定义, 两个集合A和B的对称差, 还可以用不同的形式表示。如 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ 。

给定集合 V , 空集 ϕ 和集合 V 本身都是 V 的子集, 另外, 任意元素 $a \in V$, 集合 $\{a\}$ 也是 V 的子集, 如此等等, 当 V 是有限集时, 可列出它的所有子集, 这些子集的全体, 构成一个新的集合。

定义1-9 设 V 是一个有限集, V 的所有子集的全体构成的集合, 称为 V 的幂集, 记作 $\rho(V)$ 。

对任一 $A \in \rho(V)$, 称 $\overline{A}_V = V - A$ 为 A (关于 V) 的补集。一般不致混淆时, 就说成 A 的补集且简记为 $\overline{A}$ 。即

$$x \in \overline{A}_V \iff x \in V \text{ 和 } x \notin A.$$

例如:

若 $V = \{a, b, c\}$, $A = \{a\}$,

则 $\rho(V) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ 。

$\overline{A}_V = \{b, c\}$ 。

关于有限集 V 的幂集 $\rho(V)$ 的势, 有下面的定理。

定理1-3 设 V 是一个有限集, $|V| = n$, 则 $|\rho(V)| = 2^n$ 。

证明 由 n 个元素中选取 i 个的组合方案共有 $C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ 种。所以 V 的不同子集 (包括空集 ϕ) 的数目为

$$\begin{aligned} |\rho(V)| &= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n \\ &= 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n \end{aligned}$$

又由二项式定理有

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot y + C_n^2 x^{n-2} \cdot y^2 + \dots + C_n^n y^n$$

当 $x = y = 1$ 时, 由上述展开式得

$$2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = |\rho(V)|.$$

定义1-10 两个集合 A 和 B 的笛卡尔乘积 C , 是由集合 A , B 的元素组成的有序偶对为元素所成的集合, 记作 $C = A \times B$ 。即

$$C = A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

并称 A 和 B 为 C 的边界。

在定义中, $C = A \times B$ 是以偶对 (a, b) 为元素, 注意, 此时第一分量 $a \in A$, 而第二分量 $b \in B$, 因此, 称 (a, b) 为有序偶对。所以, 一般 $A \times B \neq B \times A$ 。

例如:

若 $A = \{a, \beta\}$, $B = \{1, 2\}$,

则 $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (\beta, 1), (\beta, 2)\}$;

$B \times A = \{(1, a), (1, \beta), (2, a), (2, \beta)\}$,

$A \times A = \{(a, a), (a, \beta), (\beta, a), (\beta, \beta)\}$ 。

四、图解表示法

利用各种重叠的圆代表集合的所谓文氏图是帮助理解集合间的关系和运算的一种直观的方法, 图1-2用文氏图表示了集合间的一些基本运算, 图中阴影部分表示运算的结果。

五、集合的运算律

上面介绍的集合运算，具有如下性质：

(一) 交换律

集合的并、交、对称差运算满足交换律。即

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cap B = B \cap A;$$

$$A \oplus B = B \oplus A.$$

(1-1)

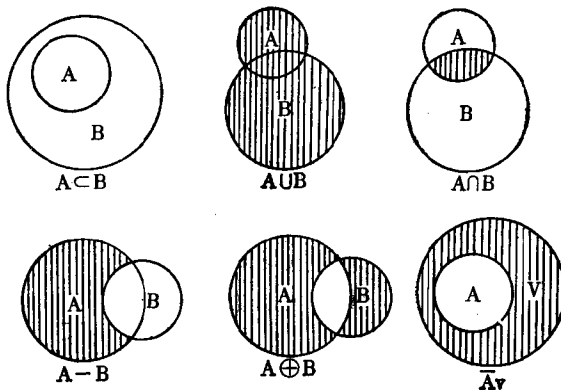


图 1-2

(二) 结合律

集合的并、交运算满足结合律。即

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(三) 分配律

集合的并、交运算，每一个对另外一个都是可分配的。即

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(1-2)

(1-3)

证明 先证 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

$$x \in (A \cup B) \cap C \iff x \in A \cup B \text{ 和 } x \in C$$

$$\iff (x \in A \text{ 和 } x \in C) \text{ 或 } (x \in B \text{ 和 } x \in C)$$

$$\iff (x \in A \cap C) \text{ 或 } (x \in B \cap C)$$

$$\iff x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

故

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

再证

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

$$x \in (A \cap B) \cup C \iff x \in A \cap B \text{ 或 } x \in C$$

$$\iff x \in A \text{ 和 } x \in B \text{ 或 } x \in C$$

$$\iff x \in A \cup C \text{ 和 } x \in B \cup C$$

$$\iff x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

故

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(四) 吸收律

$$(A \cap B) \cup A = A$$

$$(A \cup B) \cap A = A$$

(1-4)

上述四个性质，我们只给出了性质3)的证明，其余性质读者可自行证明。

(五) 狄摩根公式

若 $A \subseteq V$, $B \subseteq V$, 则

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

$$\begin{aligned} A \cup \overline{A} &= V; \\ A \cap \overline{A} &= \phi; \\ \overline{\overline{A}} &= A. \end{aligned} \quad (1-5)$$

证明 我们选择关系 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 证明如下:

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff x \in V \text{ 和 } x \notin A \cap B \\ &\iff x \in V \text{ 和 } (x \notin A \text{ 或 } x \notin B) \\ &\iff (x \in V \text{ 和 } x \notin A) \text{ 或 } (x \in V \text{ 和 } x \notin B) \\ &\iff x \in \overline{A} \text{ 或 } x \in \overline{B} \\ &\iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

故 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

第二节 矩阵代数基础

矩阵及其基本运算, 是进行网络分析的重要工具.

一、向量和线性空间

定义1-11 n 个有顺序的数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 所成的数组

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

称做 n 维向量. $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 称作向量 a 的第 i 个分量.

分量都是 0 的向量, 叫 0 向量. 即

$$0 = (0, 0, \dots, 0).$$

若两个向量 a, β , 当它们各个分量都相等时, 称这两个向量相等, 记作 $a = \beta$.

定义1-12 设 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 称向量 $(a_1 + \beta_1, a_2 + \beta_2, \dots, a_n + \beta_n)$ 为 a, β 的和, 记作 $a + \beta$. 而称向量 $(a_1 - \beta_1, a_2 - \beta_2, \dots, a_n - \beta_n)$ 为 a, β 的差, 记作 $a - \beta$. 即

$$\begin{aligned} a + \beta &= (a_1 + \beta_1, a_2 + \beta_2, \dots, a_n + \beta_n); \\ a - \beta &= (a_1 - \beta_1, a_2 - \beta_2, \dots, a_n - \beta_n). \end{aligned}$$

定义1-13 设 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和实数 k , 称向量 $(ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$ 为 k 与 a 的数积, 记作 ka 或 ak . 即

$$ka = ak = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

向量的和, 差及数积运算, 统称为向量的线性运算. 所有 n 维向量的全体组成的集合, 在上面定义的加法及数积运算下, 构成一个线性空间, 称为 n 维实向量空间, 记作 V_n .

设 $S \subseteq V_n$, 若 S 中的任何两个向量之和, 仍为 S 中的一个向量, 任一实数与 S 中的向量的数积, 也是 S 中的一个向量, 则我们称 S 为 V_n 的子空间.

定义1-14 设 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 是一组向量, 若有一组实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使向量 v 能够表示成:

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m \quad (1-6)$$

则称向量 v 是 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 的一个线性组合. 或称 v 可以由它们线性表出.

定义1-15 设 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 是一组向量, 如果存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_m v_m = 0$$

则称 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 线性相关, 否则称 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 线性无关.

根据定义, 当向量组 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 线性无关时, 一旦有 $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_m v_m = 0$, 则必然是 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$.

定理1-4 m 个向量 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 线性相关的充分而必要的条件是其中有某一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.

证明 不失一般性, 设 v_m 是 $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}$ 的线性组合, 即存在 $m-1$ 个实数 $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ 使

$$v_m = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{m-1} v_{m-1}$$

故有 $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{m-1} v_{m-1} - v_m = 0$. 说明 m 个向量 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 线性相关.

反之, 若 m 个向量 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 线性相关, 则存在一组不全为 0 的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{m-1} v_{m-1} + k_m v_m = 0$$

设 $k_m \neq 0$, 就有

$$v_m = -\frac{k_1}{k_m} v_1 - \frac{k_2}{k_m} v_2 - \cdots - \frac{k_{m-1}}{k_m} v_{m-1}$$

即向量 v_m 是 $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}$ 的线性组合.

定义1-16 在线性空间 V_n 中, 若一组向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 满足:

a) $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性无关,

b) V_n 中的任何一个向量可以由 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性表出.

则称 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 为 V_n 的基底. n 称作 V_n 的维数. 而 V_n 称 n 维线性空间.

设 X 是 V_n 中的一个向量, X 可由基底 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性表出, 即

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

我们称 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为向量 X 关于基底 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 的坐标.

二、矩阵及矩阵的秩

定义1-17 由 $m \times n$ 个数按行、列次序排列成 m 行、 n 列的表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1-7)$$

称为 $m \times n$ 阶矩阵, 简记为 $A = (a_{ij})$ 或 $A = (a_{ij})_{m \times n}$. 一般用 a_{ij} 记矩阵 A 的第 i 行、第 j 列的元素 (或称元). 本书仅限于讨论矩阵的元素是实数.

$n \times n$ 阶的矩阵 A , 是一个方阵, 习惯上称 n 阶矩阵. 由元素 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 构成了方阵的主对角线, 因此, 称这些元素为主对角线元素 (或称主元).

由 $m \times n$ 阶矩阵 A 中每一行的 n 个元素组成的 n 维向量, 称做 A 的行向量. 如, 第 i 行元素组成的行向量 $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. 类似可由 A 的每一列的 m 个元素组成 m 维列向量.

如 $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 。只有一行或一列的矩阵，我们常常称作向量。

值得注意的是， n 阶矩阵和 n 阶行列式是两个完全不同的概念，不要因为它们的表示形式差不多而混淆。 n 阶行列式是一个数，而 n 阶矩阵则是 n^2 个数按行列排成的表，它只是一个记号。

在 $m \times n$ 阶矩阵 A 中，取某 k 个行， k 个列 ($k \leq n, m$)，由这些行列相交处的元素，可以构成一个 k 阶矩阵，称它为 A 的子矩阵，这个 k 阶子矩阵的行列式，称为 A 的 k 阶子式。特别， n 阶方阵 A ，只有一个 n 阶子式，这个子式就称作方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$ 。

例 1-1 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

求它的行列式和二阶子式

解 A 是一个 3 阶方阵

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -60.$$

其二阶子式分别是：

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

例 1-2 设

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

求它的二阶子式

解 B 是一个 2×3 矩阵，其二阶子式分别是

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

定义1-18 若 $A = (a_{ij})$ 为一方阵，将 a_{ij} 所在的行和列从 A 中除去，所得的子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 后，称作 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij} 。

例1-3 对例1中的方阵 A ，试求它的代数余子式。

解

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 12 & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \\
A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 18 & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -34 \\
A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -16 \\
A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 28 & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -14 \\
A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22
\end{aligned}$$

根据行列式的性质, 有下列二个重要结果:

$$a) \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \det A \quad (1-8)$$

即 n 阶方阵 A 的行列式, 等于其任一列 (或行) 上的所有各元素与其对应的代数余子式的积之和。

$$b) \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ij} = 0 \quad (k \neq i) \quad (1-9)$$

$$\text{或 } \sum_{j=1}^n a_{ik} A_{ij} = 0 \quad (k \neq j) \quad (1-10)$$

即 n 阶方阵 A 的某一行 (或列) 的元素与另一行 (或列) 对应元素的代数余子式的积之和为 0。

结合例1-1和例1-3, 读者不难对式 (1-8), (1-9), (1-10) 加以验证。

定义1-19 矩阵 A 中, 不为零的子式的最高阶数如果是 r , 则称 A 的秩是 r , 记作 $\text{rank} A = r$ 。 n 阶方阵的秩如果是 n , 称为满秩矩阵, 否则称为降秩矩阵。

如例1-1中的方阵 A , $\text{rank} A = 3$ 。

矩阵的秩是一个重要概念, 它也可以由矩阵的行 (或列) 向量的线性关系给出。

定义1-20 若 $m \times n$ 阶矩阵 A 的 m 个行 (或 n 个列) 向量中, 有 r 个线性无关 ($r \leq m, n$), 而所有个数大于 r 的行 (或列) 向量却都相关, 则称数 r 为矩阵 A 的秩。

例如:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

以 $v_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$, $v_2 = (-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)$, $v_3 = (0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1)$, $v_4 = (0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ -1)$, 表示 B 矩阵的 4 个行向量。则因 $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$, 所以 v_1, v_2, v_3, v_4 是线性相关的行向量组, 而 $v_1 + v_2 + v_3 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)$, 所以 v_1, v_2, v_3 线性无关, 因此, $\text{rank} B = 3$ 。

秩为 0 的矩阵，是全由 0 元素组成的矩阵，称为零矩阵。

一个 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ ，若当 $i = j$ 时 $a_{ij} \neq 0$ ，而当 $i \neq j$ 时 $a_{ij} = 0$ ，称为对角矩阵，其形式为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

即对角矩阵是除了主对角线元素外，其余元素均为 0 的方阵。特别，主对角元素 $a_{ii} = 1 (i = 1, 2, 3 \cdots n)$ 的对角矩阵，称为单位矩阵，记作 I 。即

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

一个方阵 A ，若主对角线以下的元素都是 0，即当 $i > j$ 时 $a_{ij} = 0$ ，称为上三角矩阵。若主对角线以下的元素都是 0，即当 $i < j$ 时， $a_{ij} = 0$ 称为下三角矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

分别是上三角矩阵和下三角矩阵的一般形式。

把 $m \times n$ 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的行同列互换后，所得到的 $n \times m$ 阶矩阵，称为 A 的转置矩阵，记作 A^T 。即

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

例如：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

显然有

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

(1-11)

三、矩阵的运算

定义1-21 两个 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 、 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ，当它们的对应元素相等时，称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相等，记作 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

定义1-22 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ， $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 阵，称 $m \times n$ 阵 $\mathbf{C} = (c_{ij})$ (其中 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$) 为矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 之和，记作 $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ 。

例如：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4+(-3) & 7+0 & 8+(-4) \\ 2+4 & (-1)+1 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

两个矩阵只有当它们的行、列数相等时，方能相加，其和矩阵的元素是两个矩阵的对应元素之和。矩阵加法具有如下性质：

a) 满足交换律，即 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ 。

b) 满足结合律，即 $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ 。

定义1-23 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 阵， k 为实数，则称矩阵 $k\mathbf{A} = (ka_{ij})$ 为数 k 与矩阵 $\mathbf{A}$ 之数积。

例如：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad k = -2$$

$$-2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & -14 & 16 \\ 10 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

则

数 k 与矩阵 $\mathbf{A}$ 之积，其结果是以数 k 遍乘矩阵 $\mathbf{A}$ 的各个元素。矩阵的数积具有下列性质：

a) 满足分配律，即 $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$ ， $(k+p)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + p\mathbf{A}$ 。

b) 满足结合律，即 $h(k\mathbf{A}) = (hk)\mathbf{A}$ 。

式中， k 、 p 、 h 表示数，而 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 表示矩阵。

c) 若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵， k 是一个数，则 $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$ 。

例如：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -4 & -6 & 8 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad k = -2$$

则

$$|k\mathbf{A}| = |-2\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -4 & -14 & 0 \\ 8 & 12 & -16 \\ -6 & -18 & 0 \end{vmatrix} = (-2)^3 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -4 & -6 & 8 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -192$$

值得注意的是，数乘行列式和数乘矩阵是不同的。

定义1-24 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times l$ 阵, $B = (b_{ij})$ 是 $l \times n$ 阵, 则称 $m \times n$ 阵 $C = (c_{ij})$ (其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} \cdot b_{kj}$) 为矩阵 A 与 B 的积, 记作 $C = A \cdot B$.

例如:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} C = A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 3 \times 0 + 1 \times 1 & 2 \times 0 + 3 \times (-2) + 1 \times 3 \\ 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 4 \times 1 & 0 \times 0 + 1 \times (-2) + 4 \times 3 \\ (-3) \times (-1) + 5 \times 0 + 0 \times 1 & (-3) \times 0 + 5 \times (-2) + 0 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 10 \\ 3 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

两个矩阵 A 、 B , 只有 A 的列数等于 B 的行数时, 它们才能相乘, 而且乘积 C 仍是一个矩阵, 它的第 i 行、第 j 列的元素 c_{ij} 是 A 的第 i 行上各元素分别和 B 的第 j 列上各对应元素的乘积之和。根据定义, 矩阵乘法不满足交换律, 即一般 $AB \neq BA$ 。因此, 矩阵相乘时, 因子之顺序就很重要。通常称 AB 为 A 左乘 B 或 B 右乘 A 。矩阵乘法有下列性质:

- a) 满足结合律, 即 $A(BC) = (AB)C$ 。
- b) 满足分配律, 即 $A(B+C) = AB + AC$ 。
- c) 若 $C = A \cdot B$, 则 $C^T = B^T \cdot A^T$ 。即矩阵乘积的转置, 等于各因子转置且调换顺序后的积。

d) 若 A 、 B 为 n 阶方阵, 则 $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ 。即两个 n 阶方阵之积的行列式, 等于这两个 n 阶方阵的行列式之积。

e) $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank} A, \text{rank} B\}$ 。即矩阵 A 、 B 的乘积的秩, 不大于 A 、 B 的秩。

若矩阵 A 是一个 n 阶方阵, 则它自身连乘 m 次所得的矩阵, 称为方阵 A 的 m 次幂, 记作 A^m 。即

$$A^m = \underbrace{A A A \cdots A}_{m \text{ 个 } A \text{ 相乘}}$$

例如:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$