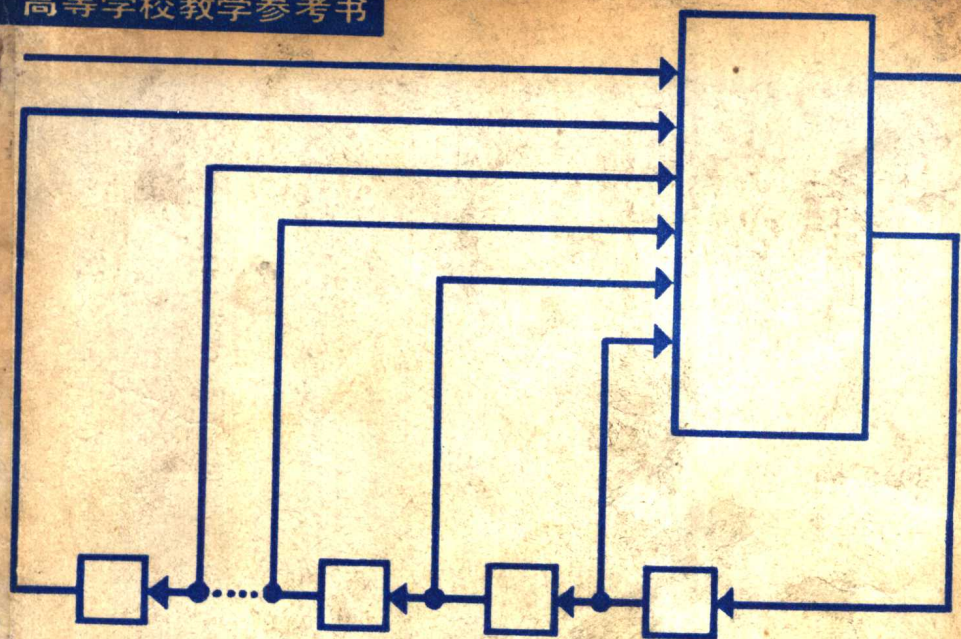


高等学校教学参考书



# 开关理论与逻辑设计

高等学校教学参考书

# 开关理论与逻辑设计

秦军南 编译

人民邮电出版社

1980·9

## 内 容 简 介

本书是根据1977年教育部理工科高等学校基础课教材会议规划而编写的教学参考书。书中着重用离散数学的基本方法研究开关理论;介绍与逻辑设计有关的方法论;同时,对逻辑设计的基本方法也进行了较系统的阐述。可供设有类似《逻辑设计》课程的高年级大学生和研究生学习参考之用,并可供上述各专业的教师和科技人员参考。

本书责任编辑姚玉洁。

高等学校教学参考书

## 开关理论与逻辑设计

秦军南 编译

\*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

武汉市江汉印刷厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 20.75 字数 498,000

1980年9月第1版 1981年5月湖北第1次印刷

印数 1--8,500

书号 15012·0276 定价 2.05 元

## 前 言

开关电路这个名称最初见之于有触点的开关电话系统。后来，由于电子器件工艺的发展，虽然出现了几代无触点的电子开关器件，但是开关电路这个名词一直沿用至今。现在，我们把能执行逻辑功能的电路叫做开关电路，而把开关电路逻辑行为的设计叫做逻辑设计。在研究逻辑设计的基础上，人们提出并发展了开关理论。开关理论乃是用统一的数学模型和方法来处理与逻辑设计有关的一种方法论。因此，开关理论是逻辑设计的理论基础。

一般公认，开关理论最初是在香农(Shannon, C. E.) 于1938年发表的著名论文《继电器和开关电路的符号分析》的基础上发展起来的。近三十年来，不断扩大了原来开关理论的研究范围，并取得了重大的进展。今天，开关理论不仅是数字计算、数字控制、数字通讯和数字测量等电子技术的重要理论基础之一，而且业已渗透到象工程控制论这样一些新兴学科之中。例如，当按照工程控制论的方法研究生物神经系统的数学模型时，就要用到阈逻辑。

鉴于这种情况，我们应当不断研究开关理论和逻辑设计技术，用严密的科学理论来代替经验试探性的直观设计方法，从而使所设计的产品达到高性能指标。为此，在我国理工科高等学校中，将逐步开设与开关理论和逻辑设计有关的课程。本书即为计算机工程和计算机科学、自动化和自动控制以及数字通讯和数字测量等一类专业的高年级大学生、研究生学习参考而编译的，并可供上述有关专业的教师和研究人員参考。

本书前四章根据有关参考文献综合编写而成，其主要参考文献名称列于章末。同时，鉴于在开关理论和逻辑设计方面国内可

供参考的文献资料暂时还比较缺乏,因此,本书的后四章除在部分章节内容上略有增删并采用我国惯用逻辑符号以外,基本上根据 Arthur D. Friedman 和 Premachandran R. Menon 所著 *Theory & Design of Switching Circuits* (1975 年) 一书译出。

学习和研究开关理论,除了应具备一般的数学基础外,尚应掌握离散数学知识。对于本书要经常使用的一些离散数学基础知识,则集中在第一章中予以介绍。而对本书偶而也要使用的一些数学工具(例如布尔矩阵等),则希望读者参考有关书籍。第二章介绍组合网络的基本设计方法。对于这方面知识比较欠缺的读者,本章将为其提供系统的材料;而对于曾学习过这方面知识的读者,本章可起复习的作用。第三章研究组合网络的某些特殊问题,它为进一步研究组合网络理论提供重要的基础。第四章讨论同步时序网络的数学模型,并较深入地介绍了设计这种网络的基本方法。第五章研究同步时序网络的一些特殊问题。这些理论在某些特殊场合下具有重要的应用价值。第六章讨论与异步时序网络逻辑设计有关的基本理论,并以较多的篇幅深入介绍了异步时序网络的状态简化、状态分配和异步时序网络的特殊问题——竞争和险态。在第七章中,用代数方法比较深入地研究简化时序机结构的有关理论问题。第八章介绍与中、大规模集成电路标准化组件逻辑设计有关的基本开关理论问题。

天津大学边莫英和李柏林同志负责本书的主审,参加审阅的还有天津大学林俊琦、韩伯韵、何莉等同志。他们认真细致地审阅了本书,并提出了许多宝贵的意见,谨致衷心的感谢。西北电讯工程学院和其他兄弟院校也提出了很好的意见,一并致谢。

由于本人水平有限,加之时间仓促,书中缺点错误在所难免,请批评指正。

秦军南 1980 年 8 月于太原工学院

# 目 录

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 第一章 数学基础 .....        | 1  |
| 1.1 集合论 .....         | 1  |
| 1.1.1 集合的概念 .....     | 1  |
| 1.1.2 子集合与幂集合 .....   | 5  |
| 1.1.3 并集与交集 .....     | 7  |
| 1.1.4 划分 .....        | 11 |
| 1.1.5 全集与补集 .....     | 11 |
| 1.1.6 用文氏图表征集合 .....  | 12 |
| 1.2 关系 .....          | 15 |
| 1.2.1 序偶 .....        | 15 |
| 1.2.2 笛卡儿乘积 .....     | 15 |
| 1.2.3 关系的概念 .....     | 16 |
| 1.2.4 等价关系 .....      | 19 |
| 1.3 偏序关系 .....        | 22 |
| 1.3.1 偏序关系的概念 .....   | 22 |
| 1.3.2 线性有序集合 .....    | 23 |
| 1.3.3 最小元素和最大元素 ..... | 23 |
| 1.3.4 覆盖 .....        | 25 |
| 1.3.5 上界与下界 .....     | 25 |
| 1.3.6 偏序集的图形表征 .....  | 26 |
| 1.3.7 格的基本概念 .....    | 28 |
| 1.4 图论 .....          | 29 |
| 1.4.1 图的数学概念 .....    | 30 |
| 1.4.2 关联、入度和出度 .....  | 33 |
| 1.4.3 图的连通性 .....     | 35 |
| 1.4.4 树 .....         | 40 |
| 1.4.5 有向图和矩阵 .....    | 42 |

|                              |           |
|------------------------------|-----------|
| 1.5 函数                       | 43        |
| 1.5.1 函数的概念                  | 43        |
| 1.5.2 函数的类型                  | 46        |
| 1.6 布尔代数                     | 49        |
| 1.6.1 亨廷顿公理                  | 50        |
| 1.6.2 布尔代数的基本定理              | 53        |
| 1.6.3 集代数与布尔代数               | 60        |
| 1.6.4 布尔函数与布尔表示式的基本概念        | 61        |
| 1.6.5 布尔函数的标准形式              | 65        |
| 1.6.6 补函数与函数的对偶              | 73        |
| 1.6.7 布尔代数在开关电路中的应用          | 74        |
| 1.6.8 布尔函数的立体图形表征            | 75        |
| 习题                           | 80        |
| 参考文献                         | 84        |
| <b>第二章 组合网络的设计基础</b>         | <b>85</b> |
| 2.1 组合网络的分析与综合               | 86        |
| 2.1.1 组合网络的分析                | 86        |
| 2.1.2 组合网络的综合                | 88        |
| 2.1.3 组合函数的最小化概述             | 94        |
| 2.2 本原蕴含的确定                  | 101       |
| 2.2.1 奎恩-麦克拉斯基法              | 101       |
| 2.2.2 卡诺图和用卡诺图确定本原蕴含         | 106       |
| 2.3 本原蕴含最小覆盖的选择              | 113       |
| 2.3.1 选择本原蕴含最小覆盖的基本规则        | 114       |
| 2.3.2 循环本原蕴含覆盖表的最小覆盖         | 116       |
| 2.3.3 用皮特里克法求本原蕴含最小覆盖        | 120       |
| 2.3.4 用卡诺图求本原蕴含最小覆盖          | 121       |
| 2.3.5 二级“或与”组合网络的最小化         | 125       |
| 2.4 多输出二级组合网络                | 132       |
| 2.4.1 多输出本原蕴含的确定             | 136       |
| 2.4.2 多输出本原蕴含最小覆盖的选择         | 143       |
| 2.5 用“与非”门及“或非”门实现最简化的二级组合网络 | 156       |
| 习题                           | 159       |

|                     |            |
|---------------------|------------|
| 参考文献                | 161        |
| <b>第三章 组合网络理论选题</b> | <b>162</b> |
| 3.1 多级组合网络          | 162        |
| 3.2 组合函数的分解         | 170        |
| 3.2.1 简单的不相交分解      | 172        |
| 3.2.2 复杂的不相交分解      | 184        |
| 3.2.3 相交分解          | 194        |
| 3.3 特殊组合函数          | 197        |
| 3.3.1 对称函数          | 198        |
| 3.3.2 混合单调函数        | 208        |
| 3.3.3 阈值函数          | 210        |
| 3.4 逻辑的完全性          | 217        |
| 习题                  | 227        |
| 参考文献                | 232        |
| <b>第四章 同步时序网络</b>   | <b>234</b> |
| 4.1 时序机             | 234        |
| 4.2 时序电路            | 242        |
| 4.2.1 存储元件          | 242        |
| 4.2.2 延迟和时钟         | 249        |
| 4.3 综合时序网络的概述       | 253        |
| 4.3.1 建立状态表         | 254        |
| 4.3.2 时序网络的实现       | 259        |
| 4.4 状态表的简化(最小化)     | 271        |
| 4.4.1 状态相容集合的确定     | 275        |
| 4.4.2 选择相容集合的最小集合   | 283        |
| 4.5 状态分配的一般问题       | 302        |
| 4.6 不使用状态表的时序网络设计方法 | 320        |
| 4.7 时序网络的分析         | 325        |
| 4.8 有限状态机的局限性       | 328        |
| 习题                  | 330        |
| 参考文献                | 336        |
| <b>第五章 时序网络选题</b>   | <b>338</b> |

|                      |            |
|----------------------|------------|
| 5.1 时序机的实验           | 338        |
| 5.1.1 区别时序           | 339        |
| 5.1.2 导引时序           | 340        |
| 5.1.3 时序机的识别(比较实验)   | 343        |
| 5.2 特殊时序机            | 346        |
| 5.2.1 信息无损耗时序机       | 346        |
| 5.2.2 线性时序网络         | 356        |
| 5.3 正则表示式            | 374        |
| 5.3.1 由正则表示式推导状态表    | 376        |
| 5.3.2 由状态表推导正则表示式    | 379        |
| 习题                   | 382        |
| 参考文献                 | 385        |
| <b>第六章 异步时序网络</b>    | <b>387</b> |
| 6.1 引言               | 387        |
| 6.2 流程表的建立和简化        | 392        |
| 6.2.1 流程表的建立         | 392        |
| 6.2.2 流程表的简化         | 397        |
| 6.3 流程表的状态分配         | 404        |
| 6.3.1 连通行集合分配        | 409        |
| 6.3.2 通用状态分配         | 413        |
| 6.3.3 共用行状态分配        | 416        |
| 6.3.4 一次转换分配         | 419        |
| 6.3.5 多输出变化流程表的状态分配  | 434        |
| 6.4 异步时序网络 $Y$ 矩阵的特点 | 435        |
| 6.5 延迟和险态            | 438        |
| 6.5.1 组合险态           | 440        |
| 6.5.2 时序险态           | 448        |
| 6.5.3 用三元代数发现险态      | 454        |
| 6.6 综合异步时序网络的示例      | 459        |
| 6.7 多输入变化            | 461        |
| 6.7.1 输入同时变化         | 461        |
| 6.7.2 无限制输入变化        | 465        |
| 6.8 延迟受限的异步时序网络      | 467        |

|                                |            |
|--------------------------------|------------|
| 6.9 门的无界限延迟和速度独立异步时序网络         | 473        |
| 习题                             | 478        |
| 参考文献                           | 482        |
| <b>第七章 时序机的结构简化</b>            | <b>485</b> |
| 7.1 完全指定的单码状态分配和划分代数           | 487        |
| 7.2 集系数代数与多码状态分配               | 492        |
| 7.3 时序机的分解                     | 509        |
| 7.4 触发器存储元件对简化依赖性的影响           | 518        |
| 7.5 少环时序网络                     | 524        |
| 7.5.1 无反馈网络                    | 525        |
| 7.5.2 单反馈环网络                   | 527        |
| 7.5.3 输出函数用做反馈函数               | 537        |
| 7.5.4 用反馈移位寄存器实现时序机            | 540        |
| 7.5.5 $R-S$ 触发器用做存储器时的最小反馈时序网络 | 549        |
| 7.6 时序机的通用标准分解                 | 549        |
| 7.7 异步时序网络中的简化依赖性              | 555        |
| 7.8 异步时序网络的分解                  | 561        |
| 7.9 用移位寄存器实现异步时序网络             | 566        |
| 习题                             | 570        |
| 参考文献                           | 575        |
| <b>第八章 标准组件化逻辑设计</b>           | <b>577</b> |
| 8.1 通用逻辑组件                     | 577        |
| 8.1.1 单相输入通用逻辑组件               | 579        |
| 8.1.2 只有一个双相输入的通用逻辑组件          | 579        |
| 8.1.3 具有双相输入的通用逻辑组件            | 581        |
| 8.1.4 输入端互连的通用逻辑组件             | 588        |
| 8.1.5 端子数的上下限                  | 590        |
| 8.2 用标准组件实现时序机                 | 592        |
| 8.2.1 输入数目固定的时序机               | 593        |
| 8.2.2 树形结构                     | 602        |
| 8.3 单元阵列                       | 610        |
| 8.3.1 一维阵列                     | 611        |
| 8.3.2 二维阵列                     | 614        |

|                          |            |
|--------------------------|------------|
| 8.3.3 时序机的迭代阵列·····      | 623        |
| 8.3.4 程序可编单元阵列·····      | 626        |
| 习题·····                  | 633        |
| 参考文献·····                | 634        |
| <b>附录 逻辑电路图形符号</b> ····· | <b>638</b> |
| <b>汉英名词对照</b> ·····      | <b>641</b> |

# 第一章 数 学 基 础

在一般工程技术中,我们使用分析数学来处理工程中的问题;而描述开关电路或数字系统的逻辑行为,则要用所谓**离散数学**。离散数学是近代数学的一个分支,它主要研究数理逻辑(或称理论逻辑或符号逻辑)、集合论、布尔代数以及其他现代应用数学等。这一章主要介绍本书要用到的有关离散数学的一些基本概念。愿意进一步学习的读者可参阅本章末所列的有关文献。

## 1.1 集 合 论

**集合**是现代数学的一个重要概念。

### 1.1.1 集合的概念

所谓集合(简称**集**),就是可以互相区别的事物的汇集。这每个事物则叫做集合的**元素**(简称**元**)。例如某一教学班是由三十名学生组成的集合,而每名学生则是该班的成员(即元素)。如果不考虑构成集合的各事物的性质,而仅研究集合的一般特性,那么就把这样的数学叫做**集合论**。数学的这一分支最初是由德国数学家康托尔(Georg Cantor, 1845—1918)在 1871—1883 年期间创立的。至今,它已成为现代数学的基础,也是研究开关理论与逻辑设计的重要数学工具。

通常用大写拉丁字母  $A, B, C, \dots, Z$  表示集合,而用小写拉丁字母(例如  $a_1, a_2, \dots$ )表示元素。如果事物  $a_i$  是集合  $A$  的元素,则用符号表示成

$$a_i \in A$$

并把它读做“ $a_i$  属于  $A$ ”。而且, 当  $a \in A$ ,  $b \in A$ ,  $c \in A$  时, 往往将其简写为  $a, b, c \in A$ 。如果事物  $b_i$  不是集合  $A$  的元素, 就说  $b_i$  不属于  $A$ , 并可用符号将其表示成

$$b_i \notin A$$

或者

$$b_i \bar{\in} A$$

如果集合  $A$  的元素数目是有限的, 例如有  $a_1, a_2, \dots, a_n$  个元素, 就说  $A$  是有限集合, 并可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

这个集合的元素数目叫做有限集合  $A$  的势或基数, 并用  $|A|$  表示, 现在,  $|A| = n$ 。而由无限多个元素组成的集合则称为无限集合, 并可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

### 例 1.1

下列集合均为有限集合:

- (1) 十进制数字的集合  $D = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ;
- (2) 二进制数字的集合  $B = \{0, 1\}$ ;
- (3) 能除尽 8 的全部正整数的集合  $Z = \{1, 2, 4, 8\}$ 。 □①

### 例 1.2

下列集合均为无限集合:

- (1) 自然数的集合  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ;
- (2) 自然数中偶数的集合  $G = \{2, 4, 6, \dots\}$ ;
- (3) 整数的集合  $Z = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ 。 □

在开关电路和逻辑设计中, 集合内元素的数目是有限的, 所以, 今后我们只讨论有限集合。

---

① 在本书中, 凡做完一个例题、证明完一个定理或引理以及叙述完一个程序时, 均用符号 □ 表示。

在集合论中,利用上面讲的概念,可以推导出其他概念,但需要补充这样的定义:设有两个集合  $A$  和  $B$ , 当且仅当属于它们的元素完全一样时,两个集合是相等的,并记为  $A=B$ 。

### 例 1.3

(1) 设集合  $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ , 集合  $B=\{a_1, a_3, a_2\}$ 。因为集合中元素的书写次序是任意的, 所以

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_3, a_2\}$$

即

$$A=B$$

(2) 设集合  $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ , 集合  $B=\{a_1, a_2, a_3, a_3\}$ 。因为集合  $B$  中两个  $a_3$  是不能区别的, 这相当于只有一个  $a_3$  可以与  $a_1$  和  $a_2$  相区别, 所以

$$\{a_1, a_2, a_3, a_3\} = \{a_1, a_2, a_3\} \quad \square$$

### 例 1.4

设集合  $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ , 集合  $B=\{a_1, a_2, a_4\}$ 。虽然这两个集合的元素数目相同, 但是属于它们的元素却不完全一样, 所以

$$\{a_1, a_2, a_3\} \neq \{a_1, a_2, a_4\} \quad \square$$

有了集合的基本概念之后, 现在我们可以为集合写一个普遍的符号公式。为此, 设有  $x \in A$ , 其中  $x$  称为变元, 并设  $P(x)$  是关于  $x$  的命题, 那么, 可以把集合  $S$  的普遍符号公式写成

$$S = \{x | P(x)\} \quad (1-1)$$

并把它读做“能使命题  $P(x)$  为真的全部元素  $x$  的集合”。

### 例 1.5

按符号公式重写例 1.1(1):

$$D = \{i | i \text{ 为十进制数字}\} = \{0, 1, 2, \dots, 9\} \quad \square$$

在开关理论与逻辑设计的许多文献中, 为了简要地说明命题, 常规定一些逻辑符号。现在举例说明如下:

设  $P$  和  $Q$  是两个命题, 则规定:

$P \implies Q$  代表“如果存在  $P$ , 则存在  $Q$ ”或者“由  $P$  可以得  $Q$ ”;

$P \iff Q$  代表“当且仅当存在  $P$  时, 存在  $Q$ ”或者“当且仅当存在  $Q$  时, 存在  $P$ ”;

$P \wedge Q$  代表“ $P$  与  $Q$ ”;

$P \vee Q$  代表“ $P$  或  $Q$ ”。

此外, 还常使用下述符号:

$\forall x$  代表“对于全部的  $x$ ”或者“对于每个  $x$ ”;

$\exists x$  代表“存在着  $x$ ”;

$\exists! x$  代表“有唯一的  $x$ ”;

$(\forall x)_A$  代表“对于  $A$  中的每个  $x$ ”;

$(\exists x)_A$  代表“ $A$  中存在着  $x$ ”。

使用这些符号, 我们就可以把上面关于集合相等的定义表示成下列符号形式:

$$A=B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B) \quad (1-2)$$

下面我们再介绍两种常见的集合: **空集合**和**族集合**。

**空集合** 没有元素的集合叫做空集合, 用  $\emptyset$  表示。

**例 1.6**

(1)  $\{x | x < 1 \text{ 且 } x > 2\} = \emptyset$ ;

(2) 集合  $\{0\}$  中有一个元素, 即数字 0, 所以  $\{0\} \neq \emptyset$ ;

(3) 设  $\emptyset$  为空集合而 0 为数字, 则  $|\emptyset| = 0$ ;

(4) 设  $\emptyset$  为空集合而  $\{\emptyset\}$  含有元素, 所以  $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ 。  $\square$

**族集合** 如果某集合中的元素本身为集合, 则该集合称为族集合(或称为**类**), 并且通常用大写拉丁字母  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  等表示。

**例 1.7**

下面的集合都是族集合:

(1)  $\mathcal{A} = \{\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9\}\}$ ;

$$(2) \mathcal{B} = \{ \{0, 9\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\} \};$$

$$(3) \mathcal{C} = \{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\emptyset\} \}.$$

### 1.1.2 子集合与幂集合

#### 子集合

如果集合  $A$  中的元素也是集合  $B$  中的元素, 那么我们说  $A$  包含于  $B$  中, 并用符号表示成  $A \subseteq B$ ; 或者说  $B$  包含  $A$ , 且写成  $B \supseteq A$ . 两种表示符号代表同一含义. 如果  $A \subseteq B$ , 则  $A$  是  $B$  的**子集合**(简称**子集**), 而  $B$  是  $A$  的**母集合**(简称**母集**). 因此子集的符号公式可写成

$$(A \subseteq B) \iff (x \in A \implies x \in B) \quad (1-3)$$

#### 例 1.8

设有下述集合:  $B = \{x, y, z, w\}$ ,  $A = \{x, y, z\}$ ,  $C = \{x\}$ , 且  $D = \{x, y, z, w\}$ . 则  $A$  是  $B$  的子集, 并且  $C$  和  $D$  也都是  $B$  的子集.  $\square$

由例 1.8 看出,  $A, C, D$  虽然都是  $B$  的子集, 但是这里有两种情形. 第一种情形是母集中至少有一个元素是子集所没有的, 例如  $B$  中的  $w$  是  $A$  中所没有的. 我们把这样的子集叫做**真子集**, 并用  $A \subset B$  表示. 于是一般来讲, 我们可把真子集写成

$$(A \subset B) \iff (A \subseteq B, \text{ 并且 } \exists x, x \in B, x \notin A) \quad (1-4)$$

第二种情形是母集的元素与子集的元素完全相同, 我们把这样的子集叫做**非真子集**, 例如例 1.8 中的  $D$  是  $B$  的非真子集, 这时  $B = D$ . 由此推论, 任何集合也是它本身的子集.

**定理 1.1** 对于任何的集合  $A$ ,  $\emptyset \subseteq A$ .

**证明** 假设  $\emptyset \not\subseteq A$ , 那么至少有一个元素  $x$  能够使  $x \in \emptyset$ ,  $x \notin A$ . 但是根据空集合的概念,  $\emptyset$  不应当有元素. 于是得出结论,  $x \notin \emptyset$ . 因

为结论与假设相矛盾, 所以假设  $\emptyset \notin A$  是错误的。于是  $\emptyset \in A$ 。□

**定理 1.2** 设  $A$  和  $B$  为两个集合, 那么当且仅当  $A \subseteq B$  及  $B \subseteq A$  时,  $A = B$ 。

**证明** 这里, “当  $A \subseteq B$  及  $B \subseteq A$  时”是  $A = B$  的充分条件, 而“且仅当  $A \subseteq B$  及  $B \subseteq A$  时”是  $A = B$  的必要条件。下面分别就充分条件和必要条件进行证明。

**充分条件.** 令  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ 。假设  $A \neq B$ , 那么根据集合相等的定义,  $A \neq B$  意味着至少有一个元素属于一个集合, 而不属于另一个集合。现在, 令该元素为  $x$ , 并假定  $x \in A$ , 那么  $x \notin B$ 。但是, 如果  $x \in A$  且  $A \subseteq B$ , 则根据子集的定义,  $x \in B$ ; 同理, 假定  $x \in B$ , 则将导致  $x \notin A$  和  $x \in A$ , 而这是矛盾的。因此, 当  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$  时,  $A = B$ 。

**必要条件.** 假设在  $A \subseteq B$  和  $B \subseteq A$  这两个条件中有一个条件不能保持, 那么就至少有一个元素属于一个集合而不属于另一个集合, 于是  $A \neq B$ 。因此, 仅当  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$  时,  $A = B$ 。□

### 幂集合

设有集合  $A$ , 其全部子集的族集合叫做  $A$  的**幂集合** (简称**幂集**), 记为  $\mathcal{P}(A)$ , 所以幂集合也可定义为集合  $A$  的全部子集的集合, 并可用下式表示:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\} \quad (1-5)$$

#### 例 1.9

(1) 设  $A = \{a, b\}$ , 则其幂集为

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

(2) 设  $B = \{1, 2, 3\}$ , 则其幂集为

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \quad \square$$

**定理 1.3** 如果一个有限集合  $A$  有  $n$  个元素, 则其幂集合