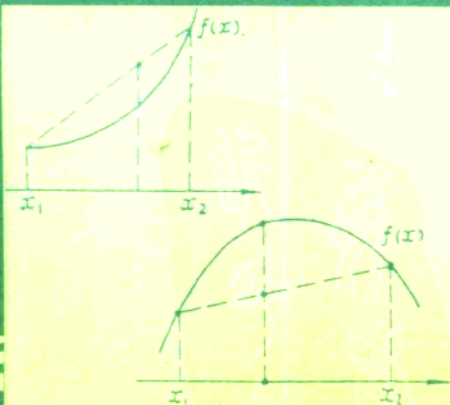


广播电视大学中等专业
自学辅导实验教材

数 字

上 册

主编 王兴华 孙国辉



中国经济出版社

广播电视大学中专自学 辅导实验教材编委会

顾问：徐联仑 宁玉山

主编：凌文桢 孙国辉 王兴华

副主编：卢其恒 朱春金

常务编委：李秉华 魏国立

编委：（按姓氏笔划排列）

王立华 王兴华 王 江 马惠君

卢其恒 许兴庄 刘建生 刘庆林

孙国辉 朱春金 李秉华 陈瑞桐

吴瑞兰 凌文桢 张存淮 张庆福

侯翠环 魏国立

本册主编：孙国辉 张存淮 朱春金

审稿人：王玉琨

序

中国科学院心理研究所，经过多年实验研究，利用心理学原理提出了中学数学自学辅导教学方法，并编写了一些实验教材。在许多学校进行试教，成效显著，受到老师、家长和同学们的欢迎，并得到国家教委的支持。大家都认为时代在前进，条件在变化，教学方法也要更新、要改革；否则就不能适应四化建设多出人才、出好人才的需要。心理学应多做贡献。

在目前的情况下，我国许多中小学的条件尚不十分完备，师资也很缺乏，特别是有经验、高水平的老师更是难以满足实际的需求。如果我们能够根据学生的心理特点，研究出一种更为有效的教学方法和编写一套有心理学特点的教材，特别是充分调动学生的学习潜力，增加其自学的技能与积极性，将会有助于提高整个教学水平。这种思想也反映了当代的教学理论。早在 60 年代，中央宣传部的负责同志，即指示中国科学院心理研究所探索新的教学方法，提高学生的学习效果。当时曾组织力量介绍引进了在国外兴起的程序教学（programmed instruction）方法。其主要思想是将教材按其本身逻辑分解为许多单元和小步子，每个项目都要求学生做出反应，然后核对答案及时判断其正误。如果正确则往下进行，如果错误，则按教材指示，返回到某一步子重新进行学习。这一方法的优点在于分步学习，循序渐进，学习顺利者进度很快，学习缓慢者可以自定速度，没有压力。不像班级教学，大家一起走，快的等慢的，慢的又感到跟不上。而且及时看到自

己的答案是否正确，这是一种及时强化，对巩固学习成果很有效。但这种方法也存在不足之处，如学习方式呆板、学生思维的灵活性难以发挥；学习材料分割太细，难以整体掌握；强调个人自学，忽视了教师的指导作用等。后来心理研究所的同志们经过多年实验、改进，发扬程序教学的优点，克服存在的问题，把教师的作用与学生的自学更好地结合，在教材编写上也注意分割与整体的结合，通过联系中学的教学实践，取得了较完整的经验，受到师生与家长的欢迎。

本书在借鉴心理所研究成果的基础上与唐山电大等单位合作编写了中专自学辅导实验教材。1991年8月还在北京召开了有关省市教育行政部门、教学科研单位参加的经验交流会，大家提出宝贵建议，经过修订与充实，现正式予以出版发行，希望这一工作能得到更多的支持与合作，也欢迎大家多提宝贵意见，共同为教育改革创造新的经验。

徐联仑

中国科学院心理研究所

一九九五年四月

前 言

现在,学校教育面临的任务是培养学生适应21世纪的要求,能参与国家竞争。这就要求学生形成积极参与科学技术活动和社会进步活动的个性品格,具有丰富的科学知识、独立思维能力。学习活动是学生的主要活动。教育工作者和心理学工作者需要探索在学习活动中如何提高学生的学习积极性与主动性。这既有助于提高学生的学习成绩,也有助于培养学生的良好道德品质和思维能力。

人类的一切活动都离不开思维。思维的灵活与呆板,是后天培养的结果。那么,只靠课堂上教师进行“工厂式”“填鸭式”的教学方式能否培养出灵活的思维能力和创造思维能力呢?很多研究证实了靠传统的教授方法已不能培养出适应社会所需要的人才了。因为这种方法不能培养学生灵活的思维能力和创造思维能力,所以必须研制一种新方法进行教学活动。

50年代,著名的心理学家斯金纳在教儿童学习上提出了一种新的思想,他主张不是对儿童讲授,而是编写“程序教材”让学生自己去学。有的科学家提出让学生考察解题的样例、分析解答的例题、发现问题、分类推进的学习方法。

我们这次编写的中专实验教材,就是从心理学的学习规律和学生的能力差异、年龄特点和个性差异入手,研究教与学的过程。

以概念学习为例,心理学研究表明:概念学习有四种水平。(1)具体水平:如儿童认识了桌上的铅笔;(2)认同水

平：如儿童在其他地方也认出了铅笔；(3) 分类水平：如儿童能认识铅笔、钢笔，各有归类；(4) 规范水平：如儿童能对铅笔的属性做出说明。简单问题的学习过程是如此，复杂问题的学习过程也是如此。我们就是按照心理学的基本原理编写教材。

这套教材运用了心理学的原理和方法，参照中专教学大纲和中专的现行课本，保证了知识的系统性和心理学原理、方法使用的合理性，力争出色地实现教学目标。按照心理学原理和方法编写的高中数学和初中史地实验教材在全国各地的学校已实验多年，都取得了良好的教学效果（1993年—1994年实验班学生升大学考试数学成绩高出对照班数学成绩2.4—10分，其他学科的成绩也很好）。因此，我们可以预测，按照同样的原理和方法编写的中专教材，也一定取得成功。

这套教材具有以下特点：

1. 此书遵循了小步子原则。将教材划分一定模块和小步子，保证学生可以由浅入深地自学。这利于激发学生学习动机。

2. 此书运用及时强化原则（书后备有答案）。学生自学时可以及时知道自己作题的正误。由于及时强化，学生学习起来颇感有趣，这样就提高了学习积极性和主动性。

3. 为了解决学生自学的困难，教材提出了各种学习方法和思考路线及启发式和产生式规则，减少了学生认知负荷。

4. 学习本教材，是自学为主，辅导居次。学生可以自定学习进度，基础好的同学可以快学，基础差的可以慢学，都可以学会，使各类学生不同程度得到提高。这就避免教师满堂灌、学生被动听的情况，也避免老师主讲不能照顾个别差

异的一刀切现象。

5. 学生基本上可以在课时以内看书，完成作业。教师只需做简要讲解和巡视辅导，课内检查学生作业，课下老师不用批改作业，减轻了师生的负担。

6. 使用本书有特定的教学模式。这就是“回忆、自学、辅导、讲解”几个字。具体说，上课时老师先提问与本节课有关的旧知识（创设情景），唤起学生的回忆、再现，集中学生的注意力，引入新课，用时 3—5 分钟；自学：学生积极主动地看书、眉批（或写笔记）、做练习，对答案（做对了，画勾；错了，纠正），有问题举手问老师（或同学，最好少问同学），用时 30 分钟左右（中间不要打断学生思维）；辅导：学生自学时教师主动深入到学生中间解决疑难问题，检查作业，发现问题，辅导差生学习，指导优生提高等，使自学顺利下去；讲解：老师巡视课堂时，发现学生的共性和典型问题、关键地方和不懂的难题，进行分析、归纳、概括讲解和小结，用时 10 分钟左右。

7. 使用本教材，可以培养学生自学能力。这种自学能力可以迁移到其他学科，并将终身受益。

为了在课堂上体现此教材的特点，必须遵照下边提出的六条教学原则：①自学与讲授相结合；②刺激、反映与强化相结合；③自定步调与既定步调相结合；④外显反映、内隐反映和暗含反映相结合；⑤自然强化和人工强化相结合；⑥知道结果与不知道结果相结合。

由于学识浅薄，不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

王兴华

一九九五年四月

目 录

序	(1)
前言	(1)
第一章 集合, 不等式	(1)
一、集合	(1)
1·1 集合及其表示方法	(1)
1·2 集合的包含与相等	(7)
1·3 集合的运算	(10)
1·4 区间	(19)
二、解不等式	(20)
1·5 一元一次不等式(组)	(20)
1·6 含有绝对值符号的不等式	(23)
1·7 一元二次不等式	(25)
小结	(31)
第二章 函数	(33)
一、映射与函数	(33)
2·1 对应与映射	(33)
2·2 一一映射与逆映射	(38)
2·3 函数	(42)
二、二次函数	(55)
2·4 二次函数的图象和性质	(55)
2·5 二次函数的应用	(59)
三、函数的单调性和奇偶性	(65)
2·6 函数的单调性	(65)

2·7 函数的奇偶性	(68)
四、反函数	(74)
小结	(78)
第三章 幂函数、指数函数和对数函数	(80)
一、幂函数	(80)
3·1 有理指数幂	(80)
3·2 幂函数及其性质	(83)
二、指数函数	(91)
3·3 指数函数及其性质	(91)
三、对数函数	(95)
3·4 对数	(95)
3·5 对数函数	(101)
3·6 利用对数进行计算	(104)
小结	(105)
复习参考：利用对数表计算	(107)
第四章 三角函数	(114)
一、任意角的三角函数	(114)
4·1 角的概念的推广	(114)
4·2 弧度制	(120)
4·3 任意角的三角函数	(123)
二、同角三角函数的关系	(131)
4·4 同角三角函数的关系	(131)
三、诱导公式	(140)
4·5 诱导公式	(140)
4·6 已知三角函数值求角	(152)
四、两角和与差的三角函数	(155)

4·7	两角和与差的三角函数	(155)
4·8	二倍角的正弦、余弦、正切	(163)
4·9	半角的正弦、余弦、正切	(166)
4·10	三角函数的积化和差与和差化积	(172)
五、	三角函数的图象和性质	(180)
4·11	正弦函数、余弦函数的图象和性质	(180)
4·12	正切函数、余切函数的图象和性质	(194)
小结		(200)
第五章	数列	(208)
5·1	数列	(208)
5·2	等差数列	(213)
5·3	等比数列	(220)
小结		(228)

第一章 集合，不等式

集合是数学的基本概念之一。本章将介绍集合的概念、集合的基本性质和基本运算，同时简要复习初中代数课中有关解不等式的内容，为学习以后各章做必要的准备。本章重点是集合的运算。

一、集合

1.1 集合及其表示方法

人们在生产、工作、生活中，经常要接触、考察或研究一些特定的对象，例如

- (1) 某市所有的普通中学；
- (2) 某中等专业学校所有的在校学生；
- (3) 1, 2, 4, 8, 16；
- (4) 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的全体实根；
- (5) 全体实数；
- (6) 平面直角坐标系内横坐标、纵坐标都是正数的所有的点；
- (7) 平面上所有的三角形。等等

上面的例子里，我们所考察的对象分别是一些数，一些

点，一些图形，一些人或一些物，不过每一组对象都具有某种共同的、明确的性质。象这样的一组对象的全体就构成了一个集合。

1、集合与元素

所谓集合，就是具有某种共同性质的对象的全体。一个集合中的每个对象，叫做该集合的元素。

上面的例子中，(3) 这个集合的元素分别是 1, 2, 4, 8, 16 这五个数。其它几个集合的元素各是什么？请读者思考。

集合的元素可以是数，也可以是点或其它几何图形，也可以是人、物或其它“成份”。不过在数学中我们主要考察研究元素是数的集合（称为数集）或点的集合（称为点集）。

（做练习 1·1 第 1—3 题）

通常用大写拉丁字母（如 A, B, M, X 等）表示集合，用小写拉丁字母（如 a, b, x, y 等）表示集合的元素。

这本书中用专用字母表示某些常用而且重要的集合，它们是：

全体自然数（即全体正整数）的集合，称为自然数集，记作 N ；

全体整数的集合，称为整数集，记作 Z ；

全体有理数的集合，称为有理数集，记作 Q ；

全体实数的集合，称为实数集，记作 R 。

为了简便起见，我们用 Q^+ 、 R^- 这样的记号分别表示正有理数集、负实数集等。

象上面所做的那样，有时我们把集合简称为集。

(通过练习 1·1 第 4 题可熟悉以上记号)

如果 a 是集合 A 的元素, 表示成 $a \in A$; 读作元素 a 属于集合 A ;

如果 a 不是集合 A 的元素, 表示成 $a \notin A$, 或是 $a \bar{\in} A$; 读作元素 a 不属于集合 A 。

例如 $\sqrt{3} \in \mathbf{R}$, $\sqrt{3} \bar{\in} \mathbf{Q}$, $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$, $0 \bar{\in} \mathbf{N}$ 等。

(做练习 1·1 第 4 题)

2、集合的基本性质

(1) 集合元素的确定性

一个给定的集合, 它的元素必须是确定的。也就是说, 对于一个给定的集合, 任何一个元素或者是这个集合的元素, 或者不是这个集合的元素, 两者必居其一, 且仅居其一。

要做到这一点, 就要使给定的集合的元素具有确定的共同性质。

对于全体自然数的集合 $\mathbf{N}$, 我们很容易判定一个对象是不是它的元素。例如 $2 \in \mathbf{N}$, $-3 \bar{\in} \mathbf{N}$, 等等。

然而, 象“全体绝对值很小的数”、“中山公园里所有好看的花”就不能构成数学意义上的集合, 这是因为其对象的含意不确切。例如我们无法判定 0.01 是不是一个“绝对值很小的数”。

(做练习 1·1 第 5 题)

(2) 集合元素的互异性

给定一个集合，其中的元素必须是互异的。就是说，集合中任何两个元素都必须是不同的对象；相同的对象归入一个集合时，只能归并为该集合的一个元素。

例如，方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = 1$ ，可是这个方程的实根的集合却只有一个元素“1”。

(做练习 1·1 第 6 题)

(3) 集合元素的无序性

在表述一个给定集合的元素时，不考虑元素的排列顺序。例如由元素 1, 2, 3 组成的集合，与由元素 3, 1, 2 组成的集合是同一个集合。

(作业：习题一 第 1 题)

3、有限集和无限集

含有有限个元素的集合叫做有限集。本节开始所举例子中的 (1), (2), (3), (4) 都是有限集。(为什么?) 而 (5), (6), (7) 则是无限集，因为它们所含的元素不是有限多个，而是无数个。

(做练习 1·1 第 7 题)

4、集合的表示法

表示集合的方法，常用列举法或描述法，有时也用图示法。

(1) 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号 $\{ \}$ 内以表示集合的方法，叫做列举法。

例 1 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的实根集合是 $\{1\}$ 。

例 2 不超过 10 的正偶数的集合是

$$\{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

当一个有限集的元素个数较多时，还能不能用列举法表示呢？当然可以。不过，要是仍然用逐一列举的形式就太繁琐了。例如前 32 个自然数的集合，共有 32 个元素，逐一列举实在是太长了，因此可以采用以下形式：

$$\{1, 2, 3, \dots, 32\}.$$

在上述简化的形式中，我们写出前 3 个数和最后 1 个数，中间的那些数用省略号“ $\dots$ ”代表。

在用简化形式列举法表示集合时，必须注意使别人能从已写出的部分推测出省略的那部分是什么。象上面的例子，如果把前 32 个自然数的集合写作 $\{1, 2, \dots, 32\}$ ，就不妥当了，因为 32 的正约数的集合 $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ 的前两个元素及最末一个元素恰好也是 1, 2 和 32。显然这个集合不是前 32 个自然数的集合。

用列举法表示集合时，元素排列的顺序可以任意，这在前面已经讲过。不过采用简化形式表示时，由于需要从已列举出的元素推测出省略了的元素，所以已列举的元素必须按一种既定的顺序排列。例如前 32 个自然数的集合若用简化形式写作 $\{1, 32, 2, \dots, 3\}$ ，谁也不会知道省略的究竟是哪些元素了。

列举法常用于有限集表示，不过有些无限集也可以用列举法表示，如

自然数集 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$;

整数集 $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 。

(做练习 1·1 第 8 题)

(2) 描述法

描述法也叫构造法，是在大括号 $\{ \}$ 内先写出元素的一般形式，再写出这些元素的共同属性，两者用一个竖线隔开。

例 3 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的实根的集合可以写作 $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 。

例 4 不等式 $x - 1 > 0$ 的解集可以写作 $\{x | x - 1 > 0\}$ 。

例 5 二次函数 $y = x^2 + 1$ 的图象上所有点的集合是 $\{(x, y) | y = x^2 + 1\}$ 。

有时也可以用集合元素的共同属性直接表示集合，如 $\{\text{自然数}\}$ ， $\{\text{三角形}\}$ 等。

当集合的元素的共同属性比较易于表达，而且没有必要或没有可能逐一列举各元素时，常用描述法表示集合。

(做练习 1·1 第 9 题)

(3) 图示法

这是一种用图形直观地表示集合的方法，就是把集合的元素用一条封闭的曲线（如圆、矩形等）围起来，这种图形称为“文氏图”。

例如方程 $x^2 - 1 = 0$ 的实根集合，既可以用描述法写作 $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ ，又可以用列举法写作 $\{-1, 1\}$ ，还可以用文氏图表示，如图 1-1。

图示法在学习集合的关系和运算知识时有助于我们的理解和运用。

(做练习 1·1 第 10 题)

(作业：习题一 第 2—4 题)

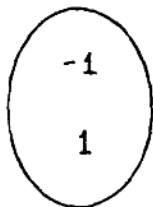


图 1-1

1·2 集合的包含与相等

1、集合的包含关系，子集

例 6 考察自然数集 N 和整数集 Z 。

由于任何一个自然数都是整数，因此集合 N 中的任何一个元素都是集合 Z 的元素。

一般说来，给定两个集合 A, B ，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，就称集合 A 是集合 B 的一个子集。记作

$$A \subseteq B \quad (\text{或 } B \supseteq A),$$

读作“ A 包含于 B ” (或“ B 包含 A ”)。

A 是 B 的子集，就是说“如果 $a \in A$ ，那么 $a \in B$ ”。

例 7 自然数集 N 、整数集 Z 、有理数集 Q 、实数集 R 之间有如下的包含关系：

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R.$$

例 8 设集合 $A = \{x | x > 1\}$ ，集合 $B = \{x | x > 0\}$ ，于是 $A \subseteq B$ (图 1-2)。

例 9 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ，集合 $B = \{2, 3, 4\}$ ，则集合 A 不是集合 B 的子集，因为 $1 \in A$ ，但 $1 \notin B$ 。