# 1 极限与连续

在中学里，我们已经学习过函数的基本概念，然而，随着知识的不断积累，以及我们对客观事物认识的深化，我们有必要对函数进行深一层的研究．本书就是围绕着这个宗旨展开的．首先，我们讨论对全书起决定作用的一个概念——函数极限．

## 1.1 两个实例

**例 1** 圆的面积

我国魏晋时期的数学家刘徽曾试图从圆内接正多边形出发来计算半径等于单位长度的圆的面积．他从圆内接正六边形开始，每次把边数加倍，直觉地意识到边数越多，内接正多边形的面积越接近于圆的面积．他曾正确地计算出圆内接正 3072 边形的面积，从而得到圆周率 $\pi$ 的十分精确的结果：$\pi \approx 3.1416$．他的算法用现代数学来表达，就是

$$A \approx 6 \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{6 \cdot 2^{n-1}},$$

其中 $A$ 为半径等于 $R$ 的圆面积，$6 \cdot 2^{n-1}$ 为按刘徽计算方法中正多边形的边数．

然而刘徽在其所著的“九章算术注”中曾说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．”这个结论却是不正确的．首先，按他的作法确实可以作出无穷多个正多边形，因此应该是永远地“可割”而非“不可割”；其次，无论边数如何增加，毕竟还是多边形，绝不会“与圆周合体而无所失矣”．究其原因，是在他那个时代还未找到克服“有限”与“无限”这对矛盾的工具．因此他只能设想最后总有一个边数很多的正多边形与圆

"合体",而把无限变化过程作为有限过程处理了.

**例2** 自由落体运动 $s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 在第2秒末的瞬时速度.

由于自由落体运动非匀速运动,速度是随时间而变化的.但可以设想在一个很短的时间间隔里,速度随时间的变化不大,因此可以用该时间间隔中的平均速度近似代替其中任一时间的瞬时速度.时间间隔越短,则近似程度越好,时间间隔无限变短而趋向于零时,则可以认为平均速度就无限接近于瞬时速度.根据以上的想法,我们得到求第2秒末的瞬时速度的步骤:首先求落体在时间间隔$[2,t]$内的平均速度

$$\begin{aligned}\bar{v}(t) &= \frac{s(t)-s(2)}{t-2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g\cdot 2^2}{t-2} \\ &= \frac{1}{2}g(t+2).\end{aligned}$$

其次,具体给 $t$ 以一批数值,根据上式算出 $\bar{v}(t)$ 的值列表如下:

| $t$ | 2.1 | 2.01 | 2.001 | 2.0001 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{v}(t)$ | $2.05g$ | $2.005g$ | $2.0005g$ | $2.00005g$ | … |

由表可以看出,$\bar{v}(2)$ 应该是 $2g$.

从上面的例子可以看到,圆的面积和瞬时速度都是客观存在的,但用中学知识是难以圆满地完成它们的计算工作.因此,就迫使我们不得不创造出一套完整的理论和方法来确定它们的真值.从1.2节开始,我们将逐步建立这套理论和方法.

## 1.2 函数极限的描述

### 1.2.1 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

由1.1的例2,我们直观上可以察觉到,当自变量 $x$ 趋向于某

一个值时，函数 $f(x)$ 的值趋向于某一个定值．这样的过程我们可以说成“$x$ 趋于 $x_0$ 时，$f(x)$ 无限接近于常数 $L$”，采用记法

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

符合化地表示这个意思．

我们来看一些简单而易于猜到结果的例子．

**例 1** 求 $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)$．

**解** 当 $x$ 趋于 1 时，$x+1$ 无限接近于 2，因此

$$\lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

**例 2** 求 $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-5)$．

**解** 当 $x$ 趋于 $-2$ 时，$x^2$ 无限接近于 4，于是 $x^2-5$ 无限接近于 $-1$，因此

$$\lim_{x\to -2}(x^2-5) = -1.$$

**例 3** 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$．

**解** 因为当 $x\neq 1$ 时，有

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1.$$

由例 1 得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

**例 4** 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$．

**解** 由于 $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}(x\neq 1)$，又 $x$ 趋近于 1 时，$\sqrt{x}$ 无限接近于 1，从而 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ 无限接近于 $\dfrac{1}{2}$，故

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

例 1 ～ 例 4 中所论函数见图 1.1 ～ 图 1.4．在每种场合，通过

将 $x$ 取得充分接近于 $x_0$ 而不等于 $x_0$，就可以使 $f(x)$ 与 $L$ 要多接近就有多接近．

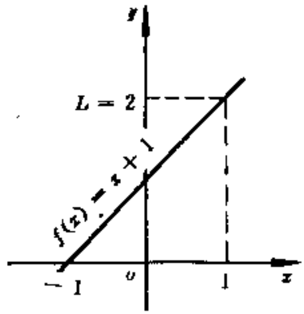


图 1.1

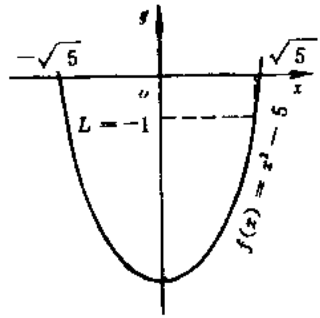


图 1.2

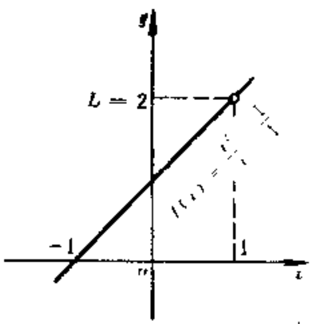


图 1.3

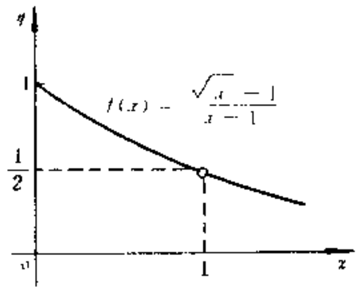


图 1.4

**例 5**　设 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{100}\cos x$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$．

**解**　因为当 $x$ 趋向于 0 时，$x^2$ 无限接近于 0，而 $\cos x$ 无限接近于 1，所以有

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2-\frac{1}{100}\cos x\right)=-\frac{1}{100}.$$

以后我们将这样定义上述过程，使得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的存在与否以及其值均与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有无定义无关．我们关心的只是当 $x$ 趋

于 $x_0$ 但异于 $x_0$ 时，$f(x)$ 的变化状态.

从上述各例中，我们看到有这样一个规律：当自变量趋向于某一个定数时，对应的因变量无限接近于某一个常数. 在给这个规律作一个抽象定义之前，我们再来考察一个例子.

**例 6** 讨论函数

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

当 $x$ 趋向于 0 时的变化趋势(见图 1.5).

**解** 注意到任何一个包含 0 的区间，不论其长度多么小(比如 $(-10^{-10}, 10^{-10})$) 在该区间内，函数总可取到值 $-1$、0 和 1. 因此当 $x$ 趋向于 0 时，$\operatorname{sgn}(x)$ 的值不趋向于任何一个确定的数.

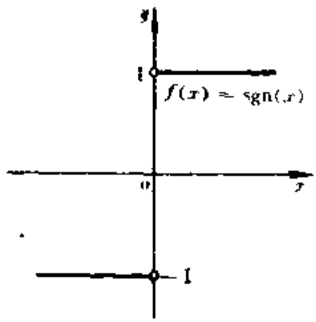

图 1.5

这个例子表明，它不具备前面五个例子的一个共同规律：当自变量趋向某一个定数时，对应的因变量无限接近于某一个常数.

这样就有必要对共同变化规律给以刻画. 为此，我们来看如何描述两个量的接近关系. 显然，用距离刻画接近关系是最自然的. 比方说，$|f(x) - L| < 1$ 表示函数值 $f(x)$ 与 $L$ 的距离小于 1，而 $|f(x) - L| < 10^{-10}$ 表示函数值 $f(x)$ 与 $L$ 的距离小于 $10^{-10}$，且后者的函数值相对于前者更接近于 $L$. 又如 $|x - x_0| < 0.5$ 表示数 $x$ 与数 $x_0$ 的距离小于 0.5，等等.

**定义 1** 称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 $x_0$ 的一个 $\delta$ 邻域(其中 $\delta > 0$)，记为 $N(x_0, \delta)$；而 $N(\hat{x}_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)/\{x_0\}$ 称为点 $x_0$ 的一个去心 $\delta$ 邻域.

有时在不致引起误解时，常用$N(x_0)$和$N(\hat{x}_0)$分别表示点$x_0$的一个邻域和$x_0$的一个去心邻域，而不指明正数$\delta$.

**定义 2** 设函数$f(x)$在$x_0$的邻域内有定义(在$x_0$处可以没有定义)，$L$为某一常数．如果对于任一正数$\varepsilon$，不管多么小，当$x$充分接近定数$x_0$但又异于$x_0$时，总有不等式

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

成立，则称函数$f(x)$当$x$趋向于$x_0$时有极限，且极限为$L$，记成

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{或} \quad f(x) \to L \ (x \to x_0).$$

这时也称函数$f(x)$在点$x_0$处极限存在，否则称函数$f(x)$在点$x_0$处极限不存在．

定义 2 也可以这样说：$L$为某常数，如果对于任一正数$\varepsilon$，总有某一个$N(\hat{x}_0)$，当$x \in N(\hat{x}_0)$时，有不等式

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

成立，则称函数$f(x)$当$x$趋向于$x_0$时有极限，且极限为$L$.

由定义 2，我们说例 1 至例 5 中函数在指定点处极限存在，而例 6 中函数在点 0 处极限不存在．

在图 1.6 中给出了函数$f(x)$在点$x_0$处的极限是$L$的几何解释．注意当$x$越接近于$x_0$时，$f(x)$就越接近于$L$. 在每种场合都能选择包含$x_0$的一个小邻域，使得对于该邻域内的一切$x(x \neq x_0)$，对应点$(x, f(x))$落在预先任意给定的以$y = L$为对称中心线的水平条形域中的曲线上．

我们再次强调，函数$f(x)$在$x_0$处有无定义，或者$f(x)$在$x_0$处取何值，与$f(x)$在$x_0$处有无极限是没有关系的．

由函数极限的定义容易得到下面两个结果：

(1) 若$f(x) = C$ ($C$为常数)，则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

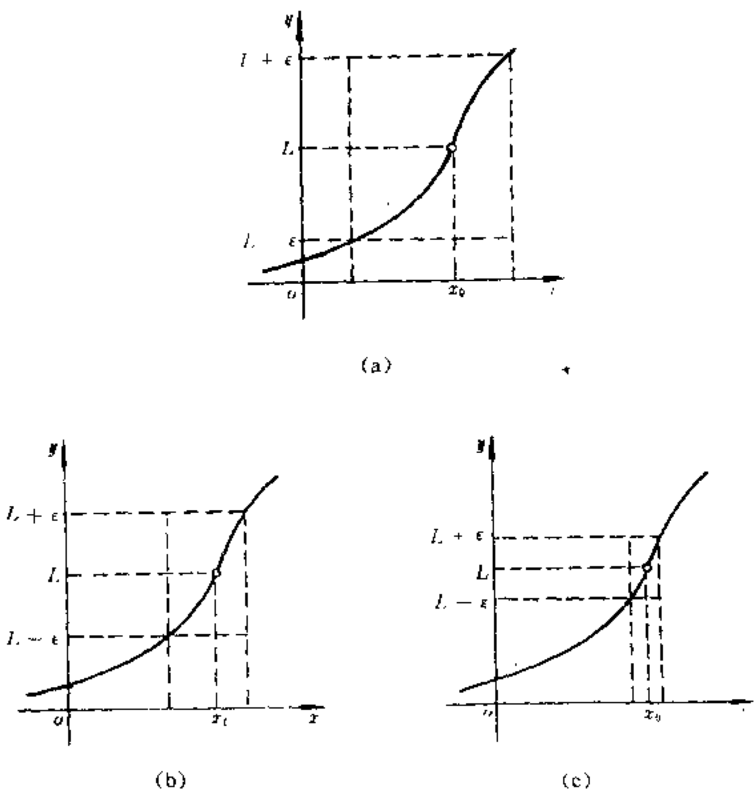


图 1.6

### 1.2.2 左极限与右极限

从例 1 至例 5 中可以看到：当 $x$ 从指定点 $x_0$ 的某一侧（$x < x_0$ 或者 $x > x_0$）趋向于指定点时，对应的函数值都无限接近于某一定数. 例 6 也有这样的共性.

**定义 3** 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0, c)$ 中有定义，$L$ 为一常数. 若对任意正数 $\varepsilon$，当 $x \in (x_0, c)$ 且充分接近于 $x_0$ 时，有

$$|f(x) - L| < \varepsilon,$$

则称 $L$ 为函数 $f(x)$ 当 $x$ 从右侧趋向于 $x_0$ 时的极限（或 $x$ 在 $x_0$ 处的

右极限)，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \text{ 或 } f(x_0+0) = L,$$

并说函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的右极限存在．否则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的右极限不存在．

由定义 3，显然有

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

类似地，可以定义函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的左极限

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \text{ 或 } f(x_0-0) = L.$$

请读者自己完成．

右极限和左极限统称为**单侧极限**，而通常的极限(由定义 2 确定)称为双侧极限．单侧极限与双侧极限有如下关系：

**定理 1**　设 $f(x)$ 在某一 $N(\hat{x}_0)$ 有定义，则极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

存在的充分必要条件为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L.$$

**证**　$\Rightarrow$ 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. 由定义 2 知，对任意 $\varepsilon > 0$，不论 $x$ 是从左侧还是从右侧充分接近于 $x_0$，都有

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

从而，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 都存在，且

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L.$$

$\Leftarrow$ 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$. 这意味着对任意 $\varepsilon > 0$，当 $x$ 从 $x_0$ 的左侧充分接近于 $x_0$ 时，有

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

而当 $x$ 从 $x_0$ 的右侧充分接近于 $x_0$ 时，也有

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

这表明当 $x$ 充分接近于 $x_0$ 时，有

$$|f(x)-L|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L.$$

根据定理 1,我们可以从另外一个角度来说明例 6 中函数当 $x$ 趋向于 0 时极限不存在. 因为显然有 $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=-1$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=1$. 由于两者彼此不等,故当 $x$ 趋向于 0 时,sgn$(x)$ 的极限不存在.

**例 7** 求函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ 2x, & x>0\end{cases}$$

在 $x=-1,0$ 处的极限.

**解** 因 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=x^2$,当 $x$ 趋向于 $-1$ 时,$x^2$ 无限接近于 1,故

$$\lim_{x\to -1}f(x)=1.$$

在 $x=0$ 的某一邻域 $N(0)$ 中,当 $x$ 从左侧趋向于 0 时,有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}x^2=0,$$

当 $x$ 从右侧趋向于 0 时,有

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}2x=0.$$

根据定理 1,得

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0.$$

**例 8** 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1,\\ x^2-5, & x<1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处的极限.

**解** 显然,

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2-5)=-4,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2.$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处极限不存在.

### 1.2.3 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

先来看一个简单的例子

**例 9** 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $|x|$ 无限变大时的变化趋势.

**解** 显然,当 $|x|$ 增大时,$\dfrac{1}{|x|}$ 减小;当 $|x|$ 无限增大时,$\dfrac{1}{|x|}$ 无限地接近于0. 这表明当 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 有一个固定的变化趋势:无限接近于 0. 为了刻划这种变化趋势,我们给出如下定义:

**定义 4** 设函数 $f(x)$ 在 $|x|>m(m>0)$ 时有定义,$L$ 为一定数. 若对任意 $\varepsilon>0$,当 $|x|$ 充分大时,有

$$|f(x)-L|<\varepsilon,$$

则称 $L$ 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L \text{ 或 } f(x)\to L(x\to\infty).$$

这时也称函数 $f(x)$ 在 $\infty$ 处的极限为 $L$.

**定义 5** 设 $f(x)$ 在 $x>m(m>0)$ 时有定义,$L$ 为定数. 若对任意 $\varepsilon>0$,当 $x$ 充分大时,有

$$|f(x)-L|<\varepsilon,$$

则称 $L$ 是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L \text{ 或 } f(x)\to L(x\to+\infty).$$

这时也称函数 $f(x)$ 在 $+\infty$ 处的极限为 $L$.

类似地可以定义

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=L \text{ 或 } f(x)\to L(x\to-\infty).$$

同样地,我们有

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L$$

的充分必要条件是

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

证明请读者自己去完成．

**例 10**　设 $a$ 为任一实数($a \neq 0$)，证明

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + a^2} - x) = 0.$$

**证**　因为 $x > 0$ 时，有

$$0 < \sqrt{x^2 + a^2} - x = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2} + x} \leqslant \frac{a^2}{x},$$

即

$$|(\sqrt{x^2 + a^2} - x) - 0| \leqslant \frac{a^2}{x}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$，当 $x$ 充分大时，有

$$\frac{a^2}{x} < \varepsilon,$$

从而有

$$|(\sqrt{x^2 + a^2} - x) - 0| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + a^2} - x) = 0.$$

### 1.2.4　$n \to \infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 的极限

由函数的定义和数列的定义可知，数列 $\{x_n\}$ 可以视为自变量 $n$ 取全体自然数时的函数

$$f(n) = x_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

1.1 节的例 1 中，$\{6 \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{6 \cdot 2^{n-1}}\}$ 就是一个数列．

既然数列 $\{x_n\}$ 是一个函数，它也会遇到极限问题．我们给出如下定义：

**定义 6**　设 $\{x_n\}$ 为一个数列，$L$ 为一定数．如果对任意 $\varepsilon > 0$，当 $n$ 充分大时，总有

$$|x_n - L| < \varepsilon,$$

则称 $L$ 为数列 $\{x_n\}$ 的极限．此时，称数列 $\{x_n\}$ **收敛**或极限存在，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \text{ 或 } x_n \to L \ (n\to\infty).$$

如果 $\{x_n\}$ 不存在极限，就称数列 $\{x_n\}$ 发散．

**例 11**　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

**证**　对任意 $\varepsilon > 0$，由于

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

而当 $n$ 充分大时，总有 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$，从而有

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

**例 12**　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} = \dfrac{3}{2}$.

**证**　对任意 $\varepsilon > 0$，由于

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{4\sqrt{n}-2}$$

$$\leqslant \frac{5}{4\sqrt{n}-2\sqrt{n}} < \frac{5}{\sqrt{n}},$$

而当 $n$ 充分大时，总有 $\dfrac{5}{\sqrt{n}} < \varepsilon$，从而有

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} = \frac{3}{2}.$$

**例 13**　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 1)$.

**证** 令 $h_n = \sqrt[n]{a} - 1$，则 $h_n > 0$. 于是

$$a = (1 + h_n)^n = 1 + C_n^1 h_n + C_n^2 h_n^2 + \cdots + C_n^n h_n^n > n h_n,$$

即

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}.$$

所以，对任意 $\varepsilon > 0$，当 $n$ 充分大时，总有

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

## 习 题 一

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 2, \\ -ax, & x < 2, \end{cases}$

(1) 求 $f(2+0), f(2-0)$；

(2) 当 $a$ 为何值时 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 存在？

2. 讨论下列函数在指定点处的单侧极限，并作出函数的图形：

(1) $f(x) = \dfrac{|x|}{2x}$，在 $x = 0$ 处；

(2) $f(x) = [x]$，在 $x = n$（$n$ 为整数）处；

(3) $f(x) = x - [x]$，在 $x = n$（$n$ 为整数）处；

(4) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -1, & x > 1, \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处.

3. (1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$；反之是否成立？请说明；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$；

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

4. 利用

$$(1+h)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k h^k=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n,$$

证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\ (a>1)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0\ (a>1)$.

## 1.3 函数极限定理

我们已经知道了几种变化过程的函数极限定义．现在我们将讨论有关函数极限的性质，极限存在与否的判别，以及若干有用的极限．鉴于极限的若干共性，为了叙述确定起见，我们仅就$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$的情形加以讨论，所得到的结果都可以转移到极限过程是$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$，$n\to\infty$中的任何一种．

### 1.3.1 函数极限的性质

首先，我们提出的问题是：如果当$x\to x_0$时函数$f(x)$极限存在，那么其极限值是否唯一？关于这个问题，我们有以下结论：

**定理 1** （**极限唯一性定理**）若函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在，则极限值唯一．

**证** 假设当$x\to x_0$时，$f(x)$的极限为$L$和$M$，则对任意$\varepsilon>0$，当$x$充分接近于$x_0$时，有

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

和

$$|f(x)-M|<\varepsilon$$

同时成立．从而

$$\begin{aligned}|L-M|&=|L-f(x)+f(x)-M|\\&\leqslant|f(x)-L|+|f(x)-M|<2\varepsilon.\end{aligned}$$

由$\varepsilon$的任意性，上述不等式只有当$L=M$时方可成立，故知极

限值唯一.

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$,则由定义,对任意$\varepsilon > 0$,当$x$充分接近于$x_0$时,有

$$|f(x) - L| < \varepsilon,$$

即

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

于是,我们就得到:

**定理 2** (**局部有界性定理**)若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$,则在$x_0$的某一个去心邻域$N(\hat{x}_0)$内,函数$f(x)$有界.

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$,而$L > 0$,若取$\varepsilon = \frac{L}{2}$,则当$x$充分接近于$x_0$时,有

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2},$$

即

$$\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}.$$

从而当$x$充分接近于$x_0$时,有

$$f(x) > 0.$$

于是,我们就得到:

**定理 3** (**局部保号性定理**)若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L > 0$,则在$x_0$的某一个去心邻域$N(\hat{x}_0)$内,$f(x) > 0$.

注意:定理2和定理3中提到的某个邻域到底有多大,目前我们并不感兴趣,只要它存在即可.

由定理3可得下面两个推论:

**推论 1** 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,且$A < B$,则在$x_0$的某一个去心邻域$N(\hat{x}_0)$内,$f(x) < g(x)$.

**推论 2** 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,且在$x_0$的某一个去心邻

域 $N(\hat{x}_0)$ 内，有 $f(x) \leqslant g(x)$，则 $A \leqslant B$.

这两个推论的证明由读者完成.

### 1.3.2 函数极限存在的判别法

以上我们讨论了函数极限的基本性质，那都是在函数极限存在的前提下所具有的. 但是关于函数在某一变化过程中极限是否存在的问题还有待进一步研究.

下面给出极限存在的两种判别法.

**定理 4** 若在 $N(\hat{x}_0)$ 内 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

**证** 因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$，所以对任意 $\varepsilon > 0$，当 $x$ 充分接近于 $x_0$ 时，有

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad 和 \quad |h(x) - L| < \varepsilon.$$

又在 $N(\hat{x}_0)$ 中有

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x),$$

所以当 $x \in N(\hat{x}_0)$ 且充分接近于 $x_0$ 时，有

$$L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon,$$

即

$$|g(x) - L| < \varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

此定理中，函数 $g(x)$ 在 $N(\hat{x}_0)$ 内夹于 $f(x)$ 和 $h(x)$ 之间，且当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时，$f(x)$ 和 $h(x)$ 同时趋于 $L$，从而导致 $g(x)$ 此时也无限接近于 $L$. 因此，此定理也称为函数极限的夹逼定理.

**例 1** 证明 (1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$；　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

**证** 如图 1.7，作单位圆，由图中的一些相应线段可得

$$0 \leqslant \sin x = |BD| \leqslant |AD| \leqslant x \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

因为

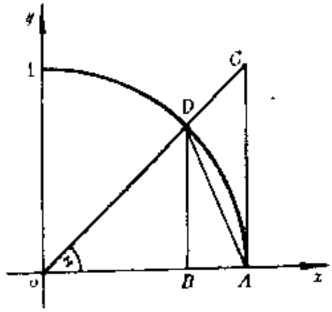


图 1.7

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

从而

$$-x \leqslant -\sin x \leqslant 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}),$$

所以

$$0 \geqslant \sin x \geqslant x \quad (-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0).$$

因此有

$$0 \leqslant |\sin x| \leqslant |x| \quad (|x| \leqslant \frac{\pi}{2}).$$

由夹逼定理得$\lim\limits_{x\to 0}|\sin x| = 0$. 又由习题一 3(3) 知$\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$,(1) 得证.

因为

$$0 \leqslant 1 - \cos x = |AB| \leqslant x \quad (0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}).$$

而

$$\cos(-x) = \cos x,$$

于是

$$0 \leqslant |1 - \cos x| \leqslant |x| \quad (|x| \leqslant \frac{\pi}{2}).$$

故$\lim\limits_{x\to 0}|1 - \cos x| = 0$. 从而由定义可得$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$,(2) 得证.