自动控制系统
的状态空间方法

王子平
曾乐生　刘兴良

国防工业出版社

自动控制系统的状态空间方法
王 子 平 主 编
国 防 工 业 出 版 社 出 版
北京市书刊出版业营业许可证出字第074号
北京工业学院印刷厂印刷
* * *
22.4 印张 544 千字
1980年10月第一版 1980年10月第一次印刷 印数 1—800册
统一书号：N15034（五教006） 定价：2.62元

序　言

状态空间方法是现代控制理论的基础，它是从古典动力学中的广义坐标、多维相空间等概念引伸发展而来。正是由于有了这种状态空间方法，同时还由于数字计算机（作为一种非常有效的计算工具和控制手段）的广泛应用，以及航天技术，生产过程自动化，城市交通的控制，经济计划管理等各个领域发展的实际需要，从而使得控制理论在近二十多年有了突飞猛进的发展。例如李亚普诺夫（Ляпунов）的稳定性理论，贝尔曼（Bellman），庞德里雅金（Понтрягин）等人的最优控制理论以及卡尔曼（Kalman）等人的过滤理论等，无一不是在状态空间方法的基础上发展起来的。

状态空间方法是一种时间域的方法，它与古典控制理论的频率域方法相比，具有许多优点（详见本书§1.4）。

我们知道数字计算机已进入了小型化多功能化阶段，它愈来愈广泛地应用到工业，农业、国防以及科学技术的各个领域。这就极大地提高了这些领域的自动化水平和自动化程度。但由于数字计算机的引入以及受控对象的复杂，使得自动控制系统的结构愈来愈复杂，对系统性能指标的要求也愈来愈高。对于这类系统的分析与设计，频率法往往是无能为力，而只能求助于状态空间方法。因此掌握状态空间方法已经成为当前从事自动控制技术的专业人员所必须的专业基础知识。

作者在编写本书时，力求从工程应用角度出发，着重于理论的应用。对于书中的某些定理的论证，沒有过多地追求数学上的严密性（当然，为了掌握好某些理论，必要的数学方法也是不可忽视的）。此外为了精简篇幅，个别定理的证明从略，但提供了必要的参考书目。

编写本书的起点是假设读者已经学过线性代数，微分方程与古典控制理论。本书可作为大学高年级学生或研究生的教材，也可作为控制专业教师以及有关的科研人员、工程技术人员的参考书。

为了便于读者阅读与掌握本书的基本内容，在附录中还给出了书中常用的一些数学概念和数学公式，以便随时查阅。

本书的第一章至第八章及附录由王子平编写，第九章由曾乐生编写，第十章由刘兴良编写，全书由王子平定稿，并由肖春林同志审阅。由于我们的水平有限，编写时间仓促，错误和不妥之处在所难免，希望读者及专家们批评指正。

编者

1980.3. 于北京

目　　录

第一章 导　论

§1.1　现代控制理论的基础—状态空间法

研究控制系统的状态空间方法，是现代控制理论的起点和基础。状态空间的概念是从古典动力学中的广义坐标、多维相空间的概念引伸而来。用状态这种概念来描述一个控制系统的动力学特性，首先是在三十年代由 Turing, A. M. 提出来的，而后 Shannon, C. E. 在他的信息论中就应用了这一概念。但是把状态空间这种概念广泛地应用到自动控制系统领域中来，是在四十年代由 Aizerman, Пяпунов, 以及 Bellman 等人开始的。他们把状态空间方法具体应用到了系统的稳定性分析以及最优控制。之后，又有不少人在这方面进行了大量的工作，其中特别是 Kalman, R. E. 起了主要的作用[20,21]。

下面先简单地介绍一下什么是控制系统的状态空间。

为了便于对控制系统进行分析和综合，在现代控制理论中，常常把表征系统及与系统有连系的一些变量区分为以下三类：

1． 输入变量（也叫激励变量）u_1，u_2，…，u_r。这些变量作为一种外部作用，控制着或影响着系统的运动。

2． 输出变量（也叫响应变量或量测变量）y_1，y_2，…，y_m 这些变量代表系统可量测的输出响应。

3． 内部变量（也叫状态变量）x_1，x_2，…，x_n 用来表征系统的动态性能。一个由n阶微分方程（或差分方程）所描述的系统则有 n 个状态变量。

如果用一个方框来代表系统本身，则上述三种变量之间的关系可用图 1.1－1 表示。

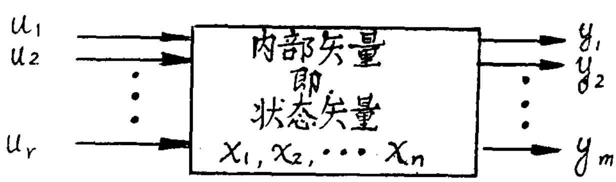

图 1.1—1

图中 u_1，u_2，…；u_r；x_1，x_2，…，x_n 以及 y_1，y_2，…，y_m 都是时间 t 的函数，可以分别用 $u_i(t)$，$x_j(t)$和 $y_k(t)$表示在时刻 t 的 u_i，x_j 和 y_k 的值。

为了描述方便起见，这三种变量可以改用矢量形式来表示，即

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_r\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}.$$

显然，从矢量空间概念①的角度来看，我们可以认为所有的输入变量 u_1，u_2，…，u_r构成了系统的一个 r 维的输入空间，输出变量 y_1，y_2，…，y_m 构成了系统的一个 m 维 的输出空间。同理，状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 也就构成了系统的一个 n 维状态空间。

我们把矢量 $\mathbf{x}(t)=[x_1(t)x_2(t)\cdots x_n(t)]^T$ 叫做系统在时刻 $t\geqslant t_0$ 的状态或状态 矢 量。把 $\mathbf{x}(t_0)=[x_1(t_0)x_2(t_0)\cdots x_n(t_0)]^T$ 叫做系统的初始状态。其中 t_0 为初始时间。显然，系统在任一时刻 t 的状态(或状态矢量)$\mathbf{x}(t)$是由状态空间中沿各坐标轴的分量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, …，$x_n(t)$所构成的。随着时间 t 的变化，状态矢量 $\mathbf{x}(t)$ 的端点在状态空间里将描绘出一条表征系统运动状态的轨跡。

还可以看出，在任何时刻 t 系统的状态 $\mathbf{x}(t)$应该是初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 和输入矢量 $\mathbf{u}(t_0, t)$的函数，即

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{u}(t_0,\ t)] \tag{1.1-1}$$

同样，在任意时刻的输出矢量 $\mathbf{y}(t)$也应该是初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$和输入矢量 $\mathbf{u}(t_0, t)$的函数，即

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{G}[\mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{u}(t_0,\ t)] \tag{1.1-2}$$

式中 F，G 都是自变量的单值函数。

对于由微分方程所描述的系统即连续系统，式(1.1－1)及(1.1－2)取下面的一般形式：

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t] \tag{1.1-3}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{g}[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t] \tag{1.1-4}$$

式（1.1－3）称为系统的状态方程，式（1.1－4）称为系统的输 出 方 程 或 量 测 方 程。式（1.1－3），（1.1－4）统称为系统的状态空间表达式。

由差分方程描述的系统（即离散系统），其状态空间表达式取下面的一般形式：

$$\mathbf{x}(t_{k+1})=\mathbf{f}[\mathbf{x}(t_k),\ \mathbf{u}(t_k),\ t_k] \tag{1.1-5}$$

$$\mathbf{y}(t_k)=\mathbf{g}[\mathbf{x}(t_k),\ \mathbf{u}(t_k),\ t_k] \tag{1.1-6}$$

象这种从状态空间概念出发，用上述空间表达式来描述一个动力学系统，并以此为基础，研究在一定条件下系统状态的变化过程和规律的方法，即称为状态空间法。这是一种在时间域直接对系统进行分析研究的方法。现代控制理论正是在这种方法的基础上逐步发展起来的。从计算的角度看这种方法特别适合于利用数字计算机，这是状态空间法的一个显著优点。

注：① 关于矢量空间的概念请参看本书附录 I。

§1.2 古典力学中广义坐标的简单介绍

上面谈到的状态空间概念，是从古典动力学中的广义坐标及相空间概念引伸而来。

在质点动力学中，有一个由 n 个质点组成的质点群：$r_1(x_1,y_1,z_1)$，$r_2(x_2,y_2,z_2)$，…，$r_n(x_n,y_n,z_n)$。如果此质点群不受任何约束条件，那么变量 x_1，y_1，z_1，x_2，y_2，z_2，…，x_n，y_n，z_n 就形成了共 3n 个互无关联的独立变量。这时质点群中的每个质点可以取任意的位置。如果此质点群受有 S 个约束条件[8]，并假设约束方程为

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n)=0\\
&f_2(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n)=0\\
&\vdots\\
&f_s(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n)=0
\end{aligned}
\qquad (1.2-1)
$$

这时，这个质点群就叫质点系，系内各质点的位置将受到这 s 个约束条件的某种制约。这就是说独立变量不再是 3n 个，而只有$(3n-s)=k$ 个了。只有这 k 个独立变量可以任意取值，而其余的 s 个变量变成了这 k 个独立变量的函数。由约束方程来决定。

在这种情况下，为了便于决定此质点系内各质点的位置，在古典动力学中采用的就是广义座标的方法。所谓质点系的广义座标，就是"用来决定该系位置的彼此独立的参变量，而这些参变量可以用来决定系内所有质点的坐标"[8]。例如我们以 q_1，q_2，…，q_k 表示广义坐标，那么质点系内每个质点 $r_i(x_i, y_i, z_i)$的坐标，可表示为参变量 $q_1,\cdots q_k$ 的函数，即

$$
\begin{aligned}
&x_i=\phi_{1i}(q_1, q_2, \cdots, q_k)\\
&y_i=\phi_{2i}(q_1, q_2, \cdots, q_k) \quad i=1, 2, \cdots, n\\
&z_i=\phi_{3i}(q_1, q_2, \cdots, q_k)
\end{aligned}
\qquad (1.2-2)
$$

如果从这 3n 个方程中，消去参变量 q_1，q_2，…，q_k，即可得到坐标 x_i，y_i，z_i 之间的 $s=(3n-k)$个约束方程（1.2－1）。

具有 k 个独立变量的质点系，在力学中称该系具有 k 个自由度。

系统运动的拉格朗日方程就是以 q_1，q_2，…，q_k 为广义坐标的微分方程。现在以不受任何外力作用的保守系统为例，其运动方程是

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \quad i=1, 2, \cdots, k \qquad (1.2-3)
$$

式中 $L=T-V$，$T=$动能，$V=$位能，$q_i=$广义坐标。

因为 $L=L(q_i, \dot{q}_i)$，$i=1, 2, \cdots k$。所以式（1.2－3）含有 k 个二阶常微分方程。汉

密尔顿曾指出，为了进一步简化此方程，可以引入一组新坐标 p_i，并定义① $p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$，$i=1, 2, \cdots, k$，和 $H=T+V$，则上述运动方程进一行简化为

$$\begin{aligned}\dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i=1, 2, \cdots, k\end{aligned} \tag{1.2-4}$$

式（1.2－4）称为汉密尔顿运动方程，共包含 2k 个一阶微分方程。式中的 H 叫汉密尔顿函数。

由此我们可以看出，一个具有 k 个自由度的系统，如果以 q_1，q_2，…，q_k 和 p_1，p_2，…，p_k 为坐标，那么本来是 k 个二阶方程就可以简化成 2k 个一阶方程。在古典力学中，以 q_1，q_2，…，q_k，p_1，p_2，…，p_k 为坐标的 2k 维空间称为 2k 维相空间。因此对于一个自由度的系统，相空间就是二维。对于两个自由度的系统，相空间就是四维，余此类推。

值得注意的是，上述古典力学中的自由度的概念，以及与相空间维数的关系均不能直接应用于控制系统，但是控制系统中所说的状态空间概念正是由上述相空间概念引伸而来，控制系统的 k 维空间就是指的 k 维状态空间。

§1.3 状态、状态变量和状态方程

本节将首先对系统的状态，状态变量分别下一个确切的定义，然后再讨论它们应具有的一些基本性质，以及有关状态变量的正确选择问题。

状态 一个动力学系统的状态（用矢量 $\mathbf{x}$ 表示），就是由系统中最少数目的一组变量（x_1，x_2，…，x_n）组成的变量集，即 $\mathbf{x}=[x_1 x_2 \cdots x_n]^T$。只要知道了这个变量集在 t_0 时刻的值 $\mathbf{x}(t_0)=[x_1(t_0)x_2(t_0)\cdots x_n(t_0)]^T$ 和给定的输入 $\mathbf{u}(t_0, t)$，$t\geqslant t_0$，就可以完全确定系统在任何时间 t 的运动状况。而系统在时间 t 的运动状况，从状态空间的观点来看，也就是系统在时间 t 的状态 $\mathbf{x}(t)$，故可表示为

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}=\mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)]$$

此表达式正是前面的式（1.1－1），可以看出系统在任意时间 t 的状态 $\mathbf{x}(t)$ 是唯一地决定

注①：p_i 是动量量纲，所以叫广义动量坐标

于初始状态 $x(t_0)$ 和输入 $u(t_0, t)$，与 t_0 以前系统的状态和 t_0 以前系统的输入无关。

状态变量　一个动力学系统的状态变量，就是指的上述变量集中的各个分量 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$，它们是从系统内部的一些变量中所选定的。状态变量必须满足以下条件：

在 $t=t_0$ 时，$x_1(t_0)$，$x_2(t_0)$，…，$x_n(t_0)$ 必须都是确定的；并且与给定的 $u(t_0, t)$ 一起可以完全确定系统在任意时间 t 的状态 $x(t)$。

这就是说，只有当选定的状态变量满足以上条件时，式（1.1－1），（1.1－2）以及式（1.1－3）～（1.1－6）才能有效地表征系统的动力学特性。

状态方程　从状态空间概念出发，把描述系统的一个 n 阶微分方程（或 n 阶差分方程）通过正确地确定状态变量，即可以变为 n 个一阶微分方程（或 n 个一阶差分方程），然后再用矢量矩阵方程的形式表达之，这个矩阵微分方程（或矩阵差分方程）就称为系统的状态方程（如式（1.1－3）和式(1.1－5)）。相应的输出方程也是矢量矩阵方程（如式（1.1－4）和式（1.1－6））。

如果上述的 n 阶微分方程是线性微分方程时，则式（1.1－3）和（1.1－4）可简化为

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \tag{1.3-1}$$

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t) \tag{1.3-2}$$

式中系数矩阵 $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$ 及 $D(t)$ 的诸元素都是 t 的连续函数。

如果是线性常微分方程时，可进一步简化为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{1.3-3}$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \tag{1.3-4}$$

如果上述的 n 阶差分方程是线性差分方程时，则式（1.1－5）和（1.1－6）可简化为

$$x(t_{k+1})=A(t_k)x(t_k)+B(t_k)u(t_k) \tag{1.3-5}$$

$$y(t_k)=C(t_k)x(t_k)+D(t_k)u(t_k) \tag{1.3-6}$$

如果是线性常差分方程时，可进一步简化为

$$x(t_{k+1})=Ax(t_k)+Bu(t_k) \tag{1.3-7}$$

$$y(t_k)=Cx(t_k)+Du(t_k) \tag{1.3-8}$$

如果上述 n 阶系统，具有 r 个输入和 m 个输出时，则在式（1.3－1）～（1.3－8）的各式中：$x=n$ 维矢量，$u=r$ 维矢量，$y=m$ 维矢量，$A=nxn$ 阶矩阵，$B=nxr$ 阶矩阵，$C=mxn$ 阶矩阵，$D=mxr$ 阶矩阵，$k=0, 1, 2, \cdots$。

由于以上各式均采用的是矢量矩阵形式，这就极大地简化了系统的数学表达式，而且极便于利用数字计算机进行运算。

状态唯一性和输出唯一性　假设式（1.1－1）和式（1.1－2）是通过正确的确定状态变量后所得到的。我们重新写在下面：

$$x(t)=F[x(t_0),\ u(t_0,\ t)] \qquad (1.1-1)$$

$$y(t)=G[x(t_0),\ u(t_0,\ t)] \qquad (1.1-2)$$

如果在 t_0 和 t 的时区内，取任一时刻 t_1，即 $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t$，那么仿照式(1.1－1)，可以得到下式

$$x(t_1)=F[x(t_0),\ u(t_0,\ t_1)] \qquad (1.3-9)$$

当 t_1 趋于 t 时，式（1.3－9）就变为式（1.1－1）。显然式（1.3－9）是正确的。再根据式（1.1－2）可以得到式（1.3－10），即

$$\begin{aligned}y(t)&=G[x(t_0),\ u(t_0,\ t)]\\&=G[x(t_1),\ u(t_1,\ t)]\end{aligned} \qquad (1.3-10)$$

式中 $x(t_1)$ 如式（1.3－9）所示。同理，根据式（1.1－1）和式（1.3－9）可以得到式（1.3－11），即

$$\begin{aligned}x(t)&=F[x(t_0),\ u(t_0,\ t)]\\&=F[x(t_1),\ u(t_1,\ t)]\end{aligned} \qquad (1.3-11)$$

式（1.3－10）和式（1.3－11）分别说明：当系统的初始状态为 $x(t_0)$ 输入为 $u(t_0,\ t)$ 和初始状态为 $x(t_1)$，输入为 $u(t_1, t)$ 都可以导致相同的系统输出 $y(t)$ 和相同的系统状态 $x(t)$。因此式（1.3－10）和式（1.3－11）分别称为系统的输出唯一性和系统的状态唯一性。这是用状态空间法时，对系统的正确描述方程所应具有的两个基本性质，是应该得到保证的。为此，这就要求状态方程式（1.3－1），（1.3－3）等在输入 $u=0$ 或 $u=u(t)$ 是已知的连续函数时①，必须保证在给定的初始条件下解的存在性，唯一性和连续性，因为这是正确描述一切动力学系统所应具有的数学基础。

因此在选择状态变量和列写状态方程时，应对列写的状态方程（如式（1.3－1））有一定的要求：$A(t)$ 和 $B(t)$ 的诸元都必须是 t 的单值连续函数；必须是标准的一阶矢量矩阵微分方程的形式，式的右边不允许出现 $x(t)$ 和 $u(t)$ 的导数项。因为在工程实践中，输入 $u(t)$ 有可能出现有限的间断现象(例如在 $t=t_1$ 处)，可以设想如果状态方程右则有 $u(t)$ 的导数项出现，那么在 $t=t_1$ 处，$\dot{u}(t)$ 就会导致单位脉冲函数的产生，$\ddot{u}(t)$，$\dddot{u}(t)$ 等就会导致脉冲函数的高阶导数，这就会使得 $x(t)$ 在 t_1 处出现突变。甚至是无穷大的突变。这就破坏了解 $x(t)$ 的连续性和唯一性。如果出现这种现象，就说明所选的一组变量，不能作为状态变量，必须重新选择。状态变量的具体选择方法在以后诸章中再详细讨论。

应当指出，系统的输出变量往往是可观测的变量。而状态变量并不一定都是可观测的。

〈例 1.3－1〉 有－R－L－C 回路其方程式是

$$u(t)=Ri(t)+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int i\,dt \qquad (1.3-12)$$

注①：在工程实践中，$u(t)$ 可能含有有限的间断现象、这可以用(例 3.5—2)的方法解决。

试求其状态空间表达式。

〈解〉 如果选择电流 $i(t)$ 和电荷 $Q(t)$ 作为系统的状态变量；即

$$x_1(t)=i(t),\quad x_2(t)=Q(t)=\int i\,dt \tag{1.3-13}$$

代入式（1.3－12），得

$$u(t)=Rx_1(t)+L\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{1}{C}x_2(t) \tag{1.3-14}$$

从式（1.3－13）及（1.3－14）即可得到

$$\dot{x}_1(t)=-\frac{R}{L}x_1(t)-\frac{1}{LC}x_2(t)+\frac{1}{L}u(t) \tag{1.3-15}$$

$$\dot{x}_2(t)=x_1(t) \tag{1.3-16}$$

将式（1.3－15）及（1.3－16）写成矢量矩阵形式：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{LC}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{pmatrix}u(t)\\ &=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}u(t)\end{aligned} \tag{1.3-17}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{LC}\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{pmatrix}$$

式（1.3－17）即系统状态方程。设输出变量为电容 C 两端的端电压，则系统的输出方程为

$$\begin{aligned}y(t)&=\frac{1}{C}x_2(t)\\ &=\left[0\quad \frac{1}{C}\right]\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\\ &=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{1.3-18}$$

式（1.3－17）及（1.3－18）即系统的状态空间表达式。

式（1.3－17）的解为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau\\ &=\mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0),\ u(t_0,\ t)]\end{aligned} \tag{1.3-19}$$

显然，如果初始条件 $x_1(t_0)=i(t_0)$，$x_2(t_0)=Q(t_0)$ 已知，$u(t_0, t)$ 已知，则根据式（1.3－19）即可求得任意时间 $t \geqslant t_0$ 的 $\mathbf{x}(t)$。

需要指出，状态变量的选择并不是唯一的，是凡满足前述条件的变量都可以作为状态变量，以〈例 1.3－1〉来说，我们还可以选 $x_1(t)=i(t)$，$x_2(t)=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$；或者选 $x_1(t)=\phi(t)$（电感器的磁通），$x_2(t)=Q(t)$ 都可以列写出相应的状态方程。由于状态变量选择得不同，系数矩阵 **A**，**B**，**C**，**D** 会相应的发生变化，但所得到的状态方程同样是有效的。

§1.4 古典控制理论与现代控制理论的简单对比

1. 关于古典控制理论

主要适用于单输入单输出系统。特别是对于单输入单输出的线性定常系统更是行之有效的。可以借助于开环频率的响应来求取闭环系统的频率响应；可以通过系统的零、极点的分布来研究系统的稳定性和动态性能；还可以引入简单的超前或滞后校正装置来改善系统的性能；由于古典理论是一种频率域的方法，所以对于考虑高频噪音的抑制要比状态空间方法方便，此外对于复杂的系统，可以直接通过测试的办法以获取系统的频率响应；古典控制理论在概念上比较简单，计算的工作量不算太大，在工程上形成了一套成熟的分析和综合方法。

古典控制理论的主要缺点是对于复杂的多输入多输出系统，复杂的时变系统，复杂的非线性系统以及最优控制系统等就不太适用了。

2. 关于现代控制理论

现代控制理论是以状态空间方法为基础的，是一种时域方法。从概念上和方法上比较直观，无需在时域频率域之间互相转换；输入函数不象古典控制理论那样只局限于几种典型函数（如阶跃函数，脉冲函数，正弦函数等）可以是更为一般的输入函数，以适应最优控制；这种方法较之古典方法更便于了解系统的內在情况，便于了解系统内部变量与外部变量（输入变量与输出变量）之间的关系，而传递函数的办法只反映输入与输出之间的关系；更主要的是用状态空间方法可以更完整地描述系统的动力学特性，而用传递函数的方法有时就可能失去系统的部分动力学特性；由于系统方程的描述采用了矢量矩阵的形式，所以得到了极大的简化，而且便于充分发挥数字机的作用。这种方法不仅可以用于单输入－单输出系统。而且还可以用来处理复杂的多输入－多输出系统、非线性系统以及时变系统，特别是适于最优控制系统的分析和设计。

当然并不是说现代控制理论已达到了十全十美的地步，更不能说古典控制理论已经过时可以弃而不用了。前者在很多方面还有待于进一步发展和完善，而后者对于较简单的系统依然是有它的用武之地，而且在实践中也必将得到进一步的发展。

第二章　信号流图

§2.1 导　言

信号流图[28, 29]（简称流图）是 1953 年由 S. J .梅逊（Mason）提出来的。它象框图一样是用来描述系统的一种图解方法。但是信号流图与框图相比却有不少突出的优点，因此信号流图的应用日趋广泛。信号流图特别适用于复杂的多回路系统、多变量系统。此外信号流图不仅便于表达系统外部变量（输入变量、输出变量）与系统性能之间的关系，而且便于揭示内部变量（或中间变量）与系统性能之间的关系。这一特点与近代控制理论中的状态方程有着本质的连系。因此在近代控制理论的研究中，信号流图是一种很有用的方法。

§2.2 什么是信号流图

假设有一个具有下述形式的线性代数方程组：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= hx_2 + gx_3 \\ x_2 &= fx_3 + ex_5 \\ x_3 &= dx_4 \\ x_4 &= cx_2 + bx_4 + ax_5 \\ x_5 &= x_5 \end{aligned}\right\} \quad (2.2-1)$$

式中 x_1，$x_2\cdots$，x_5 为变量，a，b，…，h 为变量之间的传输比。为了比较形象地来表达式（2.2－1），我们可以用一种特殊结构形式的网络图来表示（如图 2.2－1）：

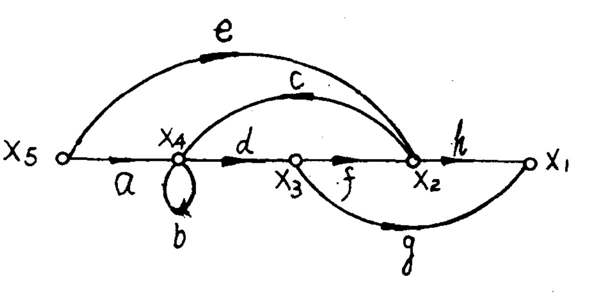

图 2.2—1

图 2.2－1 称为式（2.2－1）的信号流图。仔细观察此图，可以看出变量 x_1，x_2，…，x_5 是以小圆圈形式的节点来表示的，变量之间的传输比 a，b，…，h 是以一些带有箭头的定向连线来表示的。箭头所指的方向即信号传输的方向。两个变量之间的传输比即注在箭头的旁边。

如果式(2.2－1)是某一常参量线性系统的数学表达式时，那么从图 2.2－1 还可以清楚地看出 x_5 即系统的输入变量（即输入信号），x_1 即系统的输出变量(即输出信号)。而 x_2，x_3 和x_4 即系统的中间变量（也叫内部变量，内部信号）。因此通过这种形式的信号流图，可以把一个比较抽象的数学表达式用一个形象化的图形来代替，可以清楚地看出在整个系统中，信号是怎么传输变化的。

式(2.2－1)形式的代数方程式组，我们可以用一个更一般化的形式来表示：

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} G_{ij} x_j, \quad i=1, 2, \cdots n \tag{2.2-2}$$

式中 x_i，x_j 为系统方程中的变量，G_{ij} 是变量 x_i 和 x_j 之间的传输比。

因此，我们只要把描述系统的数学表达式变换成式(2.2－1)的形式，我们就可以按一定的规则把相应的信号流图画出来，供我们对系统进行分析或综合时用。

§2.3 名 词 介 绍

在进一步论讨信号流图以前，有必要先介绍一些有关的名词和术语。

1． 支路：是连接两个节点（变量）之间的定向线段，用来表示两个节点（变量）之间的信号传输关系。支路传输，也叫支路增益，即该支路所连接变量之间的传输比，即 $G_{ij}=\frac{x_i}{x_j}$。支路尚可分为输出支路和输入支路。例如支路 a 对节点 x_5 而言即称为输出支路（参阅图 2.1－1），支路 a 对节点 x_4 而言则称为输入支路。而支路 b 对节点 x_4 而言则兼有输出支路和输入支路的双重作用。

2． 节点：在图中表示变量（信号）的点称为节点。节点又可分为：

源节点：简称源点。在图中只有输出支路的节点，称为源节点。源点代表系统的输入信号（输入变量）如 x_5。

终节点。简称终点。在图中只有输入支路的节点称为终节点。终点代表系统的输出信号（输出变量），如 x_1。

中间节点：也叫内部节点。在图中既有输出支路又有输入支路的节点称为中间节点。中间节点代表系统内部变量。如 x_2，x_3，x_4。

3． 通路：从某一节点 x_i 起，沿信号传输方向，连续地经过一个或几个支路。而终止在另一节点 x_j 上，所经过的这个或几个支路即构成节点 x_i 与 x_j 间的一个通路。例如在 x_4 与 x_1 之间（图 2.2－1），就有 2 个通路，一个是 dfh，另一个是 dg。

通路传输：也叫通路增益，即整个通路中各支路传输的乘积。如例在 x_4 与 x_1 之间，通路 dfh 的传输为 d·f·h，也可简写为 dfh。通路 dg 的传输为 d·g，也可简写为 dg。

前向通路：对于起于源点，止于终点的通路，当其中的每个节点只通过一次时，这个通路即称为前向通路。例如 eh、ecdg、adg 和 adfh 都是前向通路。

反馈通路：也叫反馈回路，即起始于某一节点，而又终止于同一节点的通路。如dfc，b等都是反馈回路。b又叫自回路。

不接触回路和接触回路：两个或两个以上的回路，彼此之间不含有共同支路和共同节点时，称为不接触回路。否则称为接触回路。在图2.3－1所示的信号流图中，反馈回路bi，dj，fk互相称为不接触回路。反馈回路bcdefgl与回路bi，与回路dj，与回路fk称为相接触回路。

从以上简单的介绍可以看出：

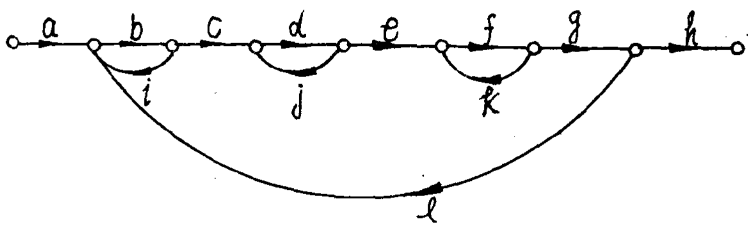

图 2.3—1

1. 一个信号流图与其对应的方程组包含着同样的一些信息，是该方程的一种图形表达形式。

2. 一个信号流图就是一个很直观的信号传输系统。其源点相当于一个信号发生器，用来向系统输入信号。中间各个节点相当于信号中转站。每个节点可以把它的所有输入支路送来的信号，叠加起来，然后送到它的所有输出支路中去。中间各支路相当于对信号的处理和加工过程，信号只能沿着支路上箭头所指的方向传送。终点相当于信号的最终形式，即系统的输出信号。

3. "信号流图"这个名称是很切题的。因为我们对一个控制系统所关心的也就是信号的传递和变换过程。因此对研究控制系统者来说，信号流图是一个很有用的方法和工具。例如从一个信号流图，我们不仅能看出系统的输入变量和输出变量之间的关系，而且还便于研究系统内部诸变量的情况。从这一点就可以看出信号流图中变量的概念与现代控制理论中所谓的状态变量的概念是非常接近的。因此，在现代控制理论的研究中，信号流图是一个很有用的方法，而框图在这一点上就受到了局限。

需要着重指出的是，对于给定的某一系统，信号流图并不是唯一的。这是因为同一个给定系统方程，可以有若干个不同的形式，因此也就可以相应地画出若干个不同的信号流图（可参阅下一节）。

§2.4 信号流图的画法[28, 29, 32]

1. 根据系统方程作图

这里可以分两种情况来介绍。一种情况是给出的系统方程是联立的代数方程。另一种情况是给出的系统方程是微分方程（这里暂时只讨论连续系统信号流图的画法。用差分方程所描述的离散系统，其信号流图画法见第四章）。

当给出的系统方程是联立代数方程时，则首先需要将已知的联立代数方程变化成式(2.2－2)的标准形式——也叫因果形式。即把作为"果"的变量放在式子的左侧，作为"因"的