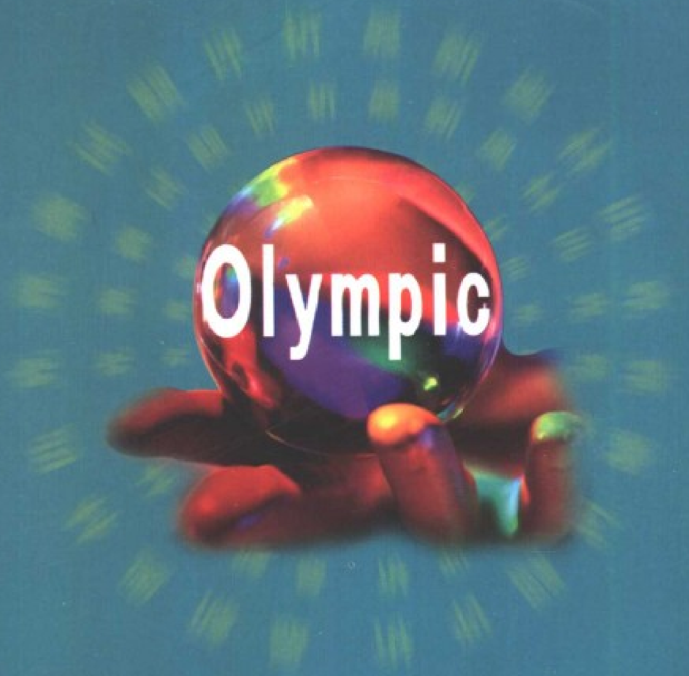
最新奥林匹克竞赛试题评析

高中数学

最新的竞赛试题
最优的解题途径
最精的迷津指点
最佳的金牌之路

葛　军／主编

南京师范大学出版社



丛书策划/韦 娟 周海忠 责任编辑/王 敏 韦 娟 封面设计/朱

ISBN 7-81047-724-2

9 787810 477246 >

ISBN 7-81047-724-2/G · 438
定价:16.00 元

最新的竞赛试题

最优的解题途径

最精的迷津指点

最佳的金牌之路

最新奥林匹克竞赛试题评析

高中数学

葛 军/主编

南京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

最新奥林匹克竞赛试题评析．高中数学／葛军主编．—南京：南京师范大学出版社，2002.5

ISBN 7-81047-724-2／G·438

Ⅰ．最…　Ⅱ．葛…　Ⅲ．数学课-高中-解题
Ⅳ．G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 028404 号

书　　名	最新奥林匹克竞赛试题评析．高中数学
主　　编	葛　军
责任编辑	王敏　韦娟
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电　　话	(025)3598077(传真)　3598412(营销部)　3598297(邮购部)
E - mail	nnuniprs@public1.ptt.js.cn
照　　排	江苏兰斯印务发展公司
印　　刷	江苏省如东县印刷厂
开　　本	880×1230　1/32
印　　张	14.75
字　　数	447 千
版　　次	2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-81047-724-2／G·438
定　　价	16.00 元

前 言

当代著名数学家陈省身先生预言："中国将在21世纪成为数学大国."

要成为数学大国,则需要我们作出艰辛的努力,需要我们从现在开始着力培养优秀数学苗子.

让我们的优秀数学苗子、数学爱好者学解当今国际、国内数学竞赛题,是一条引导他们走进现代数学、形成良好的数学素养的有效途径.

为此,我们精心编写了《最新奥林匹克竞赛试题评析(高中数学)》.本书精选了近年来全国各地高中数学竞赛题、全国高中数学联赛题、国外中学生数学竞赛题、中国数学奥林匹克(CMO,又称中国数学奥林匹克冬令营)竞赛题和国际数学奥林匹克(IMO)竞赛题.从命题起点、解题关键、解题方法及知识点应用等角度剖析这些竞赛题,努力引导学生学会解题,并通过解题引导学生掌握数学的思想方法,形成良好的数学素养和提高解决问题的能力.

为适应不同层次学生的需要和同一学生不同学习阶段的需要,本书将竞赛题分为A、B、C三个层次组来讲解.A组题起点于全国高中数学联赛低中档难度题(即相当于高考数学中档难度题),B组题起点于全国高中数学联赛中档难度题,C组题起点于全国高中数学联赛二

试题.

在你使用本书时，建议你恰当选择适合自己水平的题. 对于每一题，你开始于书中“题目”和“命题起点”，自己独立尝试去解，并对照书中“解题关键”和“答案”中的详细解题过程，再做适当的练习，你就会较快地取得进步，并将在各类竞赛中取得好成绩. 这也提高了你的思维水平.

本书选用了许多数学竞赛题及答案资料，在此，对这些资料的作者表示诚挚的谢意.

最后，深切感谢南京师范大学出版社韦娟女士和周海忠先生，他们为本书的顺利出版倾注了大量的心血与才智.

囿于时间与编者水平，不当之处在所难免，恳请读者指正.

编　者

2002 年 8 月

目录

第1章 代 数

第2章 几 何

第 3 章 数　论

第 4 章 组合数学初步

第 1 章 代数

1.1 函 数

函数是竞赛数学中的基本内容.竞赛题主要涉及方程与不等式、函数性质和函数最值等知识与基本思想方法.

1.1.1 方程与不等式

A 组题

1. 已知 a 为给定的实数.那么,集合 $M=\{x\mid x^2-3x-a^2+2=0, x\in\mathbf{R}\}$ 的子集的个数为( ).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 不确定

(2001 年全国高中数学联赛题)

【命题分析】

◆**命题起点**　立足于求一元二次方程根的个数.

◆**解题关键**　利用判别式与根的关系.

【答案】

解　由方程 $x^2-3x-a^2+2=0$ 的根的判别式 $\Delta=1+4a^2>0$,知方程有两个不相等的实数根.则 M 有 2 个元素,得集合 M 有 $2^2=4$ 个子集.

故选择(C).

2. 某人花了一枚硬币买了一块面包和一瓶克瓦斯(饮料).当物价上涨 20%后,这枚硬币只够买半块面包和一瓶克瓦斯.试问,如果物价再

上涨20%，那么，这枚硬币够不够仅买一瓶克瓦斯？

（第58届莫斯科数学奥林匹克竞赛题）

【命题分析】

◆**命题起点**　立足于代数式值的大小比较.

◆**解题关键**　由 $1.2^2y<1.5y=1$ 得结果.

【答案】

解　将硬币的币值算作1，并设一块面包和一瓶克瓦斯的价格分别为 x 与 y，则 $x+y=1$，$1.2(0.5x+y)=1$. 于是，可知 $1.5y=1$. 而第二次涨价后一瓶克瓦斯的价格是 $1.2^2y=1.44y$.

由于 $1.44y<1$，所以够买一瓶克瓦斯.

3. 平面直角坐标系中，纵、横坐标都是整数的点叫做整点，那么满足不等式 $(|x|-1)^2+(|y|-1)^2<2$ 的整点 (x,y) 的个数是（　　）.

(A) 16　　(B) 17　　(C) 18　　(D) 25

（1999年全国高中数学联赛题）

【命题分析】

◆**命题起点**　立足于平方数的离散性.

◆**解题关键**　$0\leqslant(|x|-1)^2<2$，$0\leqslant(|y|-1)^2<2$，且 x,y 为整数.

【答案】

解　由题意知 $0\leqslant||x|-1|<\sqrt{2}$，$0\leqslant||y|-1|<\sqrt{2}$，且 x,y 为整数，所以 $||x|-1|=0$，$||y|-1|=0,1$；或 $||x|-1|=1$，$||y|-1|=0$.

即 $|x|-1=0$，$|y|-1=0,1,-1$；或 $|x|-1=1$，$|y|-1=0$；或 $|x|-1=-1$，$|y|-1=0$.

从而 (x,y) 共有 $2\times(2+2+1)+2\times2+1\times2=16$（个）.

故选择(A).

4. 已知6枝玫瑰与3枝康乃馨的价格之和大于24元，而4枝玫瑰与5枝康乃馨的价格之和小于22元. 则2枝玫瑰的价格和3枝康乃馨的价格比较结果是（　　）.

(A) 2枝玫瑰价格高　　(B) 3枝康乃馨价格高

(C) 价格相同　　　　　　　　　　(D) 不确定

(2001 年全国高中数学联赛题)

【命题分析】

◆**命题起点**　立足于不等式基本知识.

◆**解题关键**　用字母表示列出题中不等式与方程,继之代数运算.

【答案】

解　设玫瑰与康乃馨的单价分别为每枝 x、y 元,则

$$6x+3y>24, 4x+5y<22.$$

令　$6x+3y=a>24, 4x+5y=b<22.$

解得 $x=\frac{1}{18}(5a-3b), y=\frac{1}{9}(3b-2a)$.

所以,$2x-3y=\frac{1}{9}(11a-12b)>\frac{1}{9}(11\times 24-12\times 22)=0$,

即　$2x>3y$.

故选择(A).

说明　可用二元一次不等式所表示的区域来研究.

5. 解不等式 $\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$.

(2000 年莫斯科大学数学力学系入学考试题)

【命题分析】

◆**命题起点**　立足于求解绝对值不等式.

◆**解题关键**　运用平方差公式简化不等式.

【答案】

解　在原不等式两边同乘以 $\frac{|x-4|+|x-1|}{|x-3|+|x-2|}$,得

$$\frac{(x-4)^2-(x-1)^2}{(x-3)^2-(x-2)^2}<\frac{|x-4|+|x-1|}{|x-4|},$$

即　$\frac{-3(2x-5)}{-(2x-5)}<1+\frac{|x-1|}{|x-4|}, 2<\frac{|x-1|}{|x-4|}$.

得　$\begin{cases} 2|x-4|<|x-1|, \\ x\neq 4, \end{cases}$

有　$3<x<4,4<x<7$.

6. 已知 $ax^2-1\,999x+b>0$ 的解集是 $\{x\mid -3<x<-1\}$,则不等式 $ax^2+1\,999x+b>0$ 的解集是________.

（1999 年广西数学竞赛题）

【命题分析】

◆**命题起点**　立足于一元二次不等式与解集的关系.

◆**解题关键**　由 $x^2+4x+3<0$,等价于 $ax^2-1\,999x+b>0$,得结果.

【答案】

解　由 $-3<x<-1$ 得 $(x+3)(x+1)<0$,即 $x^2+4x+3<0$.

它等价于 $ax^2-1\,999x+b>0$,所以,$a<0$,

即　$x^2-\dfrac{1\,999}{a}x+\dfrac{b}{a}<0$,则 $\dfrac{1\,999}{a}=-4,\dfrac{b}{a}=3$.

又由 $ax^2+1\,999x+b>0$,有 $x^2+\dfrac{1\,999}{a}x+\dfrac{b}{a}<0$,

即　$x^2-4x+3<0$.从而,$1<x<3$.

所以不等式 $ax^2+1\,999x+b>0$ 的解集是 $\{x\mid 1<x<3\}$.

7. 给定正数 p,q,a,b,c,其中 $p\neq q$.若 p,a,q 是等比数列,p,b,c,q 是等差数列,则一元二次方程 $bx^2-2ax+c=0$ (　　).

(A) 无实根　　(B) 有两个相等实根

(C) 有两个同号相异实根　　(D) 有两个异号实根

（2000 年全国高中数学联赛题）

【命题分析】

◆**命题起点**　立足于一元二次方程的根与判别式的关系.

◆**解题关键**　由代数运算得 $bc=\dfrac{p+p+q}{3}\cdot\dfrac{p+q+q}{3}$后,再用平均不等式得结果.

【答案】

解　由题意知 $pq=a^2,2b=p+c,2c=q+b$.

由后两式得 $b=\dfrac{2p+q}{3}$，$c=\dfrac{p+2q}{3}$. 于是有

$$bc=\frac{p+p+q}{3}\cdot\frac{p+q+q}{3}\geqslant\sqrt[3]{p^2q}\cdot\sqrt[3]{pq^2}=pq=a^2.$$

因为 $p\neq q$，故 $bc>a^2$，方程的判别式 $\Delta=4a^2-4bc<0$.

因此，方程无实根.

故选择(A).

8. 设 $x_1, x_2, y_1, y_2\in\mathbf{R}^+$，$a=\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{y_1y_2}$，$b=\sqrt{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}$，则 a,b 的大小关系为________.

（1999 年河南省高中数学竞赛题）

【命题分析】

◆**命题起点** 考虑作商比较大小.

◆**解题关键** 作商后用均值不等式.

【答案】

解
$$\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{x_1x_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}}+\sqrt{\frac{y_1y_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_1+y_1}+\frac{x_2}{x_2+y_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{x_1+y_1}+\frac{y_2}{x_2+y_2}\right)$$
$$=1.$$

则 $a\leqslant b$.

9. 设全集是实数集，若 $A=\{x\mid\sqrt{x-2}\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 10^{x^2-2}=10^x\}$，则 $A\cap\overline{B}$ 是（　　）.

(A) $\{2\}$　　(B) $\{-1\}$　　(C) $\{x\mid x\leqslant 2\}$　　(D) $\varnothing$

（2000 年全国高中数学联赛题）

【命题分析】

◆**命题起点** 立足于无理不等式与指数方程知识的综合.

◆**解题关键** 化条件为 $x^2-x-2=0$，得结果.

【答案】

解 由 $\sqrt{x-2}\leqslant 0$ 得 $x=2$，则 $A=\{2\}$.

由 $10^{x^2-2}=10^x$ 得 $x^2-x-2=0$,则 $B=\{-1,2\}$.

所以 $A\cap\overline{B}=\varnothing$.

故选择(D).

10. 不等式 $\left|\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2\right|>\dfrac{3}{2}$ 的解集为________.

（2001 年全国高中数学联赛题）

【命题分析】

◆**命题起点** 立足于对数与绝对值不等式知识的综合.

◆**解题关键** 解不等式 $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}>-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}<-\dfrac{7}{2}$.

【答案】

解 $\left|\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2\right|>\dfrac{3}{2}$ 等价于 $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2>\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2<-\dfrac{3}{2}$,

即 $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}>-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}<-\dfrac{7}{2}$.

有 $\log_{\frac{1}{2}}x<-2$ 或 $\log_{\frac{1}{2}}x>0$ 或 $-\dfrac{2}{7}<\log_{\frac{1}{2}}x<0$.

故解为 $x>4$ 或 $0<x<1$ 或 $1<x<2^{\frac{2}{7}}$,

即解集为 $(0,1)\cup(1,2^{\frac{2}{7}})\cup(4,+\infty)$.

11. 求实数 x,y,使得 $\begin{cases}4^{-x}+27^{-y}=\dfrac{5}{6},\\ \log_{27}y-\log_4x\geqslant\dfrac{1}{6},\\ 27^y-4^x\leqslant 1\end{cases}$ 成立.

（1999 年罗马尼亚数学奥林匹克竞赛题）

【命题分析】

◆**命题起点** 立足于指数、对数不等式与方程知识的综合.

◆**解题关键** 由 $4^{-x}+27^{-y}=\dfrac{5}{6}$ 得 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$,$y\leqslant\dfrac{1}{3}$.

从而有 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{3}$.

【答案】

解 设 $4^x=a>0,27^y=b>0$,则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{6}, \qquad ①$$

$$b-a\leqslant 1.$$

将 $b\leqslant a+1$ 代入式①,有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\leqslant\frac{5}{6},5a^2-7a-6\geqslant 0.$$

解得 $a\geqslant 2$,即 $x\geqslant\frac{1}{2}$.

将 $a\geqslant b-1$ 代入式①,当 $b-1>0$ 时,有

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{b-1}\geqslant\frac{5}{6},5b^2-17b+6\leqslant 0.$$

解得 $\frac{2}{5}\leqslant b\leqslant 3$,即 $y\leqslant\frac{1}{3}$.

当 $b<1$ 时,仍有 $y\leqslant\frac{1}{3}$.

又由 $\log_{27}y-\log_4 x\geqslant\frac{1}{6}$,有

$$\log_{27}y+\frac{1}{3}\geqslant\log_4 x+\frac{1}{2},\log_{27}3y\geqslant\log_4 2x.$$

又 $x\geqslant\frac{1}{2},y\leqslant\frac{1}{3}$,则 $2x\geqslant 1,\log_4 2x\geqslant 0;3y\leqslant 1,\log_{27}3y\leqslant 0$.

当且仅当 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{3}$时,满足 $\log_{27}y-\log_4 x\geqslant\frac{1}{6}$.

故 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{3}$.

12. 设 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$,且 $\sin\frac{\alpha}{3}>\cos\frac{\alpha}{3}$,则$\frac{\alpha}{3}$的取值范围是(　　).

(A) $(2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{3}),k\in\mathbf{Z}$

(B) $(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}),k\in\mathbf{Z}$

(C) $(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi),k\in\mathbf{Z}$

(D) $(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{3})\cup(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi),k\in\mathbf{Z}$

(2000 年全国高中数学联赛题)

【命题分析】

◆**命题起点** 求解简单的三角函数不等式.

◆**解题关键** 将函数值的正负性及不等关系转化为角 α 的范围.

【答案】

解 由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi$,得

$$\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}<\frac{\alpha}{3}<\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}.$$

又 $\sin\frac{\alpha}{3}>\cos\frac{\alpha}{3}$,有

$$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{3}<2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}.$$

此两式的公共部分为

$$(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{3})\cup(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi),k\in\mathbf{Z}.$$

故选择(D).

13. 设$[\tan x]$表示不超过实数 $\tan x$ 的最大整数,则方程

$$[\tan x]=2\cos^2 x$$

的解为__________.

(1999 年广西数学竞赛题)

【命题分析】

◆**命题起点** 三角函数及取整函数知识的综合运用.

◆**解题关键** 由 $0\leqslant 2\cos^2 x\leqslant 2$,得$[\tan x]=0,1,2$.

【答案】

解 因 $0\leqslant 2\cos^2 x\leqslant 2$,故$[\tan x]$可取的值只能是 0,1,2.

当$[\tan x]=0$ 时,$\cos x=0$,此时 $\tan x$ 无意义.

当$[\tan x]=2$ 时,$\cos^2 x=1$,此时$\tan x=0$,这不可能.

当$[\tan x]=1$时，$\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

注意$[\tan x]=1$，所以只能有$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

14. 已知$[x]$表示不超过x的最大整数，则方程

$$3^{2x}-[10\times3^{x+1}]+\sqrt{3^{2x}-[10\times3^{x+1}]+82}=-80$$

的解的个数为________.

（1999年河南省高中数学竞赛题）

【命题分析】

◆**命题起点**　指数方程与取整函数$[x]$的综合运用.

◆**解题关键**　转化方程为$3^{2x}-10\times3^{x+1}+81\leqslant0$.

【答案】

解　原方程可以化为

$$3^{2x}-[10\times3^{x+1}]+82+\sqrt{3^{2x}-[10\times3^{x+1}]+82}-2=0,$$

则

$$(\sqrt{3^{2x}-[10\times3^{x+1}]+82}+2)\cdot(\sqrt{3^{2x}-[10\times3^{x+1}]+82}-1)=0,$$

即　$3^{2x}-[10\times3^{x+1}]+81=0$，

从而有$3^{2x}-10\times3^{x+1}+81\leqslant0$，

即　$(3^x-3)(3^x-27)\leqslant0$，得$3\leqslant3^x\leqslant27$.

所以$1\leqslant x\leqslant3$.

当$x=1,3$时，为原方程的解；当$x=2$时，原方程无解.

故原方程有2个解.

$\mathscr{B}$ 组题

15. 设a,b,c为三个不同的实数，使得方程$x^2+ax+1=0$和$x^2+bx+c=0$有一个相同的实根，并且使方程$x^2+x+a=0$和$x^2+cx+b=0$也有一个相同的实根. 试求$a+b+c$.

（第26届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题）

【命题分析】

◆**命题起点**　立足于一元二次方程的基本知识.