

高等学校试用教材

电器数值分析

河北工学院 孟庆龙 颜威利 主编

机械工业出版社

高等学校试用教材

电器数值分析

河北工学院

主编 孟庆龙 颜威利

参编 于慎根 王赞明

主审 陈德桂



机械工业出版社

(京) 新登字 054 号

本书是为适应计算机应用发展的需要,以电器专业领域内数值计算的最新成果和教学实践为基础而编写的。

书中着重对交直流电磁铁的磁路数值计算方法、电磁场与温度场的有限元分析、电磁铁静态与动态特性以及磁场力的数值计算方法等方面进行了简明扼要的阐述,并扼要介绍了数值计算中的泛函基础。

本书可作为高等学校电器专业本科学生和研究生教材,也可供职工大学及有关专业师生参考,对从事电器生产、设计和研究的人员也有参考价值。

电 器 数 值 分 析

河北工学院

主编 孟庆龙 颜威利

参编 于慎根 王赞明

主审 陈德桂

*

责任编辑:林 勇 版式设计:王 颖

封面设计:郭景云 责任校对:肖新民

责任印制:路 琳

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

邮政编码:100037

(北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 $18^{3/4}$ ·字数 459 千字

1993年10月北京第1版·1993年10月北京第1次印刷

印数 0 001—2 000·定价:9.25 元

*

ISBN 7-111-03744-8/TM·472 (课)

前 言

本书是根据1983年5月原电器专业教材编审小组在杭州会议上修订的《电器数值分析》教学大纲进行编写的。本课程是电器专业选修课。它的任务是用数值分析方法对电器的基本理论进行深入的阐述和研究,培养学生用计算机进行电器特性分析计算的能力。

本课程是电器理论基础的后续课程,内容兼顾传统的路的计算方法和现代的场的数值分析方法,着重对直流与交流电磁铁的磁路数值计算、电磁场与温度场的有限元分析、电磁铁静态与动态特性以及磁场力的计算方面进行了简明扼要的阐述。由于本课程与工厂实际的产品设计计算联系较密切,建议学生应用本书提供的方法或程序,使用计算机对实际产品进行初步分析计算。

本书可作为电器专业的专业教材,也可供工程技术人员和其他相近专业的师生参考。

书稿中第一、二、三、四、五、七章由孟庆龙教授编写,第六章由于慎根教授编写,第八、九、十一章由颜威利教授编写,第十、十二章由王赞明同志编写,王赞明同志还参加了前五章中部分章节的编写工作,并对书中程序进行了整理。本书的主审陈德桂教授对书稿进行了认真细致的审阅,编者对他在审阅过程中提供的宝贵意见表示深切的谢意。

由于编者水平有限,错误和不妥之处在所难免,谨请读者指正。

编 者

1992年10月

82003/12

目 录

前言

绪论	1
----	---

第一章 曲线和图表的数学处理方法	5
------------------	---

第一节 插值多项式的应用	5
--------------	---

第二节 经验模型的应用	11
-------------	----

第三节 信息检索法的应用	14
--------------	----

第二章 直流磁路的模型及计算方法	16
------------------	----

第一节 概述	16
--------	----

第二节 不计漏磁通的简单磁路计算	17
------------------	----

第三节 考虑漏磁通的简单磁路计算—— 具有分布参数等值磁路的数值分 析	24
---	----

第四节 电磁吸力的近似算法	33
---------------	----

第三章 多回路磁路的数值解法—— 网络拓扑分析法	41
-----------------------------	----

第一节 概述	41
--------	----

第二节 E形电磁铁的拓扑性质	42
----------------	----

第三节 磁路基尔霍夫定律的矩阵形式	46
-------------------	----

第四节 应用节点分析法计算直流磁路	49
-------------------	----

第五节 应用回路分析法计算直流磁路	55
-------------------	----

第四章 交流磁路模型与计算方法	57
-----------------	----

第一节 交流磁路的特点及其几何模型	57
-------------------	----

第二节 磁阻抗及其计算程序	59
---------------	----

第三节 交流磁路的等值磁路图及其数学 模型	62
--------------------------	----

第四节 双E形交流磁路的数学模型及其 数值解法	71
----------------------------	----

第五章 电器电磁场的数值分析	74
----------------	----

第一节 电器电磁场的理论基础	74
----------------	----

第二节 标量磁位及其偏微分方程	76
-----------------	----

第三节 磁矢位及其偏微分方程	78
----------------	----

第四节 恒定电磁场的边界条件	80
----------------	----

第五节 电磁场数值解法概述	82
---------------	----

第六章 数值计算中的泛函基础	84
----------------	----

第一节 函数	84
--------	----

第二节 度量空间	84
----------	----

第三节 赋范空间	88
----------	----

第四节 变分法	94
---------	----

第五节 实内积空间	97
-----------	----

第六节 算子方程的近似解	102
--------------	-----

第七章 二维电磁场有限单元法	104
----------------	-----

第一节 以能量变分为基础的等价变分问 题	104
-------------------------	-----

第二节 有限单元法的单元分析与总体合 成	106
-------------------------	-----

第三节 代数方程组的数值解法	115
----------------	-----

第四节 有限元法网格的自动形成	123
-----------------	-----

第五节 自动绘制磁场图形	125
--------------	-----

第六节 计算实例	127
----------	-----

第八章 三维电磁场有限元分析	133
----------------	-----

第一节 三维电磁场有限元离散方法	133
------------------	-----

第二节 三维静电场有限元分析	149
----------------	-----

第三节 三维静磁场矢量位有限元分析	166
-------------------	-----

第四节 三维静磁场标量位有限元分析	184
-------------------	-----

第五节 三维涡流场有限元分析	195
----------------	-----

第九章 磁场力的数值计算	207
--------------	-----

第一节 磁场力的基本概念——洛仑兹力	207
--------------------	-----

第二节 磁场应力——麦克斯韦公式	209
------------------	-----

第三节 虚位移原理和能量平衡公式	213
------------------	-----

第四节 电动力的数值计算	219
--------------	-----

第五节 电磁吸力的分析和计算	220
----------------	-----

第十章 积分方程法与边界元法	225
----------------	-----

第一节 积分方程法	225
-----------	-----

第二节 边界元法	238
----------	-----

第十一章 电器动态特性数值分析	251
-----------------	-----

第一节 电器动态微分方程组	251
---------------	-----

第二节 动态微分方程组的数值解法	252
------------------	-----

第三节 电磁铁励磁电路的数值分析	254
------------------	-----

第四节 电器触头振动的计算方法	263
-----------------	-----

第十二章 温度场的有限元法	268
---------------	-----

第一节 电器中的温度场问题	268
---------------	-----

第二节 电器中热传导的数学模型	268
-----------------	-----

第三节 温度场的变分问题及其离散化	274
-------------------	-----

第四节 三维稳态温度场的有限元分析	280
-------------------	-----

参考文献	292
------	-----

绪 论

科学技术的发展对计算手段提出更高的要求。电子计算机的出现,给解算复杂的工程技术问题提供了强有力的工具。由于数字电子计算机具有运算速度快、存储容量大、计算功能多和准确度高等优点,使计算技术领域产生了惊人的发展,促进了数值分析在科学技术中的广泛应用。在最近30年来,世界各国把数字电子计算机广泛地应用于科学技术的工程设计、数值计算和数据处理等各个方面。因此,积极采用数字电子计算机进行电器产品设计和分析计算,是科学技术发展的必然趋势,是四个现代化的要求。这对我国电器产品的更新换代,赶超世界先进水平,将产生深刻的影响。

从60年代开始,国外已经应用电子计算机进行电场、磁场和热场的分析计算,尤其是对磁路和电磁机构的分析计算更为广泛。在此基础上,先后开展了应用电子计算机进行电磁机构、熔断器和自动断路器等产品的计算机辅助设计(CAD——Computer Aided Design)。

从1975年开始,我国有关高等院校电器专业和研究所,先后应用数字电子计算机进行磁路、电磁场和热场的数值计算,还对电磁机构的动特性进行了研究,在产品优化设计和电器CAD方面也做了不少工作,积累了不少经验,取得了可喜成果,为电器技术领域内应用电子计算机开展科学研究、数值分析和计算机辅助设计(以下简称机辅设计)奠定了基础,培养了人才。但是,由于电器技术涉及的范围广,有许多物理现象综合性强,有许多问题是热、电、光、化等物化现象交织在一起,在同一个零部件上需同时满足电磁、热和机械性能的要求,这样对建立准确的数学模型带来不少问题,同时对利用电子计算机在电器领域内更广泛地进行数值分析计算也带来不少困难。因此,现在的电器数值分析所涉及的问题还十分有限,有待进一步开发。

利用数字电子计算机进行电器数值分析计算的过程,大致可分为下述六个步骤。

一、确定电器分析计算任务和建立数学模型

用户提出的技术条件和原始数据,如额定电压和电流、分断容量、操作频率以及使用环境等条件,都可作为机辅设计的依据。选择最佳尺寸后,经过一系列特性校核验算,使各项性能指标得到满足,这就是机辅分析的任务。

进行机辅分析之前,首要的任务是选择合适的数学模型,但有些场合无法利用现成的公式,就需要建立新的数学模型。

所谓数学模型是将有关现象的特征或本质给予数学描述的数学关系。但是,应用数学公式表示的事物是有限的。在许多情况下与现象完全吻合的数学描述是不大可能的。因此,在数式化之前,应先进行现象的简化或抽象化。由此,也可以认为数学模型是用数学公式来描述现象的拟真情况。

在数学模型中,当变量之间有确定的数值关系时,这类数学模型称为确定模型,与确定模型相对应的是不确定现象的模型,称为概率模型,它是描述随机现象的偶然性的数学模型,随机变量的分布模型就是这样一种模型。

在开关电器中,有许多现象是多种物理过程的综合,很难用一种数学表达式进行该种现

象的描述。因此，在电器理论研究和数值分析中，研究建立新的有关数学模型是十分重要的问题。

二、选择计算方法

应用数字电子计算机解算各类电器数学模型，首要的问题是选择合适的数值计算方法。最近几十年数值计算方法的发展和推广应用，也为应用电子计算机解算任何复杂的工程计算问题提供了可能性。目前，数字电子计算机所能进行的运算，通常是加减乘除四则运算和逻辑运算。但是，在开关电器中遇到的各类数学问题，不只限于四则运算和逻辑运算，它往往包括微分、积分、代数方程组、微分方程组，以及各种初等函数（例如三角函数、对数和指数函数等）的求解和运算问题。为了应用数字电子计算机解算这些复杂的数学问题，需要采用近似计算方法，把复杂的数学问题离散化为计算机能够完成的四则运算和逻辑运算的近似公式。然后按照这些近似公式进行具体的数值计算。此外，还要求按所选用的计算方法求得的结果有足够小的误差，即满足工程计算的准确度要求。

在工程中常用的数值计算方法有：有限差分法和差商、函数插值法、导数的近似计算、数值积分法、方程的近似解法、微分方程的数值解法、求解线性代数方程组用的直接方法和迭代方法、矩阵的运算以及概率模拟方法的应用等。选择哪种计算方法更好，要根据电器的数学模型和准确度要求，选择运算速度快和准确度高的计算方法。

三、程序设计

程序设计就是用算法语言描述一个完整计算过程的程序，也就是用算法语言编写源程序的过程。自从人们采用算法语言编写源程序之后，计算机的应用就变得比较简单一些了，也便于推广和普及。

目前国际上使用的程序设计语言的种类很多，各有自己的特点和应用范围。当今世界上采用的算法语言有上百种，大部分为专用语言。最常用的通用语言有：PASCAL、FORTRAN、ALGOL、BASIC、COBOL、PL/I、APT、LISP和C语言等。COBOL适于作商业数据处理；APT和PL/I适宜于数控编程；LISP语言适宜于人工智能领域。ALGOL语言为嵌套式结构，组织严密，但现在已不常用。

FORTRAN是FORMula TRANslation的缩写，为块式结构，它由若干个程序段所组成，它含有一个主程序段，其余为子程序段。程序是由主程序的第一个语句开始执行。我们在电器数值分析的实例中，将采用FORTRAN语言编写源程序。

PASCAL语言是最近兴起的一种结构化程序设计语言，侧重于描述编译程序，特别适用于教学和描述算法。它是在ALGOL语言的基础上增加了计算功能和数据处理功能而发展起来的。它的基本结构简单，数据类型丰富，编写容易，易于维护，实现效率高，查错能力强，移植性好，广泛应用于工程设计计算。

C语言也是在ALGOL语言基础上产生出来的。C语言具有简洁的表达式，强有力的控制流程，灵活的数据构造能力，丰富的运算符，可与汇编程序媲美的运行效率及良好的可移植性。C语言是更注重软件开发特别是系统程序设计的语言。一方面它具有低级语言如汇编语言的性质，能直接反映机器硬件特性，编译后代码效率较高，而这是一般高级语言很难达到的；另一方面它又具有高级语言所有的重要特性，如丰富的控制流程和强有力的数据构造能力，故有人又称它为“中级语言”。

BASIC语言是一种有人机对话功能的语言，主要用于数值计算、交互图形处理。其解释

系统占内存小。由于它简单易学，目前使用范围也十分广泛。

在编写源程序时，应考虑到节约机时、减少内存、便于阅读和理解，缩小程序篇幅等。

按照正常的程序设计步骤，在编写源程序之前，应当进行框图设计。框图设计有助于对所编源程序有一个明确的整体概念。当然，对于简单的计算过程，框图设计是可以省略的。

四、程序的信息化和调试

为了把源程序输入计算机内进行运算，必须把源程序和原始数据信息化，这个任务由计算软件——编译系统来完成。现在，数字电子计算机的输入系统，多采用键盘直接将源程序输入机器，并把程序显示在屏幕上，在调试程序过程中，也便于检查和发现错误。

五、上机运算

程序调试完毕后，即可把程序块连接起来进行运算，也就是计算机执行目标程序，并输出计算结果。

六、对计算结果进行分析

如果能够得到预想的计算结果，电器校核算就告一段落。如果所得计算结果有问题，那就需要从所用计算公式和计算方法等各个方面进行检查，根据问题性质进行修改，而后重

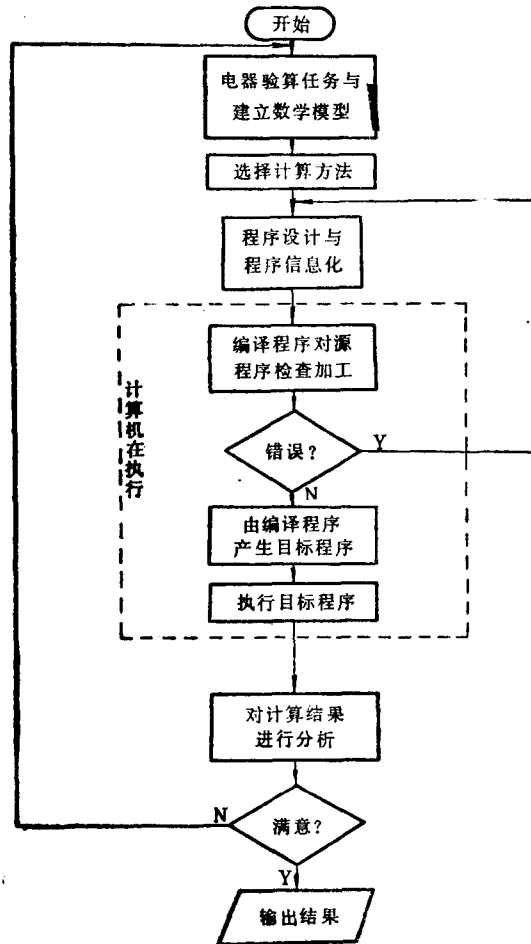


图0-1 电器数值分析过程框图

新上机运算，直到获得满意的结果为止。

现将用数字电子计算机进行电器数值分析计算的主要过程，进一步用电器数值分析过程框图表达出来，如图 0-1 所示。

本书是电器学的后续课程，它应用机辅分析的数值计算方法，总结了最近几年国内外常用的一些比较成熟而行之有效的电器数值分析手段，进而取代了电器学传统的手工计算，为电器机辅设计、结构优化和特性分析提供了基础。

本书主要内容有：曲线和图表的数学处理方法；交直流磁路模型和计算方法，其中重点阐述了简单的 U 形磁路所采用的行之有效的磁路微分方程的数值解法以及复杂的多回路磁路应用的网络拓扑分析法，这样可以代替传统的分段法和逐次近似的磁路计算方法；为电磁场、温度场、静电场等应用有限元分析提供数学基础，特别增加了泛函基础的章节，它是现代应用数学的基础；其后各章重点介绍了二维及三维电磁场、温度场、涡流场和静电场的有限元分析方法；还介绍了电磁吸力、电动力和动态特性的数值计算方法；为了保持本书的系统性，还对积分方程和边界元法作了简要的介绍。书中列出的一些计算机应用的 FORTRAN 语言源程序，是我们近几年进行科研的重要成果之一，读者可以直接利用这些源程序进行产品的性能分析等工作。

由于电器学涉及的理论十分广泛，本书未能概括电器基础理论所阐述的有关问题并对之进行更全面的数值分析。又由于当前应用计算机解决电器学领域的问题还处在开发研究过程中，并且编者水平有限，因此，这方面问题还有待电器专业的专家学者和广大工程技术人员做深入开发和研究，这样才能进一步丰富电器数值分析的内容。

第一章 曲线和图表的数学处理方法

在电器的数值分析与计算机辅助设计中,常会遇到各类曲线和图表的处理问题,正确地解决这类问题是为了实现各种软件间的信息交换。现在以电磁系统数值分析为例,说明处理这类问题的数学方法。

求解非线性磁路或电磁场问题时,需要计算磁导率(或磁阻率)、磁路压降以及磁抗(计算交流磁路)等物理量,这一般是在给定磁感应强度 B 值的情况下求出相对应的磁场强度 H 值或铁损 p 值,或者相反。有的情况下,在需要计算电磁线圈有关参数时,也会遇到在给定导线截面积数值的情况下查找出合适的离散的导线直径值这类问题。上述提出的问题,实质上是在机辅分析与设计过程中所涉及到的某些曲线和图表的数学处理问题。所谓数学处理问题就是如何正确选择数学方法。常用的数学方法有插值法、经验回归分析法和检索法等。

第一节 插值多项式的应用

在电器生产实践和科学实验中,常常遇到一些很复杂的函数 $f(x)$,虽然可以肯定这类函数在某区间内有定义,但是很难找到它的解析表达式。在电器学中所遇到的许多非线性关系就具有如此的性质。例如,电弧的伏安特性、接触电阻和压力的关系、铁磁材料磁化曲线,以及动静特性等。以上例举的这些特性曲线,在许多情况下,仅能通过实验来观测或者数值计算得到有限多个数据,它们是一些离散的(互不相同的)节点 x_i 上的函数值

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1-1)$$

或者说,得到一张数据表:

x	x_0	x_1	$x_2 \dots$	$x_n \dots$
y	y_0	y_1	$y_2 \dots$	$y_n \dots$

用这种数据表格形式给出的函数 $y = f(x)$ 通常称为列表函数。

如何利用实验观测到的离散的函数值或列表函数值,计算出给定点 x_s 的函数 $f(x_s)$ 的近似值,这就是插值方法所要解决的问题。

所谓插值,通俗地说就是在所给的函数表中再插进一些所需要的中间值。

怎样进行插值呢?插值方法的基本思想是:设法构造某个简单函数 $y = p(x)$,作为 $f(x)$ 的近似表达式;然后计算 $p(x)$ 的值,以得到 $f(x)$ 的近似值。

我们可以选取不同类型的函数 $p(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数,但是最常用的类型是代数多项式。这是由于多项式有各阶导数,同时求值又非常方便(可以用秦九韶法)。

最近30多年来,由于数字电子计算机的普遍应用,古老的插值法的使用范围随之扩大,理论也日益完善。

插值多项式有各种形式,其中广为应用的有线性插值和抛物线插值。

一、线性插值多项式

设已知函数 $y = f(x)$ 在 x_0 、 x_1 节点上的函数值为 $y_0 = f(x_0)$ ， $y_1 = f(x_1)$ 。现在的任务是找到一个一次多项式 $p_1(x)$ ，使它满足

$$p_1(x_0) = f(x_0), \quad p_1(x_1) = f(x_1) \quad (1-2)$$

$y = p_1(x)$ 的几何意义就是通过两点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 的直线，如图1-1所示。因此，两点插值也称为线性插值。同时， $y = p_1(x)$ 是 x 的一次函数，又称为一次插值多项式。

$p_1(x)$ 的表达式可由它的几何意义直接给出

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (\text{点斜式}) \quad (1-3)$$

或

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 \quad (\text{对称式}) \quad (1-4)$$

上述两种形式使用的场合是不同的，进行理论分析时，常用对称式（亦称两点式），在实际计算时常用点斜式。

经分析对称式看出，满足式(1-1)的 $p_1(x)$ 可以用两个基本插值多项式 $\omega_0(x)$ 和 $\omega_1(x)$ 的线性组合得到，其系数分别为 y_0 和 y_1 ，即

$$p_1(x) = y_0\omega_0(x) + y_1\omega_1(x) \quad (1-5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \\ \omega_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

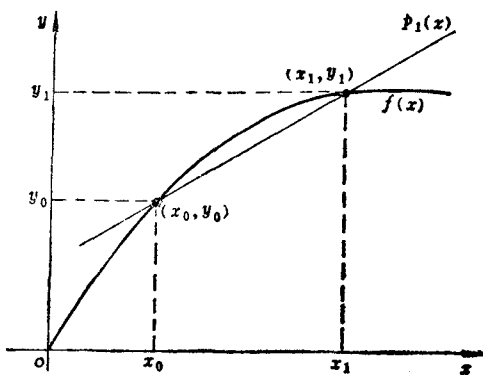


图1-1 线性插值

显然， $\omega_0(x)$ 和 $\omega_1(x)$ 也是线性插值多项式，故称它为在 x_0 和 x_1 节点上的基本插值多项式。

在区间 $[x_0, x_1]$ 上用 $y = p_1(x)$ 的值近似 $y = f(x)$ 的值，其余项为

$$R_1(x) = f(x) - p_1(x) \quad (1-7)$$

如果插值点 x_k 位于插值区间 $[x_0, x_1]$ 内，这种插值称为内插，如果 x_k 位于插值区间 $[x_0, x_1]$ 之外，又离 x_0 或 x_1 不远，也可以用 $p_1(x)$ 的值作为 $f(x)$ 的近似值，称为外推。

线性插值仅利用两个节点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 上的信息，因此精度低，误差大。线性插值适用于磁化曲线线性段（磁化曲线不饱和段与磁化曲线过饱和段）。在磁化曲线曲率较大部分，为了保证计算精度，需要采用三点插值法（即抛物线插值）。

二、拉格朗日插值多项式

为了提高插值精度和减小误差，于是引出通过三个节点的插值多项式。

假设三个插值节点为 x_k 、 x_{k+1} 和 x_{k+2} ，已知在此三点的 $f(x)$ 函数值分别为 $y_k = f(x_k)$ 、 $y_{k+1} = f(x_{k+1})$ 和 $y_{k+2} = f(x_{k+2})$ ，通过此三点的插值多项式为 $p_2(x)$ ，使它满足

$$p_2(x_k) = y_k, \quad p_2(x_{k+1}) = y_{k+1}, \quad p_2(x_{k+2}) = y_{k+2}$$

它的几何意义就是 $y = p_2(x)$ 通过三点 (x_k, y_k) 、 (x_{k+1}, y_{k+1}) 与 (x_{k+2}, y_{k+2}) 的抛物线，

如图1-2所示。因此,通过三点的插值多项式是用抛物线来近似曲线 $y = f(x)$,故称为抛物线插值,由于抛物线是二次插值函数,又称二次插值。

我们也可以采用基本插值多项式来构造二次插值函数。基本插值函数是二次插值多项式,即

$$\left. \begin{aligned} \omega_k(x) &= \frac{(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})} \\ \omega_{k+1}(x) &= \frac{(x - x_k)(x - x_{k+2})}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k+2})} \\ \omega_{k+2}(x) &= \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k+2} - x_k)(x_{k+2} - x_{k+1})} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

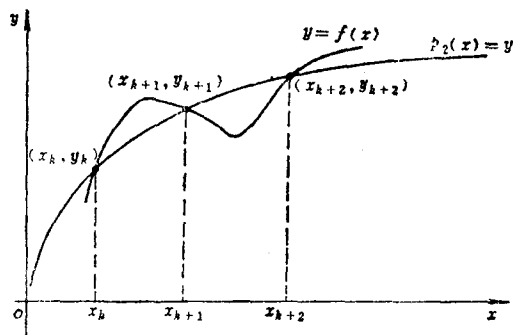


图1-2 抛物线插值

利用这些基本插值函数 $\omega_k(x)$ 、 $\omega_{k+1}(x)$ 和 $\omega_{k+2}(x)$ 的线性组合得到二次插值函数 $p_2(x)$,其系数分别为 y_k 、 y_{k+1} 和 y_{k+2} ,即

$$p_2(x) = y_k \omega_k(x) + y_{k+1} \omega_{k+1}(x) + y_{k+2} \omega_{k+2}(x) \quad (1-9)$$

亦可写成

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})} y_k + \frac{(x - x_k)(x - x_{k+2})}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k+2})} \\ &\quad \times y_{k+1} + \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k+2} - x_k)(x_{k+2} - x_{k+1})} y_{k+2} \end{aligned} \quad (1-10)$$

式(1-10)也可以写成累加和累乘的形式,即

$$p_2(x) = \sum_{k=i}^{i+2} \left(\prod_{\substack{j=i \\ j \neq k}}^{i+2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k \quad (1-11)$$

式中, k 的取值随 i 的取值而改变。 i 可以在1到 $n-2$ 的范围内取值,当 $x_i \leq x < x_{i+1}$ 时,取 $k = i$;当 $x \geq x_{n-1}$ 时,取 $k = n-2$ 。

式(1-10)或式(1-11)可以直接用来计算磁化曲线上的插值节点。磁化曲线插值节点的疏密程度,可以根据磁化曲线曲率大小而定。一般从磁化曲线膝点开始,其曲率较大,插值节点应取得密一些,以便提高计算精度。

应用上述类似的推导方法,可以得到 $n+1$ 个节点的 n 次插值多项式,即

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k \quad (1-12)$$

式中, $n+1$ 个节点应满足 $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ 。

式(1-12)称为拉格朗日(Lagrange)插值多项式。

表1-1列出DR440-50硅钢片的交流磁化曲线和损耗曲线的实测数据。

三、拉格朗日三点插值多项式的FORTRAN程序

设一元函数的 N 个节点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 存放于数组 $A(N)$ 中,对应的函数值 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 存放于数组 $Y(N)$ 中。对应插值点 X 的函数值为 F ,由此可以把式(1-11)写成如下形式,即

表1-1 DR440-50磁化曲线和铁损实测数据

序 号	$B_m(T)$	厚度 $\delta = 0.5\text{mm}$		厚度 $\delta = 1.0\text{mm}$	
		H $\times 10^3(A/m)$	P_o (W/kg)	H $\times 10^2(A/m)$	P_o (W/kg)
1	0.50	0.73	0.58	0.81	0.70
2	0.55	0.83	0.68	0.89	0.84
3	0.60	0.87	0.75	0.97	0.95
4	0.65	0.94	0.86	1.06	1.12
5	0.70	1.02	0.98	1.15	1.25
6	0.75	1.11	1.10	1.25	1.44
7	0.80	1.21	1.21	1.35	1.64
8	0.85	1.32	1.32	1.45	1.78
9	0.90	1.44	1.40	1.56	1.95
10	0.95	1.57	1.65	1.68	2.18
11	1.00	1.71	1.79	1.84	2.44
12	1.05	1.88	1.90	2.04	2.70
13	1.10	2.11	2.06	2.38	2.90
14	1.15	2.41	2.25	2.88	3.20
15	1.20	2.78	2.44	3.56	3.50
16	1.25	3.24	2.68	4.48	3.75
17	1.30	3.92	2.90	6.08	4.05
18	1.35	5.00	3.15	8.58	4.38
19	1.40	6.85	3.44	12.00	5.03
20	1.45	10.00	3.70	16.70	5.15
21	1.50	13.90	4.01	23.20	5.64
22	1.55	21.00	4.40	32.50	6.25
23	1.60	31.10	5.00	44.60	7.00
24	1.65	44.20		58.60	
25	1.70	60.20		80.00	
26	1.75	76.50		108.00	
27	1.80	10.000		140.00	

$$F = \sum_{k=i}^{i+2} \left(\prod_{\substack{j=i \\ k \neq j}}^{i+2} \frac{X - A_j}{A_k - A_j} \right) Y_k \quad (1-13)$$

式中, A_j 为 N 个节点中的第 j 个节点, $j = 1, 2, \dots, N$; Y_k 为对应 N 个节点中的第 k 个函数值, $k = 1, 2, \dots, N$; X 为给定的插值点; F 为对应于已知插值点 X 的插值函数; Π 为连乘积符号。

拉格朗日插值多项式, 在逻辑结构上表现为二重循环。内循环 (j 循环) 由累乘求得基本插值函数, 即

$$W_k = \prod_{\substack{j=i \\ k \neq j}}^{i+2} \frac{X - A_j}{A_k - A_j}$$

然后, 再通过外循环 (k 循环) 由累加得到拉格朗日插值多项式的结果, 即

$$F = \sum_{k=i}^{i+2} Y_k W_k$$

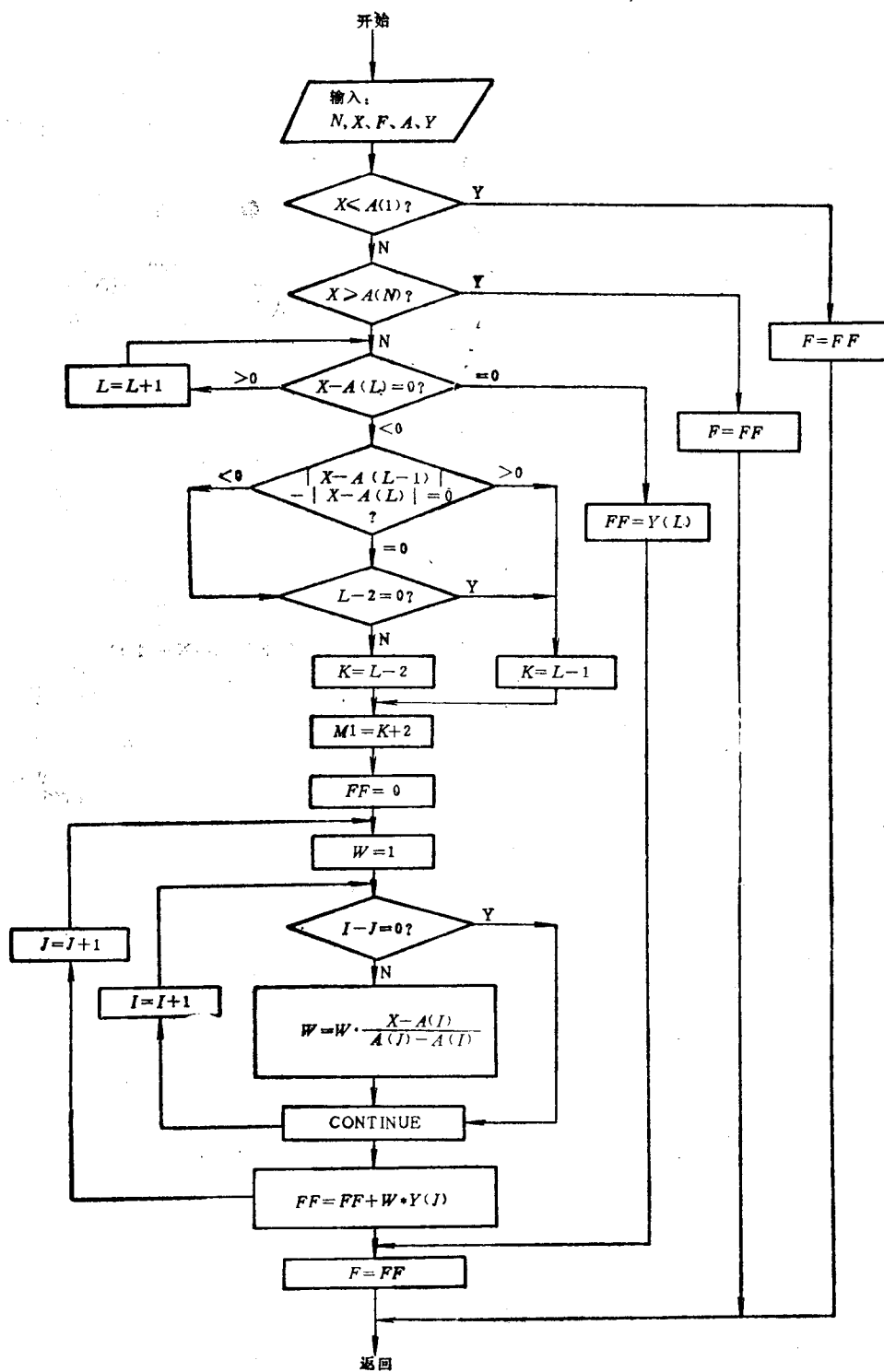


图1-3 插值多项式计算框图

拉格朗日三点插值计算流程图, 如图1-3所示。三点插值子程序名为 LAG1(A, Y, X, F, N), 子程序中哑元 (亦称形式参数) 变量 A 和 Y 是数组。L 是第一个循环变量, M 是循环终值参数。第一个循环是判断插值点 X 位于哪两个节点之间, 因此利用了条件转移语句判断 $X - A(L)$ 等于何值。第二个循环是要进一步确定 X 更靠近哪一个节点, 以便选取三个合适的节点进行计算。这里采用了条件转移语句判断 $|X - A(L-1)| - |X - A(L)|$ 为何值, 同时将下一个循环的初值参数 K 和终值参数 M1 确定下来。

式 (1-13) 在上机运算时采用了双重的循环, 以达到累乘和累加的目的。循环变量分别为 I 和 J。为了不使分母为零, 用判断语句 $I - J = ?$ 来防止溢出。

子程序 LAG1(N, A, Y, X, F) 中的哑元分别为: N 表示节点个数; A 表示节点数组 A(N); Y 表示节点函数数组 Y(N); X 表示给定插值点; F 表示对应插值点 X 的函数值。

在子程序中当 $X \leq A(1)$ 和 $X \geq A(N)$ 时采用线性插值。

子程序段如下:

```

SUBROUTINE LAQG1 (N, A, Y, X, F)
  DIMENSION A(N), Y(N)
  IF (X.GT.A(1)) GOTO 6
  FF=X*Y(1)/A(1)
  GOTO 45
6  IF (X-A(N)) 5, 9, 9.
9  FF=Y(N-1)+(Y(N)-Y(N-1))*(X-A(N-1))/(A(N)-A(N-1))
  GOTO 45
5  DO 20 L=1, N
    IF (X-A(L)) 25, 15, 20
15  FF=Y(L)
    GOTO 45
20  CONTINUE
25  IF (ABS(X-A(L-1))-ABS(X-A(L))) 26, 26, 27
26  IF (L.EQ.2) GOTO 27
    K=L-2
    GOTO 28
27  IF (L.EQ.N) GOTO 26
    K=L-1
28  M1=K+2
    FF=0.0
    DO 10 J=K, M1
      W=1.0
      DO 30 I=K, M1
        IF (I-J) 35, 30, 35
35  W=W*(X-A(I))/(A(J)-A(I))
30  CONTINUE
10  FF=FF+W*Y(J)
45  F=FF

```

RETURN

END

第二节 经验模型的应用

如前所述, 利用插值多项式求出磁化曲线相应的函数值 H , 具有较高的准确度。但是, 它要求占用更多的存储单元。如果存储单元有限, 为了节省存储单元, 可利用磁化曲线的近似表达式。所谓近似表达式就是以某种函数式来代表由测量得到的磁化曲线。

众所周知, 磁性材料品种很多, 其材料的性质受到材料成分、制造工艺和热处理工艺等随机因素的影响。因此, 随着磁性材料的性能的多因素影响, 磁化曲线的差异也很大。要想利用某种固定不变的函数关系来表达磁化曲线是不可能的。许多人对磁化曲线的近似表达式做过许多研究工作, 例如把磁化曲线分成几段, 用线性方程来表达, 用双曲线函数、指数函数和多项式等写出磁化曲线的近似表达式。若采用手工运算时, 求出各类表达式的系数就是一种繁复的工作, 利用磁化曲线近似表达式的优越性并不大, 还不如直接使用磁化曲线方便。

现在, 利用电子数字计算机做为工具进行运算, 可以不受上述的限制, 确定表达式内的回归系数也就容易多了。

下面介绍回归分析法

磁化曲线的实测数据 B 和 H 之间存在着非确定性的关系, B 是一个随机变量。随机变量之间的关系称为相关关系, 以区别变量间的确定性的函数关系。

研究随机变量之间的相关关系的手段是回归分析法, 这种方法通常是建立经验公式的有效方法。这种方法不只应用于建立磁化曲线的经验公式, 在电器技术中许多经验公式的建立都可以应用回归分析。有关回归分析的详细论述, 参看文献[1、2], 这里不再赘述。

假设已知磁性材料的一组实测数据如下:

B	B_1	B_2	B_3	$\dots$	B_k	$\dots$	B_n	$\dots$
H	H_1	H_2	H_3	$\dots$	H_k	$\dots$	H_n	$\dots$

为了在上机过程中运算比较方便, 可以选择多项式作为磁化曲线的经验模型 (即经验回归方程)

$$H = a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + a_3 B^3 + a_4 B^4 \quad (1-14)$$

式中, B 为磁感应强度, 多项式的自变量, 是随机变量; H 为磁场强度, 是对应于 B 的函数; $a_0, a_1, \dots, a_4$ 为回归系数。

还可以有其他一些多项式近似表达式, 不一一例举。式(1-14)比较简单, 进行微分或积分都很方便, 同时还可以保证相当高的准确度。式(1-14)中的回归系数可用最小二乘法求得。

回归方程式(1-14)还可以写成以下形式, 即

$$\hat{H} = \sum_{j=0}^4 a_j B^j \quad (j = 0, 1, \dots, 4) \quad (1-15)$$

式中, $\hat{H}$ 为区别于实测数值 H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的一个值。

要想用最小二乘法求得多项式系数, 则首先需要从磁化曲线实测数据中取 N 对 B 与 H 的数据 (其中使 $N > 4$), 把节点 (B_i, H_i) 代入多项式(1-14), 就有 N 个方程 (其中, $i = 1,$

2, ..., N)

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 B_1 + a_2 B_1^2 + a_3 B_1^3 + a_4 B_1^4 - H_1 &= R_1 \\ a_0 + a_1 B_2 + a_2 B_2^2 + a_3 B_2^3 + a_4 B_2^4 - H_2 &= R_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 B_N + a_2 B_N^2 + a_3 B_N^3 + a_4 B_N^4 - H_N &= R_N \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

由于多项式曲线不一定通过所有的节点(B_i, H_i), 方程式也就不完全等于零, 如式(1-16)右端项。我们称 R_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 为离差。离差 R_i 的和为

$$\sum_{i=1}^N R_i = \sum_{i=1}^N (\hat{H}_i - H_i), \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1-17)$$

离差 R_i 亦称剩余量, 它表示 N 个方程的误差。

为了解决正负离差相互抵消的矛盾, 可以取离差的绝对值, 由于离差绝对值运算不方便, 一般取离差的平方和, 即

$$\sum_{i=1}^N (\hat{H}_i - H_i)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^4 a_j B_i^j - H_i \right)^2 = \sum_{i=1}^N R_i^2 \quad (1-18)$$

从式(1-18)看出, 离差平方和是 a_j ($j = 0, 1, \dots, 4$) 的函数, 即

$$Q(a_0, a_1, \dots, a_4) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^4 a_j B_i^j - H_i \right)^2 \quad (1-19)$$

我们利用 N 对数据 (B_i, H_i) 求得的经验回归方程式应能表达一条最佳的磁化曲线, 含义就是接近 N 个点的磁化曲线。问题的实质也是求得一组最佳的回归系数 a_j ($j = 0, 1, \dots, 4$), 使离差平方和最小。因此, 为了选择适当的回归系数 a_j ($j = 0, 1, \dots, 4$), 我们可以应用微积分的知识, 求函数 $Q(a_j)$ 的极值, 即

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, 4)$$

由此可以得到一组联立方程组, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a_0} &= 0 & 2 \sum_{i=1}^n (a_0 B_i^0 + a_1 B_i^1 + a_2 B_i^2 + a_3 B_i^3 + a_4 B_i^4 - H_i) B_i^0 &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} &= 0 & 2 \sum_{i=1}^n (a_0 B_i^0 + a_1 B_i^1 + a_2 B_i^2 + a_3 B_i^3 + a_4 B_i^4 - H_i) B_i^1 &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_2} &= 0 & 2 \sum_{i=1}^n (a_0 B_i^0 + a_1 B_i^1 + a_2 B_i^2 + a_3 B_i^3 + a_4 B_i^4 - H_i) B_i^2 &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_3} &= 0 & 2 \sum_{i=1}^n (a_0 B_i^0 + a_1 B_i^1 + a_2 B_i^2 + a_3 B_i^3 + a_4 B_i^4 - H_i) B_i^3 &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_4} &= 0 & 2 \sum_{i=1}^n (a_0 B_i^0 + a_1 B_i^1 + a_2 B_i^2 + a_3 B_i^3 + a_4 B_i^4 - H_i) B_i^4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

现在可以把以上联立方程组, 写成矩阵的形式, 即

$$SA = H \quad (1-21)$$

或

$$A = S^{-1}H$$