前　言

在国家教育部和各级负责部门的领导和支持下，众多热爱教育事业的教师们正在坚持不懈地致力于教学改革. 我们根据高等学校工科数学课程教学委员会关于教学改革的建议和有关课程的教学基本要求，进行了工科数学一体化教学的改革与实践. 根据工科数学的内在联系，突破原有课程的界限，将微积分、线性代数、空间几何、概率论、数理统计初步、应用数学模型的内容有机结合，加强相互渗透，强调应用数学能力的培养，统一开设工科数学课程. 并组织编写了一套一体化数学教材，经三年多的教学实践，不断探索，不断完善，现在分上、下两册出版.

本书是湖南省普通高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革重点立项项目“工科数学课程体系、内容与教学方法改革的研究与实践”的研究成果，于2000年已规划为湖南省普通高等教育面向21世纪课程教材，同时也得到工科数学课程教学指导委员会主席马知恩教授的推荐与支持. 本书旨在传授数学知识的同时，着力于提高读者的良好的数学素养，培养读者应用数学知识解决实际问题的意识、兴趣和能力. 本书力求突出以下几个特点：

1. 课程设置模块化

将工科数学的教学内容按模块组合，分为一元函数微积分学模块、常微分方程与无穷级数模块、线性代数与空间几何模块、多元函数微积分模块、概率论与数理统计初步模块、应用数学模型模块，增加相互渗透，加强应用.

2. 教学内容整体优化

强调分析、代数、几何的有机结合，相互渗透. 本书将线性代数与空间几何组合成一个模块，加强了代数与几何的相互渗透. 在多元函数微积分部分充分利用向量、矩阵和线性代数中有关知识来表述分析中的有关内容. 例如，利用梯度、Hesse矩阵来表示多元函数的极值和多元函数Taylor公式中的系数.

3. 加强数学应用能力的培养

本书在每一模块后增设了一章应用数学模型，旨在培养读者应用数学知识解决实际问题的兴趣和能力，这些模型涉及的学科范畴广泛，诸如生态、人口、经济、医学、交通甚至日常生活各方面，使读者从建立模型，寻求方法到问题解决的全过程受到初步的训练.

4. 重视数学思想方法的传授

本书在讲解数学内容的同时，力求突出在解决实际问题中有重要应用的数学思想方法，揭示重要数学概念和方法的本质. 例如，在微分中体现局部线性化思想；在Taylor公式与无穷级数中体现逼近思想；在极值问题中体现最优化思想；强调微元分析法在实际问题中的应用，加强几何直观能力的培养等.

全书共分二十六章，第一、二、三、四、十六章由刘碧玉副教授编写，第七、十、十五、十九、二十五章由韩旭里教授编写，第五、六章由秦宣云博士编写，第八章由沈美兰教授编写，第九章由李军英副教授编写，第十一、十二、十三、十四章由刘商宏教授编写，第十七、十八章由谭丽芳副教授编写，第二十、二十一、二十二章由张孟秋副教授编写，第二

十三、二十四、二十六章由王国富博士编写.

在本书的编写出版过程中，中南大学应用数学与应用软件系高等数学教研室全体教师提出了许多宝贵意见，我们还参考了出版的同类教改教材，并得到了中南大学教务处、出版社有关同志的大力支持，在此一并表示衷心感谢.

本书得到了湖南省教育厅教学改革面向 21 世纪课程教材建设基金的资助，借此机会我们也一并表示感谢.

虽然我们尽了很大的努力，希望编写一本体现当今教学改革的高质量的教材，适应 21 世纪对人才的需要，但仍感差距很大，限于编者的水平，加之编写时间仓促，不妥与错误之处在所难免，我们恳请专家、同行和广大读者批评指正.

编　　者

二〇〇〇年六月

目录

第一篇　一元函数微积分学

第二篇　常微分方程与无穷级数

第一篇

一元函数微积分学

第1章　函数及其图形

函数是微积分的研究对象.为了准确而深刻地理解函数概念,集合、映射的知识是不可缺少的.本章将简要地介绍集合论中常用的一些基本概念,在此基础上重点介绍函数概念及其图形.

1.1　集合

1.1.1　集合的概念

在现代数学中,集合的概念已被普遍采用,集合论语言成为最通用的语言.然而,集合这个概念至今没有严格的数学定义.集合论的创始人康托(G. Cantor)是这样描述的:“集合是由我们直观感觉或意识到的确定的不同对象汇集而成的一个整体,这些对象称为此集合的元素.”

例如,“某大学一年级学生的全体”,“自然数的全体”,“某系统状态的全体”,都是一个集合.

集合也可简称为集,元素则可简称为元.

通常我们用大写英文字母 A,B,C 等表示集合,用小写英文字母 a,b,c 等表示元素.

若 a 是集合 A 的元素,则称 a 属于 A,记作 $a\in A$;若 a 不是集合 A 的元素,就称 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.

两个集合 A 与 B,若 B 中的每个元素都是 A 中的元素,则称 B 是 A 的子集,也称 B 被 A 包含,或 A 包含 B,记作 $B\subseteq A$.

若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与 B 相等,记作 $A=B$,否则 A 与 B 不相等,记作 $A\neq B$.

若 $B\subseteq A$,且 $A\neq B$,则称 B 是 A 的真子集,记作 $B\subset A$.

仅含有有限个元素的集合称为有限集,含有无穷多个元素的集合称为无限集.不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

例如,某大学一年级学生的全体组成的集是有限集;全体实数组成的集是无限集;方程 $x^2+1=0$ 的实根组成的集是空集.

集合的表示法通常有两种,一种是枚举法,即将集合的元素一一列举出来,写在一个花括号内,元素之间用逗号隔开.例如,由26个英文字母组成的集合可表示为

$$A=\{a,b,c,\cdots,y,z\}.$$

另一种是描述法,即把集合中各元素所具有的共同性质写在花括号内来表示这一集合.例如,

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x,y\text{ 为实数}\}$$

表示 xOy 平面上单位圆周上点的集合.一般地,若集合 A 是由具有性质 P 的元素 x 组成的,则把它表示为

$$A=\{x|P(x)\}.$$

1.1.2 常用集合

本课程主要涉及的集合有区间、邻域、区域、空间、n 维空间等.

通常,我们用以下字母表示特定的数集(设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$):

N:全体自然数集;**Z**:全体整数集;**Q**:全体有理数集;**R**:全体实数集.

区间是用得较多的一类数集.

闭区间$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

开区间$(a,b)=\{x|a<x<b\}$;

半开区间$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$;

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间都称为有限区间,数 $b-a$ 称为这些区间的长度.闭区间$[a,b]$与开区间(a,b)在数轴上表示出来,分别如图 1-1(a)与图 1-1(b)所示.若引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),记

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

这些区间称为无限区间,这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c)与图 1-1(d)所示.

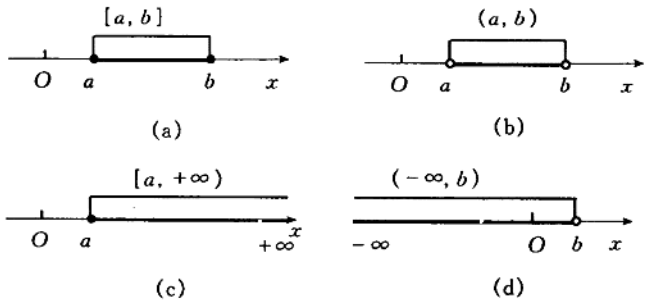


图 1-1

无限区间$(-\infty,+\infty)$就是全体实数集 **R**.

邻域也是经常用到的一类数集.开区间$(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$称为 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$(简记 $U(a)$),a 为此邻域的中心,δ 为半径,即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\}.$$

集 $U(\mathring{a},\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$称为点 a 的去心 δ 邻域,简记 $U(\mathring{a})$.

以上提到的区间和邻域的概念还可以进一步推广.

设 $P_0(x_0,y_0)$是 xOy 平面上的一个点,δ 是某一正数,与点 $P_0(x_0,y_0)$距离小于 δ 的点 $P(x,y)$的全体,称为点 P_0 的 δ 邻域,记为 $U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta)=\{P||P_0P|<\delta\}.$$

也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上,$U(P_0,\delta)$就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$为中心,$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$的全体,点 $P_0(x_0,y_0)$的去心 δ 邻域,记作

$$U(\tilde{P}_0,\delta)=\{P|0<|P_0P|<\delta\}.$$

下面将区间概念加以推广，引入区域概念.

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点，若存在点 P 的某邻域 $U(P,\delta)$ 使 $U(P,\delta)\subset E$ 则称 P 为 E 的内点. 显然，E 的内点属于 E.

如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集.

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点（点 P 本身可以属于 E，也可以不属于 E），则称 P 为 E 的边界点，E 的边界点的全体称为 E 的边界. 例如，

$$E_1=\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$$

中每个点都是 E_1 的内点，因此 E_1 为开集. 而 E_1 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$.

若在点 P 的任何邻域 $U(P)$ 内总有无穷多个点属于 E，则称点 P 为 E 的聚点，显然 E 的内点一定是 E 的聚点，E 的边界点也可能是 E 的聚点.

设 E 为开集，若对于 E 内任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 E，则称开集 E 是连通的.

连通的开集称为区域，也称开区域. 开区域连同它的边界一起组成的集称为闭区域. 例如，集 $E_1=\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 就是区域，$E_2=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 就是闭区域.

对于点集 E，若存在正数 M，使一切点 $P\in E$ 与某一定点 P_0 间的距离 $|P_0P|$ 不超过 M，即

$$|P_0P|\leqslant M$$

对一切 $P\in E$ 成立，则称 E 为有界点集，否则称为无界点集. 例如，前面的 E_2 集是有界闭区域，而集 $\{(x,y)|x+y>1\}$ 是无界开区域.

人们在研究实际问题时，通常在一个确定的范围来考虑，这种确定的范围通常称为空间. 换言之，空间就是我们讨论的所有事物构成的集合，又称全集. 全集是相对的，不同的问题有不同的全集. 例如，我们在实数范围内研究实数的大小时，把实数取作全集，也就是通常说的实数空间，即 $\mathbf{R}$ 空间. 引进数轴，数轴上的点与实数有一一对应关系，从而 $\mathbf{R}$ 空间表示数轴上一切点的集合，即直线. 在平面引入直角坐标系后，平面上的点与有序数组 (x,y) 一一对应，从而有序二元数组 (x,y) 的全体表示平面上一切点的集合，即平面，也称 $\mathbf{R}^2$ 空间. 一般地，有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 n 维空间，记为 $\mathbf{R}^n$，而 $\mathbf{R}$ 也称为一维空间，$\mathbf{R}^2$ 称为二维空间.

类似，在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义距离后，可定义 n 维空间中的点集、邻域、开集、区域等概念.

1.1.3 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差.

设 A,B 是两个集，由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

由同时属于 A 与 B 的元素构成的集称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x|x\in A \text{ 但 } x\notin B\}$$

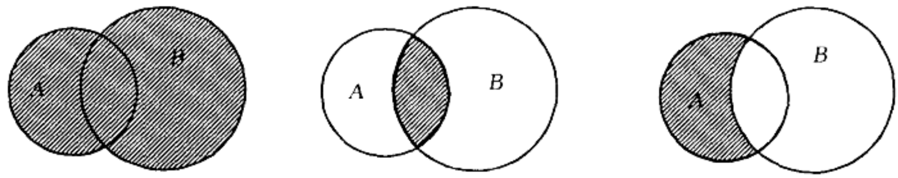
两个集合的并、交、差如图 1－2 所示阴影部分：

如果我们所讨论的问题是在一个全集 E 中进行，所研究的其他集合 A 都是 E 的子集，则

称 $E-A$ 为 A 的余(或补)集,记作 A^c,显然 $A\cup A^c=E, A\cap A^c=\varnothing$.

若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 不相交,若 $A\cap B\neq\varnothing$,则称 A 与 B 相交.

集合的交、并、余的运算满足下面的基本性质:



$A\cup B$　　$A\cap B$　　$A-B$

图 1-2

定理 1.1　设 A,B,C 为三个任意集合,则

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A\quad A\cap B=B\cap A$

(2)结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3)分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$

(4)幂等律:$A\cup A=A, A\cap A=A$

(5)吸收律:$A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$

$A\cup B=B, A\cap B=A$(其中 $A\subseteq B$)

$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$

(6)DeMorgan 律:$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

现仅证明 DeMorgan 律中的第一式,其余作为读者练习.

根据集合相等的定义,只要证明$(A\cup B)^c\subseteq A^c\cap B^c$ 且 $A^c\cap B^c\subseteq(A\cup B)^c$.事实上,因为若 $x\in(A\cup B)^c$,则 $x\notin(A\cup B)$,则 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,所以 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$,故 $x\in A^c\cap B^c$,即$(A\cup B)^c\subseteq A^c\cap B^c$,反向包含关系可类似证明.

集合的运算及性质都可推广到有限多个和无限多个集合的情形.

设 A,B 是两个非空集合,且 $x\in A, y\in B$,则称有次序的一对元素 x,y 为一个序偶,记作(x,y).由集合 A,B 中所有元素作成的序偶构成的集合,称为 A 与 B 的 Cartesian 乘积,记作 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$表示整个坐标平面,即 $\mathbf{R}^2$ 空间.

1.2　逻辑符号与逻辑命题

1.2.1　逻辑符号

很多数学概念写成包含有某些逻辑符号的表达式形式会带来方便.

符号 $\forall$ 称为全称量词,它可用来代替“对于任何的”,“对于一切的”,“不论对于什么样的”

等语句.

符号 $\exists$ 称为存在量词,它可用来代替"存在","可找到","有"等语句.

除了全称量词 $\forall$ 与存在量词 $\exists$ 外,还常常利用逻辑推理的符号 $\Rightarrow$ 及等价符号 $\Leftrightarrow$. 符号 $\Rightarrow$ 表示"推出"(一个命题由另一个推出),$\Leftrightarrow$ 表示在它两边的命题等价.

例如:集合 B 包含集合 A 可这样叙述:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

1.2.2 逻辑命题

一个命题就是一个陈述句. 这个句子陈述的事情或者是真的,或者是假的. 我们用字母 A, B, C 等来表示命题.

如果从命题 A 成立,能推出命题 B 正确,那么 A 就称做 B 的充分条件,而 B 就称为 A 的必要条件. 这个事实可写成 $A \Rightarrow B$,即"由 A 推出 B". 如果 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$,那么 A 称为 B 的充分必要条件,或 B 称做 A 的充分必要条件,也称 A 与 B 等价,记为 $A \Leftrightarrow B$.

与某命题 A 相反的命题,称为 A 的否定,记作 $\neg A$,显然对于非 A 的否定就是 A,即 $\neg(\neg A) = A$.

假定对于一切 $x \in M$ 有某性质 $\alpha(x)$ 成立,简记为 $\forall x \in M: \alpha(x)$.

这个命题的否定是:"至少可以找到一个元素 $x^* \in M$,使 $\alpha(x^*)$ 不成立". 即 $\neg \alpha(x^*)$ 成立.

可以证明关系式:

$$\neg(\forall x \in M: \alpha(x)) \Leftrightarrow \exists x^* \in M: \neg \alpha(x^*)$$

即在否定从量词 $\forall$ 开始的表达式时,结果 $\forall$ 要用量词 $\exists$ 来代换,而否定符号则转移到性质 $\alpha(x)$ 上,类似有:

$$\neg(\exists x^* \in M: \beta(x^*)) \Leftrightarrow \forall x \in M: \neg \beta(x)$$

即在否定从量词 $\exists$ 开始的表达式时,结果 $\exists$ 要用量词 $\forall$ 来代换,而否定符号转移到性质 $\beta(x)$ 上.

定理 1.2 当且仅当命题 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 成立时,命题 $A \Rightarrow B$ 成立,即

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$$

证:设 $A \Rightarrow B$,假定 $\neg B$ 成立,如果在此情况下 A 成立,则由条件 $A \Rightarrow B$ 便可推得 $\neg B \Rightarrow B$,而这是不可能的,所以有 $\neg B \Rightarrow \neg A$.

反之,设 $\neg B \Rightarrow \neg A$,由上面已证的事实,$\neg(\neg A) \Rightarrow \neg(\neg B)$ 即 $A \Rightarrow B$.

这个定理实际上是反证法的理论根据. 今后,当证明直接命题 $A \Rightarrow B$ 比证明其等价命题 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 困难时,将采用反证法.

我们还规定:A 与 B 是两个命题,则

$A \vee B$ 表示命题"A 或 B";

$A \wedge B$ 表示命题"A 且 B".

例 1.1 当 $a \neq 0$ 时,$ax^2 + 2bx + c > 0(\forall x \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow a > 0, b^2 - ac < 0$.

1.3 映射

映射是近代数学中的一个重要的基本概念,本课程的微积分部分将以某种特殊的映射——函数作为研究的对象.

定义 1.1 设 A,B 是两个非空集合，若对于每个 $x\in A$，按照某种确定的法则 f，有惟一确定的 $y\in B$ 与之对应，则称 f 为从 A 到 B 的一个映射，记作

$$f:A\to B \quad 或 \ f:x\mapsto y, x\in A.$$

其中，y 称为 x 在映射 f 下的像，记作 $y=f(x)$. x 称为 y 在映射 f 下的一个原像，A 称为映射 f 的定义域，记作 $D(f)$，A 中所有元素 x 的像 y 的全体所构成的集合称为 f 的值域，记作 $f(A)$，即

$$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}.$$

定义中 x 的像是惟一的，但 y 的原像不一定惟一，且 $f(A)\subseteq B$.

映射概念中有两个基本要素，就是定义域和对应法则，若 f,g 都是从 A 到 B 的映射，且 $\forall x\in A, f(x)=g(x)$，则称映射 f 与 g 相等，记作

$$f=g$$

对应法则就是由 A 中的元 x 确定 B 中的对应元 y 的方法，是两个集合 A 与 B 间对应关系的具体表现. 表示对应法则的方法很多.

例 1.2 设 A 表示某高校大学一年级学生所构成的集合，用一种方法给每个学生编一个学号，B 表示该校一年级学生学号的集合，f 表示编号方法，于是它就确定从 A 到 B 的一个映射 $f:A\to B$.

例 1.3 用 A 表示平面 $\mathbf{R}^2$ 上以坐标原点为中心的所有同心圆所构成的集合，通过求圆面积公式 $s=\pi r^2$，对于 A 中的每个圆确定了惟一的实数 $s\in\mathbf{R}$，于是它确定了从 A 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 $g:A\to\mathbf{R}$.

例 1.4 设 $A=\mathbf{R}^2, B=\mathbf{R}\times\{0\}=\{(x,0)\mid x\in\mathbf{R}\}$，由对应法则

$$h:(x,y)\in\mathbf{R}^2\mapsto(x,0)\in R\times\{0\}$$

确定了一个从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}\times\{0\}$ 的映射 h，在几何上，它就是平面上的点到 x 轴上的投影.

映射又称为算子或运算. 在映射的定义中，若 B 是实数集，则称映射 $f:A\to B$ 为泛函；若 A,B 都是实数集，则映射 $f:A\to B$ 就是通常的一元函数.

下面再介绍几种特殊映射.

定义 1.2

(1)设映射 $f:A\to A$，若 $\forall x\in A, f(x)=x$，则称 f 为 A 上的恒等映射或单位映射，记为 I_A.

(2)设映射 $f:A\to B$，若 $f(A)=B$，则称 f 是 A 到 B 上的一个满射；若 $f(A)\subset B$，则称 f 是 A 到 B 上的一个内射；若 $\forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2$ 时有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是单射.

(3)若映射 f 既是满射又是单射，则称 f 为一一映射或双射.

例 1.5 判断下列映射是满射，单射还是双射?

(1)$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x^2$；

(2)$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^3$.

解 (1)因为 $f(x)=2x^2$ 是最小值为零的开口向上的抛物线，小于零的实数没有原像，所以 f 不是满射，又对 $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=f(-x)=2x^2$，所以 f 也不是单射.

(2)$f(x)=x^3$ 是双射，因为 $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$，且 $x_1\neq x_2$ 时 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

类似例 1.2 中的映射 f 既是单射又是满射，即双射；例 1.3 中映射 g 是单射但不是满射；而例 1.4 中的映射 h 是满射但不是单射.

下面我们介绍复合映射与逆映射的概念.

定义 1.3

(1)设映射 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$. 对 $\forall x\in A$,通过映射 f,有确定的 $u=f(x)$与之对应,而对于这个 u,通过映射 g,有确定的 $y=g(u)$与之对应.从而对每一个 $x\in A$,有 $y\in C$ 与之对立,这样便得到一个从 A 到 C 的映射,记为 h.则称 h 为 f 与 g 的复合映射,记为 $h=g\circ f$,其中 $u=f(x)\in B$ 称为中间元,如图 1-3 所示.

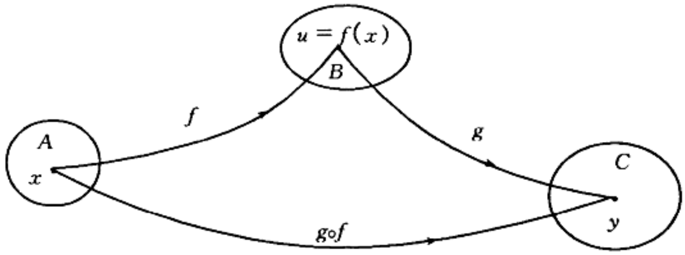


图 1-3

(2)设映射 $f:A\to B$,若存在一个映射 $g:B\to A$,使

$$g\circ f=I_A,f\circ g=I_B$$

则称 f 是可逆映射,且称 g 是 f 的逆映射,记作 $g=f^{-1}$.

两个映射的复合可推广到有限个映射的情形.容易证明,可逆映射的逆映射是惟一的.

定理 1.3 映射 $f:A\to B$ 可逆的充分必要条件是 f 是双射.

证 必要性 设 f 可逆,则存在惟一的 $g:B\to A$,使

$$g\circ f=I_A,f\circ g=I_B,$$

于是对 $\forall y\in B$,

$$y=(f\circ g)(y)=f[g(y)]$$

由于 $g(y)\in A$,这表明 B 中的每个元都是 A 中某个元在 f 下的像,所以 f 是满射.又若对 $\forall x_1,x_2\in A,x_1\neq x_2$ 时,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,即 f 是单射.事实上(反证),若 $f(x_1)=f(x_2)$,则必有

$$x_1=(g\circ f)(x_1)=g[f(x_1)]=g[f(x_2)]=(g\circ f)(x_2)=x_2$$

所以 f 是双射.

充分性 若 f 是双射,所以对每个 $y\in B$,存在惟一的 $x\in A$,使 $f(x)=y$,从而得到一个映射 $g:B\to A$,使 $g(y)=x$.可以证明 g 就是 f 的逆映射.事实上,对每个 $x\in A$,都有

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(y)=x$$

故 $g\circ f=I_A$,类似 $f\circ g=I_B$.因此 f 是可逆的.

例 1.6 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},f(x)=e^x;g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},g(x)=2x+1$,求 $f\circ g,g\circ f,g^{-1}$

解 $f\circ g=f[g(x)]=e^{2x+1}$,

$g\circ f=g[f(x)]=2e^x+1$,

$g^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}$

例 1.7 设 f 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的平移变换,即

$$f:(x,y)\mapsto(x',y')$$

其中 $x'=x+x_0, y'=y+y_0$,又 g 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上绕坐标原点逆时针方向旋转 θ 角的旋转变换,即

$$g:(x',y')\mapsto(\tilde{x},\tilde{y})$$

其中 $\tilde{x}=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \tilde{y}=x'\sin\theta+y'\cos\theta$. 则它们的复合映射 $g\circ f$ 就是平面 R^2 上的平移旋转变换,即

$$g\circ f:(x,y)\mapsto(\tilde{x},\tilde{y})$$

其中

$$\tilde{x}=(x+x_0)\cos\theta-(y+y_0)\sin\theta=x\cos\theta-y\sin\theta+\tilde{x}_0$$

$$\tilde{y}=(x+x_0)\sin\theta+(y+y_0)\cos\theta=x\sin\theta+y\cos\theta+\tilde{y}_0$$

而 $\tilde{x}_0=x_0\cos\theta-y_0\sin\theta, \tilde{y}_0=x_0\sin\theta+y_0\cos\theta$.

1.4 函数

1.4.1 函数的概念

函数是微积分研究的主要对象,它是客观世界中各种变量之间的相互依赖关系的反映. 本节利用映射来定义函数.

定义 1.4 设 A,B 是两个实数集,称映射 $f:A\to B$ 为一元函数,简称函数,记作

$$f:x\mapsto y=f(x), x\in A$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,$f(x)$表示函数 f 在 x 处的函数值,A 为 f 的定义域,记作 $D(f)$. $f(A)=\{y\mid y=f(x), x\in A\}$称为 f 的值域,记作 $R(f)$.

通常,“函数”一词指对应法则 f,但习惯上我们也用“$y=f(x)$”表示函数,此时应理解为“由对应关系 $y=f(x)$所确定的函数 f”.

事实上,一元函数就是 $\mathbf{R}$ 空间的子集到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,类似地我们可以定义二元函数为 $\mathbf{R}^2$ 空间中的子集到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,n 元函数为 $\mathbf{R}^n$ 空间中的子集到 R 的一个映射. 一般地,称映射 $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为 n 元向量值函数,记作

$$f:(x_1,x_2,\cdots x_n)\mapsto(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$

当 $m=n=1$,它就是一元函数.

作为两个实数集之间的映射,函数的定义中也有两个基本要素,就是定义域与对应法则. 函数的定义域就是自变量所能取得的那些数构成的集合. 在实际问题中,可根据函数的实际意义来确定. 在理论研究中,如果函数是数学表达式给出,又无需考虑它的实际意义,那么,函数的定义域就是使该表达式有意义的自变量 x 的所有值构成的数集. 对应法则是因变量 y 与自变量 x 之间函数关系的具体表现,它的表示方法常用的有:列表法、图示法和公式法.

所谓列表法,就是将自变量与因变量的对应数据列成表格,它们之间的函数关系从表格上一目了然.

在很多生产部门中常采用图示法表示函数关系. 例如,气象站用仪表记录下的气温曲线来表示气温随时间的变化关系;化工厂用温度压力曲线来表示温度与压力之间的函数关系等.

后面所研究的函数常用公式法表示. 用公式法表示的函数就是写出函数的数学表达式和定义域. 此时,对定义域中每个自变量的值,按照表达式中所给定的数学运算来确定因变量的值.

例 1.8 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解 要使式子有意义,x 必须满足条件:

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x-1>0\end{cases} \quad 即 \begin{cases}|x|\leqslant 2\\ x>1\end{cases}$$

得

$$1<x\leqslant 2$$

于是函数的定义域为$(1,2]$.

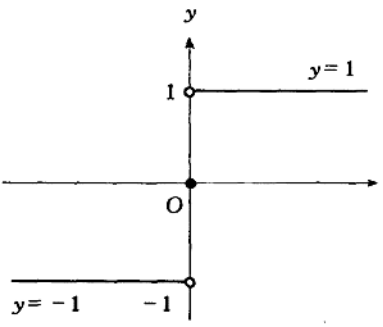


图 1-4

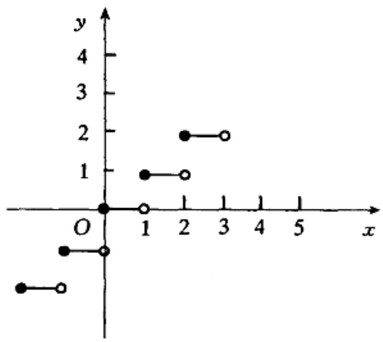


图 1-5

值得注意的是,在函数的定义中,并不要求在整个定义域上用一个表达式表示对应法则.有时可在定义域的不同子集上用不同的表达式来表示对应法则,我们称这种函数为分段函数.下列是几个分段函数例子.

例 1.9 符号函数(图 1-4)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0\\ 0,x=0\\ -1,x<0\end{cases}$$

例 1.10 取整函数 $y=[x]$($x\in\mathbf{R}$),其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.例如,

$$[-2.5]=-3,[0]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3$$

见图 1-5.

例 1.11 在电子技术中经常遇到的三角波,它的一个波形的表达式为:

$$u=u(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 2-t, & 1<t\leqslant 2\end{cases}$$

是一个分段函数见图 1-6.

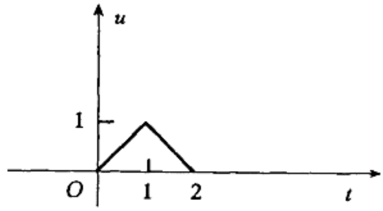


图 1-6

1.4.2 函数的图形

定义 1.5 称集合

$$\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D(f)\}$$

为函数 f 的图形,记为 $G(f)$.

函数 f 的图形是坐标平面上一些特定点(x,y)的集合,这种点的第二个坐标满足 $y=f(x)$,第一坐标$x\in D(f)$,见图 1-7.

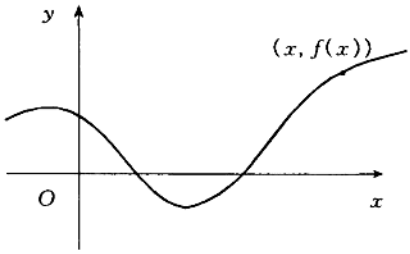


图 1-7

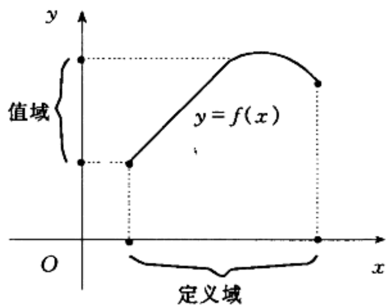


图 1-8

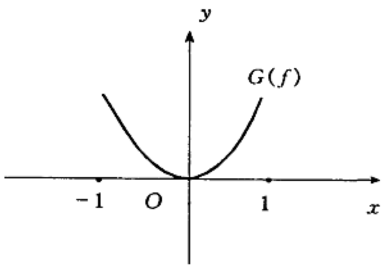


图 1-9

从 f 的图形 $G(f)$，我们可容易地从 x 轴上获得 f 的定义域，在 y 轴上获得 f 的值域，事实上，图形 $G(f)$ 在 x 轴上的垂直投影点集就是定义域 $D(f)$，在 y 轴上的垂直投影点集就是值域 $R(f)$，见图 1-8.

函数的图形是 xOy 平面上的一条曲线.

例如 函数 $f: x \mapsto x^2, x \in [-1,1]$ 的图形：

$$G(f) = \{(x, x^2) \mid x \in [-1,1]\}$$

就是区间 $[-1,1]$ 上的一条二次抛物线（见图 1-9）.

函数的图形给出了函数关系式最直观的特性，在数学研究中，将函数与其图形结合起来考虑问题是非常重要的.

例 1.12 设某两城市之间的长途电话费在最初的 3 分钟是 6.60(元)，以后的每一分钟(或不足一分钟)另加 1.65(元). 显然，长途电话费 C(单位为元)是通话时间 t(单位为分钟)的函数，试写出函数的公式表示，并描绘它的图形.

解 记长途电话费为 $C(t)$. 由于 $t>0$，于是函数的定义域为 $(0,+\infty)$，从给出的信息，我们有

$$C(t) = \begin{cases} 6.60 & \text{当 } 0 < t \leqslant 3 \text{ 时} \\ 6.60 + (n-2) \times 1.65 & \text{当 } n < t \leqslant n+1 \quad (n \geqslant 3) \end{cases}$$

利用取整函数符号，表达成

$$C(t) = 6.60 + 1.65 \cdot ([t]-2)\left(1 - \left[\frac{9}{t+6}\right]\right), t>0$$

长途电话费函数的图形如图 1-10.

1.4.3 函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在正数 M，使对于任意 $x \in X$，都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $y=f(x)$ 在集 X 上有界，否则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，若对于任意的 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，有

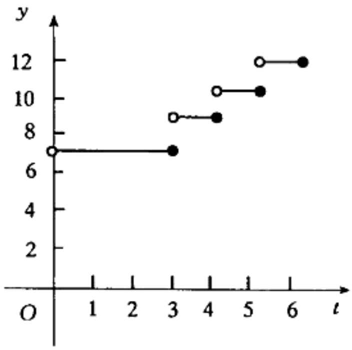


图 1-10

$$f(x_1)<f(x_2)\text{或}f(x_1)>f(x_2)$$

则分别称 $f(x)$ 是区间 I 上的单调增加函数或单调减少函数.

单调增加或单调减少的函数均称为单调函数.单调增加函数的图形是向右上方上升的曲线(见图 1-11);单调减少函数的图形是向右下方下降的曲线(见图 1-12).

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对任意 $x\in D$,都有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数;如果对任意 $x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形对称于原点,因为由定义可知,若 $(x,f(x))$ 是图形上一点,则与其关于原点对称的点 $(-x,-f(x))$ 也在图形上(见图 1-13).同理可以说明,偶函数的图形对称于 y 轴(见图 1-14).

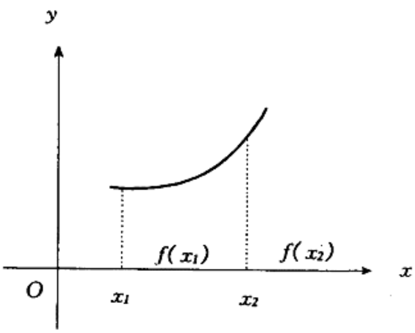


图 1-11

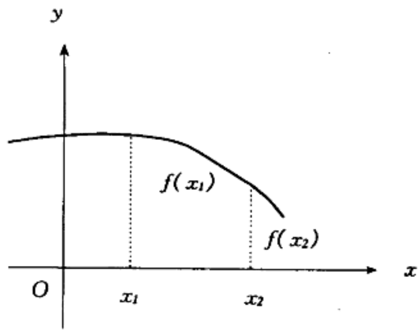


图 1-12

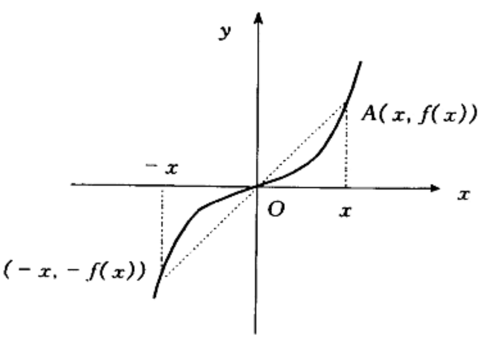


图 1-13

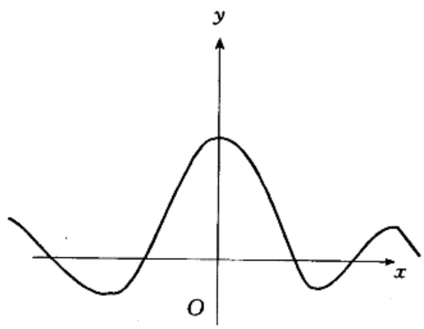


图 1-14