

13.12
科學圖書大庫

代數學基本結構

譯者 戴秉彝

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

代數學基本結構

譯者 戴秉彝

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人 林碧鏗 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十二年六月一日初版

代數學基本結構

定價 新台幣八十元 港幣十二元

譯者 戴秉彝 國立中興大學教授

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 臺北郵政信箱53-2號電話783686號

發行人 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 林碧鏗 郵政劃撥帳戶第15795號

印刷者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段161號 電話979739號

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同把人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之成就，已超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人有無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤為社會、國家的基本任務。培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如物理、數學、生物、化學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學。旨趣崇高，至足欽佩！

科學圖書是學人們研究、實驗、教學的精華，明確提供科學知識與技術經驗，本具互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的收穫。我國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年所可苛求者。因此，本部編譯出版科學圖書，引進世界科技新知，加速國家建設，實深具積極意義。

本基金會由徐銘信氏捐資創辦，旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利。民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，返國服務者十不得一。另贈國內大學儀器設備，輔助教學頗收成效；然審度衡量，仍嫌未能普及，乃再遠承國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧鏗氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱。「科學圖書大庫」首期擬定二千冊，凡四億言，叢書百種，門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。從事翻譯之學者五百位，於英、德、法、日文中精選最新基本或實

II

用科技名著，譯成中文，編譯校訂，不憚三復。嚴求深入淺出，務期文圖並茂，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，有敎無類，效果宏大。賢明學人同鑑及此，毅然自公私兩忙中，撥冗贊助，譯校圖書，心誠言善，悉付履行，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬菲薄，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，報國熱忱，思源固本，僑居特切，至足欽慰！

今科學圖書大庫已出版七百餘冊，都一億八千餘萬言；排印中者，二百餘冊，四千餘萬字。依循編譯、校訂、印刷、發行一貫作業方式進行。就全部複雜過程，精密分析，設計進階，各有工時標準。排版印製之衛星工廠十餘家，直接督導，逐月考評。以專業負責，切求進步。校對人員既重素質，審慎從事，復經譯者最後反覆精校，力求正確無訛。封面設計，納入規範，裝訂注意技術改善。藉技術與分工合作，建立高效率系統，縮短印製期限。節節緊扣，擴大譯校複核機會，不斷改進，日新又新。在翻譯中，亦三百餘冊，七千餘萬字。譯校方式分爲：(1)個別者：譯者具有豐富專門知識，外文能力強，國文造詣深厚，所譯圖書，以較具專門性而可從容出書者屬之。(2)集體分工者：再分爲譯、校二階次，或譯、編、校三階次，譯者各具該科豐富專門之知識，編者除有外文及專門知識外，尚需編輯學驗與我國文字高度修養，校訂者當爲該學門權威學者，因人、時、地諸因素而定。所譯圖書，較大部頭、叢書、或較有時間性者，人事譯務，適切配合，各得其宜。除重質量外，並爭取速度，凡美、德科學名著初版發行半年內，本會譯印之中文本，廣即出書，欲實現此目標，端賴譯校者之大力贊助也。

謹特掬誠呼籲：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者，與從事科學建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者。

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或聯袂而來譯校叢書，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。祈學人們，共襄盛舉是禱！

譯 序

本書係根據耶魯大學數學教授 George D. Mostow，約翰霍普金斯大學數學教授 Joseph H. Sampson，以及同校數學教授 Jean-Pierre Meyer 三氏合著之“代數學基本結構”(Fundamental Structures of Algebra)一書逐譯而來。原書出版時節正當美國數學教育改革十年之後，革新方向定妥時際，故內容已成為各大學科技學院學生代數學教課取材的準繩；而譯本的出版，亦恰值我國科學教育革新十年，數學課程改革塵埃落定之際。查閱內容，與部頒大學理工商各科應用數學課目頗多吻合。值得向國內讀者介紹。

譯文完全採用口語式，旨在使初學一讀即了解，而無文句上的隱晦，故未計工拙，但仍然注意到是我們自己語言，不顯雜外語文氣味。原著每章各節定義與定理以及命題等，均未編章次，譯本則加冠章號。意在引用之時節省字數，便利讀者查考。例如課文或證明中載（命題 2.8.4），則檢閱第二章第八節第四命題即知，餘仿此。至于專用術語，悉遵照部定數學名詞，如遇部本未及，則取通俗易解意義。例如單形（monomorphism），滿形（epimorphism）等是。

原本風行全球，國內台灣大學工科學生，一度曾經採作教材，中興大學應用數學系歷年來均指定為該系大二學生必讀的代數參考書之一。法國巴黎大學數學系主任 Roger Godement 教授，曾評介原本，略謂綱目及水準與其本人所著的 *undergraduate Algebra* 一書相若，而別具有微分方程式解法與張量代數兩章，例證與習題含量豐富，初學易讀，允稱為今日介紹代數學讀物中能找到最好的一普及本。

譯者逐譯本書的動機，實感於原著序文中談到“能真正精確使用其本國文字來談數學，曾經學好的，只是少數幾人而已……”，一段話的刺激。爲了使純科學能在我國真正生根，希望我國未來俊彥愛用中文來談這一世界性的科學——數學，而得躋于世界科學之林。特不揣謏陋立志要做這項工作，承師友們的鼓勵與協助，其間譯稿與校對，幾費兩年來的課餘時間，幸慶完成。復承徐氏基金會協助出版，于此特一併致謝忱！然尚自覺有未盡善之處

，則尤賴于我國有道諸先生不吝賜教斧政，幸甚！

戴秉彝 謹誌

中華民國六十二年元月

原 序

過去的半世紀中，物理，工程，及社會科學各方面的巨大進步，曾經以一種十分不同的角色分派於數學。數學的一種權威性質慣常最熟悉的顯然只不過是計算答案的被動工具而已。事實上這種觀點是決不正確的，但就決定大學的數學課程來說，却具有堅強的影響力。數學是許多近世科學理論的核心，不只是計算時的方略，而且更大量基本地用作表達科學理論的唯一語言，用這一成長出來的認識，使已往對數學看法的不適合逐漸變為更加明顯了。因此數學在科學裡面擔任組織與創造一部門，作為豐富地供應表達自然現象新方法之取用不竭的泉源。

把數學當作計算用的方略這個觀點，及解析幾何與微積分在大學數學課程中的傳統注重的造因，可以部分歸於受古典物理學，特殊是力學，及好用力學上類似方式以表示大自然定律這一幾乎不能根除的成見所影響。這個“撞球式”的大自然觀念依然堅持著，但它各方面的極限，經過長時間後已被了解；近世科學不能再局限於天真的觀念中，而其與數學連帶的部分（雖完全不可少）對科學來說決不是不適當的。從容處理抽象體系的能力已成為不可或缺的了。

然而就抽象體系說，數學中同等卓越的一支，代數學，却在大學課程中普遍地被遺忘了；的確，它幾乎全然經常被研讀科學學生的數學教育所遺棄，大大地妨碍到他們對數學的了解。本書祇目的在使讀物理學，工程學，及社會學等科學的學生對最重要的各種代數結構，及對數學家討論它們的方法能有所認識。書中所含資料是大學三或四年級以前通常未曾講授的，而這兒包括的多數題材並非專為理工科學生而貢獻的。所以本書一部分說是為一年級新生而設計的也不足驚奇。早在 1960 — 1961 年間，作者曾在約翰霍浦金斯大學成功地使用過本書原稿，本書前半部可供剛進大學而有一學期數學基礎的學生選修，後半部則限於曾經修過綫性代數同時也修過微積分的學生選讀。雖然，一般看來教材水準很高，但由我們經驗，知道大一新生學習起來，要比曾經修過解析幾何與微積分的大三、大四學生來得更快。理由是這樣的

，大一新生較低的數學經驗比較頑固的錯誤觀念容易補救，何況他們所遭遇的刺激，並不恰好是高中課程延伸的東西。在第一學期結束之前，我們便能以正確而明澈的數學語言對他們交談了。

教學上發生的許多困難，大都是由於數學語言障礙所致。能真正精確使用其本國文字來談數學，曾經學好的，只是少數幾人而已。而且這種精確習慣是不容易獲得的。只有學生時代正在學習這不習慣的數學語言時始有優先機會。及至學生對數學成語實際熟悉後，那簡單的數學陳述，對他纔會變得簡單。爲了使成語可以交通計，我們先對很熟悉的情況來應用，而當它既經設立時，新的題材便以遞增的速率貢獻出來。

本書第二部分主要是更詳細研究線性代數及其一些應用。讀完了這部分的學生，則對科學，工程課程以及高等數學各方面來利用線性代數解決問題，便有了良好準備。第十二章講到用線性代數以解微分方程式。應當一提的本書四、五兩章主要是供參考之用，其中大部分資料可以省略，其餘資料直到第八章可以縮成一學期教程。第十五章內對映像、關係、及等價班，以及含在等價班中幾個重要結構都作有正確討論。讀者可以發現當課程進行時有幾次適用該章作參考，第十六章論述張量代數，這是線性代數的特殊重要部分。雖然，一學年課程可能講授不到該章，但對一個已經融會了本書前部分的學生來說，對該章的資料應當不會有大困難的。

作者由實際教學經驗，獲知一般抽象觀念是不容易同化的，直到對特殊情況應用之後，纔能真正發生同感。本書曾用代數基本課本中不常能找到的一些特殊論題作一流覽，引導初學進入抽象觀念領域。據此，整數一章便專門注意到基本數論；多項式一章包括三次及四次方程式解法；群論章內含有施洛氏三定理。選擇這些特殊論題時，具有兩個目的在腦際：(1)它們分別給予重要知識，(2)它們對普遍觀念的處理提供一些有教育價值的事機。

最後我們願意對本書在大學課程中的地位作一講評。如上所述，經驗告訴我們，早在課程中教授一年代數學，可以加速學生的數學發展而強化他了解數學與學習數學的能力。進一步幫助對科學應用方面及高等數學課程方面提供一較好而平穩的準備。應當注意的，線性代數就科學與工程來說，在所頒發的標準數學課程中，要求得比較早。剛開始的學生能對這一水準的代數有所了解，則通常接連二學期的解析幾何*與微積分，希望可用兩學期代數與接連四學期微積分代替，這是既實用而又樂意的。本計劃的重要性在於能便

*第八章內含有相當多的解析幾何討論。

利優秀學生在頭一年同時接受代數與微積分，因此使其能以兩年時間代替三年受完所要求的基本數學。

我們在這兒利用機會對 James Sauve S. J. 先生的許多提議，對手稿準備時所作有價值的貢獻，以及使我們能避免錯誤與混淆的幫助，表示我們萬分的感謝！

莫思趙 (George D. Mostow)

閃辟遜 (Joseph H. Sampson)

麥耶爾 (Jean-Pierre Meyer)

特殊符號表

J	正整數系
Z	整數環
Z_m	以 m 爲模的餘數班環
Q	有理數體
R	實數體
C	複數體

a^j_i 矩陣中第 j 列與第 i 列的元素

a^j 矩陣的第 j 列

a_i 矩陣的第 i 列

${}^t a$ 矩陣的轉置

a 矩陣的伴隨

δ^j_i 克羅尼開條件

$\text{Tr } a$ 矩陣的踪

$\det a$ 矩陣的行列式

$\text{mat } B, B' T$ 線性映像關於一雙基 B, B' 的矩陣

K^m, K_n, K'^n 各爲 $m \times 1$, $1 \times n$, 及 $m \times n$ 諸矩陣的集合, 具有諸係數在 K 中

$\text{Ker } T, \text{Im } T$ 核, 像

$\text{Hom}(U, V)$ 同形空間

$f : S \rightarrow T$ 映像符號

$f \circ g$ 二映像的合成

$\langle f, x \rangle$ 內積

$u \times v$ 矢量積

$A \times B$ 卡迪遜氏積

$u \wedge v$	外積
$\otimes$	張量積符號
$\oplus$	直和
$*$	對偶算子
$\#E$	集合 E 中元素的數目
$H \cap K$	交集
$\cong$	同構符號
$\langle a \rangle$	由 a 生成之循環子群
$\text{End } V$	V 的放任形代數
$T_1 \sim T_2$	相似
$GL(U)$	一般線性群
$B[t]$	t 附益於 B 環
$K(x)$	有理函數體
$[1, b]$	段落
(a, b)	最大公因子 (數)

目 錄

譯序

原序

特殊符號表

第一章 二元運算與群

1.1 概說.....	1	1.6 群.....	12
1.2 集合與映像.....	1	1.7 同構形與同形.....	16
1.3 二元運算.....	5	1.8 群公理再陳述.....	20
1.4 結合公理.....	8	1.9 具有二元運算的各系： 環，整環，體.....	21
1.5 交換公理.....	11		

第二章 環、整環、整數

2.1 概說.....	28	2.6 有限與可數集合.....	42
2.2 有兩個二元運算的體系 ：環與整環.....	28	2.7 數學歸納及它的應用...	43
2.3 有序整環.....	32	2.8 基本數論.....	53
2.4 整數系.....	36	2.9 整數的記法.....	61
2.5 說明.....	39	2.10 基本數論續：同餘式...	65
		2.11 定理 2、4、4 證明.....	77

第三章 體、有理數

3.1 概說.....	80	3.4 小數.....	88
3.2 體.....	80	3.5 二項式定理.....	94
3.3 有理數體.....	84		

第四章 實數系

4.1 概說.....	100	4.2 柯犀敘列與極限.....	102
-------------	-----	------------------	-----

4.3 實數體.....	108	4.4 R 的某些性質.....	111
--------------	-----	--------------------	-----

第五章 複數體

5.1 -1 的平方根	119	解說.....	126
5.2 C 的結構；四元數.....	123	5.4 C 中的柯犀絛列與無窮	
5.3 複數加法及乘法的幾何		級數.....	130

第六章 多項式

6.1 概說.....	134	6.4 多項式的根.....	149
6.2 未定元，或變元.....	134	6.5 含幾個變元的多項式...	154
6.3 多項式的因子分解.....	141	6.6 少於五次的多項式.....	159

第七章 有理函數

7.1 概說.....	164	7.3 分項分式.....	166
7.2 有理函數.....	164		

第八章 矢量空間與仿射空間

8.1 概說.....	172	8.7 線性方程式的一定理...	181
8.2 基本定義.....	172	8.8 矢量空間的維度研究...	183
8.3 公理的一些結論.....	173	8.9 基矢量.....	185
8.4 一些重要實例.....	174	8.10 仿射空間.....	189
8.5 子空間.....	177	8.11 歐氏空間.....	200
8.6 線性獨立與維度.....	179	8.12 解析幾何.....	206

第九章 線性變換式與矩陣

9.1 概說.....	218	9.7 基的改變.....	239
9.2 記法約定.....	218	9.8 矩陣的秩；線性方程式	
9.3 線性映像.....	219	；子空間.....	243
9.4 線性映像集合中的運算	223	9.9 對角線形化法.....	247
9.5 線性變換式與矩陣.....	227	9.10 商空間.....	258
9.6 矩陣的運算.....	232	9.11 模.....	262

第十章 群與排列

10.1 概說.....	267	10.5 變換群；施洛氏定理....	283
10.2 基本性質.....	267	10.6 約旦賀德爾定理.....	292
10.3 排列.....	269	10.7 有限亞培爾氏群.....	298
10.4 子群與商群.....	276		

第十一章 行列式

11.1 概說.....	304	11.4 特徵多項式.....	316
11.2 行列式的公設.....	305	11.5 特徵值與特徵向量.....	323
11.3 某些應用.....	310	11.6 行列式好像體積.....	331

第十二章 算子環與微分方程式

12.1 概說.....	339	程式.....	352
12.2 環與同形.....	339	12.7 求特解與通解.....	359
12.3 環同形.....	341	12.8 三角函數.....	365
12.4 微分算子.....	345	12.9 方程式系.....	368
12.5 某些微分公式.....	350	12.10 單參數群及無限小生成 素.....	376
12.6 具常係數的線性微分方			

第十三章 約旦正規式

13.1 概說.....	378	13.8 相似問題.....	406
13.2 基本線性映像.....	379	13.9 基本因子.....	409
13.3 直和分解.....	381	13.10 基本因子與相似性.....	418
13.4 等零元映像.....	388	13.11 模，扭轉階，及有理規 範式.....	421
13.5 特徵子空間.....	394	13.12 有限生成的亞培爾氏群	429
13.6 約旦正規式.....	397		
13.7 約旦正規式的唯一性..	405		

第十四章 二次式與厄米特氏式

14.1 概說.....	431	14.5 化成對角線式.....	444
14.2 線性函數、對偶空間.....	431	14.6 厄米特氏式；單式映像	450
14.3 雙線性函數.....	436	14.7 歐氏矢量空間.....	456
14.4 二次式.....	439	14.8 正交基.....	460

14.9 富里哀級數，柏塞爾氏 不等式.....	464	線化.....	471
14.10 厄米特氏矩陣的特徵值	468	14.12 單式矩陣.....	475
14.11 兩厄米特氏式同時對角		14.13 定向三度空間中的矢量 積.....	477
		14.14 n 度空間的解析幾何...	483

第十五章 商結構

15.1 映像.....	493		503
15.2 關係.....	495	15.7 含有多項式一根之體的 結構法.....	506
15.3 商集合.....	496	15.8 諄論的避免.....	508
15.4 商集合上的二元運算...	498	15.9 基數上的柏希坦氏定理	508
15.5 整環的商體結構.....	502		
15.6 從有理數體構造實數體			

第十六章 張 量

16.1 概說.....	512	16.7 張量的收縮.....	536
16.2 張量積.....	512	16.8 對稱性質.....	541
16.3 兩個因子以上的張量積	518	16.9 度量.....	546
16.4 映像的張量積.....	522	16.10 外代數.....	550
16.5 矢量空間的張量代數...	525	16.11 布魯開坐標；對偶.....	560
16.6 基與分量.....	532	16.12 反稱張量.....	571

名詞索引(中英對照).....	575
-----------------	-----

第一章 二元運算與群

1.1 概說

本章內將列舉的公理皆倚靠用原始數值計算—例如相加相乘—得來的經驗所賦與。每個這種運算，必然用兩個已知數與另外一數相結合，相加使得它們的和，相乘使得它們的積。這兒假定我們有某種運算，用兩件東西（無須爲數）與另一件東西結合，我們將研究這事所取的一種結果。我們假定該一運算服從某些規律，或公理。本章內我們將設立兩個主要公理，它們將來便可作爲一數學體系，所謂群者，的定義基礎，同樣的許多公理在以後各章內將再會遇見。這種公理需要一些解說，以下各節將作詳細討論。

1.2 集合與映像

我們紀述一些近世數學中常用術語作爲開端。集合一詞與聚合同義。一個集合是某些東西的一聚合，這些東西通常叫做這一集合的元素。集合以及它們的元素將常以拉丁字母表示。如果 S 表示一集合，於是“設 x 是 S 的一元素”這樣一個片語有下列含義：我們希望談談關於自 S 選取出來的一隨意元素，這元素在即將發生的通盤討論中被視爲固定的。爲了談論的方便，我們給它取個臨時名字叫 x （或另外更適當的符號）。因此，這兒 x 對整個 S 來說不表示一固定元素（除非另有說明），寧可視爲一“變元”或一“隨意元素”；它的意義只在討論時在我們腦海中是固定的。

集合 S 的一部分當然是它本身的一集合。 S 的一部分也叫做 S 的一子集。我們用某些很簡單的實例—的確是平凡的實例來作說明。它們只供說明怎樣運用語言之用，並未要求有很大的精確性，這是應當瞭解的。

例1. 設 S 表示一集合（付）撲克牌。因此， S 含有52個元素（卡）。我們說，若 x 是 S 的一元素，則 x 佔有諸符號 $2, 3, \dots, 9, J, Q, K, A$ 而顏色爲紅或黑之一。我們說集合 R 是由 S 中所有帶紅色的元素 x 構成，於是我們可定義 R 是 S 的一子集。這裡我們曾經以紅色條件課予 x ；它現在是代表