微积分基础

下册

陈伟侯　翟连林　段云鑫　编著

$f'(x)=0$　$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{2v}{\sqrt{v^2+1}}$

$y'_x=\dfrac{x+y}{x-y}$　$y''=0$

$\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$　$\boxed{f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

$\displaystyle\int\frac{x^3}{x+1}dx$　$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\displaystyle\int\frac{\cos 2\theta}{\sin^2\theta+1}d\theta$　$\displaystyle\int\sin t\,dt$

$\displaystyle\int f(u)du$　$\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$　t

科　学　出　版　社

微积分基础

下册

陈伟侯　翟连林　段云鑫　编著

[illegible][illegible]出版社

1984

内 容 简 介

为满足读者自学微积分和提高青年教师教学水平的需要，本书作者积多年教授微积分的经验，以通俗易懂的语言，由浅入深的安排、逻辑严谨的结构，系统地介绍了一元微积分的基本概念、运算法则和定理等：书中以“无限变化过程”为纵线贯穿了各章内容，使读者不仅懂得微积分基本概念的形成，而且也明了其进一步深化的全过程，为便于自学，书中列举了丰富的实例．本书分上、下两册(上册讲一元函数微分学、下册讲积分学及级数、常微分方程初步)，这本是下册．

本书可供自学青年、业余大学或电视大学学员等自学用，亦可供高中数学教师以及医科、农科、财经等院校的一年级大学生等参考．

微积分基础

下 册

陈伟侯　翟连林　段云鑫 编著

责任编辑　徐一帆

科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年10月第一版　开本：787×1092 1/32
1984年10月第一次印刷　印张：11 1/4
印数：0001—16,600　字数：222,000

统一书号：13031·2705
本社书号：3723·13—1

定价：1.75 元

目　　录

第八章　不 定 积 分

第一节　原函数与不定积分的概念

1.1　原函数

微分学的基本问题是已知一个函数，要求它的导函数．例如，已知直线上质点运动方程（即位移对时间的依赖关系）为

$$s = f(t),$$

要求质点在时刻 t 的速度，只要将 $f(t)$ 对 t 求导数，即

$$v(t) = f'(t).$$

在许多科学领域及生产实际中，还遇到与上述问题相反的问题：已知一个函数的导函数，要求这个函数．例如，已知直线上质点运动的速度为

$$v = v(t),$$

要将位移 s 表示为时间的函数．

这种已知一个函数的导数，要求这个函数（我们称它为导数的原函数）的问题，是积分学的第一个基本问题．下面，我们给出原函数的定义．

定义　设函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义．如果对于 (a, b) 内任意一点 x，都有

$$F'(x) = f(x)$$

或

$$dF(x) = f(x)dx,$$

那么,就称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的一个原函数.

例 $\because \quad (\sin x)' = \cos x,$

$\therefore \quad \sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数;

$\because \quad (\sin x + 100)' = \cos x,$

$\therefore \quad \sin x + 100$ 是 $\cos x$ 的一个原函数;

$\because \quad (\sin x + C)' = \cos x$ (C 是任意给定的一个常数),

$\therefore \quad \sin x + C$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

从上例我们可以看到，给了一个函数，它的导数是唯一的. 但是,给定一个函数,与它相应的原函数就不是唯一的,而有无限多个.

1.2 不定积分

对于给定的函数 $f(x)$,如果它有一个原函数 $F(x)$,由于常数的导数是 0,那么，$F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数.因此，$F(x) + C$（C 是任意给定的常数）表示了 $f(x)$ 的无限多个原函数.

读者会问,这无限个原函数（即表示为 $F(x) + C$）是否将 $f(x)$ 的每一个原函数都包含在内了呢? 换句话说,$f(x)$ 的任何一个原函数是否都能表示成 $F(x) + C$ 的形式? 回答是肯定的,我们有下列定理.

定理　如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $f(x)$ 的任何

一个原函数都可以表示为 $F(x)+C$（C 是某一常数）。

证明：设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的另一个原函数，那么

$$F'(x)=f(x),\quad G'(x)=f(x).$$

设新函数 $\varphi(x)=G(x)-F(x)$，

则 $\varphi'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ 在 (a, b) 上恒成立。

根据微分学中值定理，可知

$$\varphi(x)=C\ (C\text{ 是常数}),$$

即 $G(x)=F(x)+C$.

因此，$F(x)+C$（C 是任意常数）就代表了 $f(x)$ 的全体原函数。

$f(x)$ 的全体原函数还有另一个专门名称，我们定义如下：

定义 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么，$f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$（C 是任意常数）叫做 $f(x)$ 的不定积分，记作

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

此处 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量，C 叫做积分常数，符号 $\int$ 叫做积分号.

积分号是指明运算的符号，表示对所给的函数 $f(x)$ 求其全体原函数，例如

$$\int\cos x dx=\sin x+C;$$

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$$

这里要强调，求导数与求原函数(不定积分)是两种互逆的运算. 看下列几个式子:

$$\left[\int \cos x dx\right]' = [\sin x + C]' = \cos x;$$

$$\int x^2dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx = \frac{x^3}{3} + C;$$

$$d\left[\int \frac{1}{\cos^2 x} dx\right] = \left[\int \frac{1}{\cos^2 x} dx\right]' dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx;$$

$$\int dx^5 = \int 5x^4dx = x^5 + C.$$

从上面的式子可以看出，对一个函数先求它的不定积分再微分，其结果还是该函数;对一个函数先微分再求它的原函数，其结果与该函数只差一个常数.

我们再把上述式子写成一般的形式:

$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$ [先求不定积分，后求导数]

$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$ [先求不定积分，后求微分]

$\int F'(x)dx = F(x) + C$ [先求导数，再求不定积分]

$\int dF(x) = F(x) + C$ [先求微分，再求不定积分]

注意，今后往往把求导数或求微分的运算统称为微分运

算（或微分法）．把求原函数或不定积分的运算统称为积分运算（或积分法）。

1.3 不定积分的几何意义

假定 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，一般说来，在坐标平面上，$F(x)$ 的图形是一条曲线，这条曲线就叫做 $f(x)$ 的积分曲线．

如图 8-1，将这条曲线沿着 y 轴方向平移，经过 $(0, C_1)$，此时曲线的方程就是

$$y = F(x) + C_1.$$

若平移到经过 $(0, C_2)$，此时曲线的方程就是

$$y = F(x) + C_2.$$

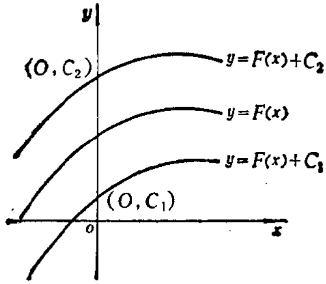

图 8-1

这就说明，$f(x)$ 的无穷多个原函数对应于无穷多条积分曲线，其中每一条都可以由曲线 $y = f(x)$ 沿着 y 轴的方向平移而得到．在横坐标相同的点上，这些曲线的切线都是互相平行的．就这个意义讲，可将这些曲线看作彼此平行．

因此，一个原函数的几何意义是一条积分曲线，而不定积分代表上述互相平行的全体积分曲线，叫做积分曲线族．

第二节　不定积分的简单性质和基本积分表

为了求不定积分（或叫做计算不定积分），先介绍一些不定积分的简单性质和基本积分公式(即基本积分表)。

2.1　不定积分的四个简单性质

不定积分有下面四个简单性质：

(1)　$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x),$$

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx;$$

(2)　$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

(3)　$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k \neq 0，是常数);$$

(4)　$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

要注意，$\int f(x)dx$ 不只代表一个函数，而是相互之间只差一个常数的无限个函数.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

不是两个函数之间的相等，而是两个函数集合的相等。

下面根据不定积分的定义来证明：

(1) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数．由原函数定义知

$$F'(x)=f(x),$$

由不定积分定义知

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

又任意常数 C 的导数为零，于是

$$\left[\int f(x)dx\right]'=[F(x)+C]'=F'(x)=f(x).$$

进一步就得

$$d\left[\int f(x)dx\right]=\left[\int f(x)dx\right]'dx=f(x)dx;$$

(2) 由(1)可知

$$\left[\int F'(x)dx\right]'=F'(x),$$

但 $[F(x)+C]'=F'(x)$，由上一节定理知

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,$$

由 $F(x)=F'(x)\,dx$，就得

$$\int dF(x)=F(x)+C;$$

(3) 由(1)知 $\left[\int kf(x)dx\right]'=kf(x),$

由导数性质知 $\left[k\int f(x)dx\right]'=k\left[\int f(x)dx\right]',$

由(1)知 $k\left[\int f(x)dx\right]'=kf(x),$

由上节定理知

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$$

(4) 由(1)知 $\left[\int[f(x)+g(x)]dx\right]' = f(x)+g(x)$,

由导数性质知

$$\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right]' = \left[\int f(x)dx\right]' + \left[\int g(x)dx\right]',$$

由(1)知

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x), \quad \left[\int g(x)dx\right]' = g(x),$$

所以

$$\left[\int[f(x)+g(x)]dx\right]' = \left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right]'.$$

由上节定理知

$$\int[f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

2.2 基本积分表

由第五章求导数的基本公式可以推得求不定积分的基本公式,现在开列于后:

(1) $\int 0dx = C \qquad [\because \quad dC = 0]$

(2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$

$\left[\because \quad d\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = x^{\alpha}dx, \ (\alpha \neq -1)\right]$

(3) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C \qquad \left[\because \quad d\ln|x| = \dfrac{dx}{x}\right]$

(4) $\int e^x dx = e^x + C \qquad [\because \quad de^x = e^x dx]$

(5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad \left[\because \quad d\,\dfrac{a^x}{\ln a} = a^x dx\right]$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C \qquad [\because \quad d \sin x = \cos x dx]$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

$[\because \quad d(-\cos x) = \sin x dx]$

(8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

$\left[\because \quad d \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx\right]$

(9) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

$\left[\because \quad d(-\operatorname{ctg} x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} dx\right]$

(10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\left[\because \quad d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(11) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$\left[\because \quad d \operatorname{arctg} x = \dfrac{dx}{1+x^2}\right]$

2.3 求不定积分的例题

根据前面介绍的简单性质(3)和(4)及基本积分表，可以

求一些较简单的不定积分.

例 1 $\int(2x^2+3x-5)dx=\int 2x^2dx+\int 3xdx-\int 5dx$

$$=2\int x^2dx+3\int xdx-5\int dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-5x+C^*;$$

例 2 $\int\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{6}})dx$

$$=\int x^{\frac{2}{3}}dx-\int x^{\frac{1}{6}}dx$$

$$=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}+C$$

$$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C;$$

例 3 $\int\mathrm{tg}^2xdx=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx$

$$=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2x}dx-\int dx$$

$$=\mathrm{tg}\,x-x+C;$$

例 4 $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)^2dx=\int\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

---

* 我们把多个任意常数之和记为一个任意常数 C。

$$= \int dx - 2\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C;$$

例 5 $\displaystyle \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos x dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C.$$

以上各例，都是利用不定积分的两个简单性质及一些代数和三角的恒等变换，将一个比较复杂的积分，化成若干个可以查基本积分表的积分.

第三节 换元积分法

这一节介绍与复合函数求导数相联系的换元积分法.

如果 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数，$u = \varphi(x)$ 可导，利用复合函数求导数法则，容易证明

$$\int f(u)du \xlongequal{u=\varphi(x)} \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

立足于这个等式，可以导出计算不定积分的两个换元方法.

3.1 第一换元积分法

定理 1（第一换元法则） 如果 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函

数，$u=\varphi(x)$ 可导，那么，$F[\varphi(x)]$ 就是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的一个原函数.

证明：$F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数 $\Rightarrow F'(u)=f(u)$，

$$\left.\begin{array}{l} u=\varphi(x)\ \text{可导} \\ F'(u)=f(u) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dF[\varphi(x)]}{dx}=f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

$\therefore\quad F[\varphi(x)]$ 是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的一个原函数.

这个法则的使用过程，可以用框图描述如下：

要求 $\int g(x)dx$，但无已知公式可用

$\Downarrow \longleftarrow$ 凑出 $g(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

化为求 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

$\Downarrow \longleftarrow$ 令 u 代替 $\varphi(x)$

化为求 $\int f(u)du$

$\Downarrow \longleftarrow$ 有已知公式可用

$\int f(u)du=F(u)+C$

$\Downarrow \longleftarrow$ 令 $\varphi(x)$ 代替 u

$F[\varphi(x)]+C$

$$\therefore\quad \int g(x)dx=F[\varphi(x)]+C.$$

使用第一换元法则，关键在于两步：第一步是将被积函数 $g(x)$ 凑成 $f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$，从而被积表达式变成 $f(u)du$；第二步是 $f(u)$ 的原函数 $F(u)$ 是易从已知公式求得的. 因为要将以 x 为自变量的被积表达式凑成新变量 u 的被积表达