职工文化补课辅导读物

中学数学系列练习（六）

高中数学自我测验题

张世魁 主编　邵玉珍 励沄赐 马骏 编著

地质出版社

职工文化补课辅导读物

中学数学系列练习（六）

高中数学自我测验题

张世魁　主编　邵玉珍 励沄赐　马　骏　编著

地质出版社

职工文化补课辅导读物

中学数学系列练习（六）

高中数学自我测验题

张世魁　主编　邵玉珍　励耘赐　马　骏　编著

*

责任编辑：张　瑚

地质出版社出版

（北京西四）

北京丰华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32 印张：8　字数：172,000

1984年9月北京第一版·1984年9月北京第一次印刷

印数：1—126,430册　　定价：1.00　元

统一书号：7038·新145

前　　言

发展国民经济，实现四化建设，必须依靠科学技术进步；而推动科学技术进步，首先要有大批的人才。这就必须把智力开发提到现代化建设的重要地位，大力发展包括职工教育在内的各类教育事业，普遍提高干部和职工队伍的素质，提高他们的政治、文化、技术和管理水平。

目前，举国上下都十分重视智力开发问题，广开学路，采取多种形式办学，各类职工学校和培训班迅速发展起来，广大职工自学互帮，学文化，钻技术，蔚然成风，职工教育出现了前所未有的新形势。

现在的青壮年职工是九十年代经济建设的主力军，他们的文化技术培训是当务之急。为了适应广大青壮年职工进行中学文化补课的急需，使他们能利用业余时间，通过自学尽快掌握中学各门课程，达到高中文化程度，在条件允许的情况下参加电大、职大、函大等各类职工大学的入学考试，或通过自学达到大专文化水平，我们特组织编写了这套“职工文化补课辅导读物”，共包括十门基础课，十四个分册：

中学数学系列练习（一）初中代数

中学数学系列练习（二）平面几何

中学数学系列练习（三）初中数学自我测验题

中学数学系列练习（四）高中代数

中学数学系列练习（五）三角与高中几何

中学数学系列练习（六）高中数学自我测验题

中学语文自学读本（上册）

中学语文自学读本（下册）

中学物理自学指导

中学化学自学指导

中学历史自学读本（上册）中国历史部分

中学历史自学读本（下册）世界历史部分

中学地理自学读本

中学政治自学读本

这套辅导读物是根据教育部有关职工文化补课的规定和1983年“北京市职工文化课各科复习提要”的要求，并参照中学统编教材编写的。在编写过程中，编者充分考虑到青壮年职工负担重、时间紧、基础薄和自学为主的实际情况，尤其考虑到地质、石油、煤炭、冶金、铁路、林业等系统以及其他从事野外、流动分散工作或没有条件脱产学习的广大职工的需要，“辅导读物”自始至终贯穿了“寓讲于练”、“讲练结合”和“少而精”的指导思想，力求充分启发读者的自学潜力，探索出一条辅导自学成才的路子。理科各分册均按照知识系统划分单元，每个单元包括有概念提示或学习指导，并配以适量的精选系列练习，每组练习集中解决一两个概念和原理问题，练习前有说明，后有小结，最后附有答案或解题思路．此外，还有供读者系统复习的专题自我测验题和综合测验题．文科各册除讲述基本知识外，还配有课文提示或内容要点，分课练习、单元练习或专题复习提纲，以及阶段测验和参考答案．因此，这套辅导读物是符合成人自学的特点的，可以收到事半功倍的效果．

参加这套读物编写工作的，都是有丰富教学经验的职工教育工作者和中学教师，他们十分了解职工文化补课的要求

和成人教育的特点，在选材、叙述、体例、进度等方面都兼顾到职工个人自学和集中讲课的两种需要；同时，讲解简明扼要，行文通俗易懂．因此，这套辅导读物既可作为职工文化补课的自学读本，又可作为职工文化补课班的教材或辅导材料。

本分册里配合中学数学系列练习（四）高中代数和中学数学系列练习（五）三角与高中几何的自我测验题．包括分科练习和综合练习两部分．此外，还附录有近年来电视大学、职工大学及部分函授大学的数学入学试题选解．自学读者可在分科自我测验的基础上，通过综合练习进行全面测验，以便检查对高中代数、三角与高中几何等知识掌握的程度，为转入高等自学教育和报考电大、职大、函大做好准备。

我们衷心希望这套“职工文化补课辅导读物”能够帮助青壮年职工提高文化文平，帮助他们顺利通过中学文化补课，并为接受高等教育打下良好基础．请读者将使用这套读物时所发现的问题和对本套读物的改进意见，及时告诉我们，以帮助我们改进工作。

柯　普

1984年2月

目　　录

一、分 科 练 习

代　　　数

练习一

1．填空：

(1)　满足 $|x|<1$ 的整数集是______.

(2) 若 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,a,e\}$ 则

$A\cup B=$______，$A\cap B=$______.

(3) 设 $I=\{0,1,2,3\}$，$A=\{0,1,2,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{0\}$，指出下列式子是否正确，凡正确的在空白处画"√"，凡不正确的在空白处画"×".

① $0\in A$____；　② $\{0\}\subset A$____；

③ $\{0\}\in A$____；　④ $0\subset C$____；

⑤ $B\subset A$____；　⑥ $\phi=C$____；

⑦ $B\cup C=I$____；　⑧ $I\subset A$____；

⑨ $(A\cap B)\in I$____；　⑩ $A\cap(B\cup C)\subset I$____.

(4) 设 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{4,10,16\}$，它们之间能建立单值对应关系吗？____；能建立一一对应关系吗？____；它们的对应关系是________；其逆对应是______.

2．解下列关于 x 的不等式或不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x>0, \\ 1+x<0; \end{cases}$

(2) $4-x<3-2x$;

(3) $5-x^2<8$;

(4) $x^2-3x+2>0$;

(5) $x^2+x+1>0$;

(6) $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0$;

(7) $\frac{x-1}{x+1}>0$;

(8) $2^x<8$;

(9) $\begin{cases} x^2+1>0, \\ (x-1)(x-3)<0; \end{cases}$

(10) $|x|>x$;

(11) $0<(x-2)^2\leqslant 4$;

(12) $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$.

3. 证明下列不等式:

(1) $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$; ($a>0$, $b>0$)

(2) $a^2+b^2+1\geqslant a+b+ab$;

(3) 已知 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=1$,

求证: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 4$.

4. 解关于 x 的不等式:

$$x^2+(2k+3)x+k^2+\frac{1}{2}(3k+9)<0.$$

5. 求函数 $y=\frac{2x}{x^2+x+1}$ 的极值.

6. 已知 a, b 为实数, 且 $|a|<1$, $|b|<1$,

求证：$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$。

参考答案

1. （1）$\{0\}$；（2）$A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$，$A\cap B=\{a,c\}$；（3）①√；②√；③×；④×；⑤×；⑥×；⑦√；⑧×；⑨×；⑩√。

（4）能；能；$A\to B=3A+1$；$B\to A=\dfrac{B-1}{3}$。

2. （1）解集为ϕ；（2）$x<-1$；（3）解集为R；（4）$x<1$或$x>2$；（5）解集为R；（6）$0<x<1$；（7）$x<-1$或$x>1$；（8）$x<3$；（9）$1<x<3$；（10）$x<0$；（11）$0\leqslant x<2, 2<x\leqslant 4$；（12）$-1<x<0$。

3. （1）**证明一**（用比较法）：

$$\because \quad \sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{b-a}{\sqrt{a}}+\frac{a-b}{\sqrt{b}}$$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}\geqslant 0.$$

∴ 原不等式成立。

证明二：∵ $a>0$，$b>0$。

∴ $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}>0$，$\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}>0$，

∴ $\sqrt{a}>0$，$\sqrt{b}>0$。

因此，$\dfrac{\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$$=\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}(a-b)}$$

$$=\frac{a^2-b^2+b\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(a-b)}$$

$$=\frac{(a-b(a+b-\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}(a-b)}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=1.$$

∴ 原不等式成立。

证明三（用分析法）：

假设$\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$成立。

因为两边均为正，故两边平方，得

$$\frac{a^2}{b}+2\sqrt{ab}+\frac{b^2}{a}\geqslant a+2\sqrt{ab}+b,$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geqslant a+b,$$

∵ $a>0$，$b>0$，两边同乘 ab，得

$(a+b)(a^2-ab+b^2)\geqslant(a+b)ab$，

$a^2-2ab+b^2\geqslant 0$

即 $(a-b)^2\geqslant 0$.

∵ $(a-b)^2\geqslant 0$ 是成立的，

又以上各步均可逆，

∴ 原不等式成立.

证明四（用综合法）：

∵ $a>0$，$b>0$，

$\because \quad \sqrt{a}>0, \sqrt{b}>0$

$\therefore \quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})\geqslant 0,$

$(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geqslant 0,$

$a\sqrt{a}-b\sqrt{a}-a\sqrt{b}+b\sqrt{b}\geqslant 0,$

$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a},$

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\geqslant\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}},$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

即 $$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

说明：利用综合法证明不等式也是我们经常应用的方法之一，一般都是从已知条件或已学过的定理、公理、公式出发，顺序推导出所求结论。

(2) **证明**：

假设 $a^2+b^2+1\geqslant a+b+ab$ 成立。

则 $2a^2+2b^2+2\geqslant 2a+2b+2ab$。

移项得 $a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1\geqslant 0,$

即 $(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0.$

$\because \quad (a-b)^2\geqslant 0, (a-1)^2\geqslant 0, (b-1)^2\geqslant 0$ 成立，

$\therefore \quad (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$ 成立

而 以上各步均可逆，

$\therefore$ 原不等式成立。

(3) **证明**：$\because \quad a+b=1, \ a>0, b>0,$

$\therefore \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}$

$$=1+\frac{b}{a}+1+\frac{a}{b}$$

$$=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$$

$$\geqslant 2+2=4.$$

$\therefore$ 原不等式成立。

4. **解**：$\because$ $(2k+3)^2-4\left[k^2+\frac{1}{2}(3k+9)\right]=6k-9$，

$\therefore$ 当 $6k-9\leqslant 0$，即 $k\leqslant\frac{3}{2}$时，不等式无解。

当 $6k-9>0$，即 $k>\frac{3}{2}$时，解不等式得

$$\frac{-2k-3-\sqrt{6k-9}}{2}<x<\frac{-2k-3+\sqrt{6k-9}}{2}.$$

5. **解**：$\because$ 无论 x 为什么实数，x^2+x+1 恒为正，

$\therefore$ $yx^2+yx+y=2x$，

$yx^2+(y-2)x+y=0$。

由于 $(y-2)^2-4y^2\geqslant 0$，

$-3y^2-4y+4\geqslant 0$，

$3y^2+4y-4\leqslant 0$，

$(y+2)(3y-2)\leqslant 0$。

得 $-2\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}$。

故 函数$y=\frac{2x}{x^2+x+1}$的极大值为$\frac{2}{3}$，极小值为-2。

说明：利用一元二次方程根的判别式求函数的极值，是求函数极值的重要方法之一。特别是求可化为一元二次方

程的含有分式或根式的函数的极值时，经常使用这种方法．

6．证明：假设 $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$ 成立，

∴ $|a+b|<|1+ab|$．

而 $|a+b|$ 和 $|1+ab|$ 均为非负数．

∴ $(|a+b|)^2<(|1+ab|)^2$．

因此，$a^2+2ab+b^2<1+2ab+a^2b^2$．

$$a^2+b^2-a^2b^2-1<0,$$

$$(a^2-1)+b^2(1-a^2)<0,$$

$$(a^2-1)(1-b^2)<0.$$

由于 $|a|<1$，$|b|<1$，

∴ $a^2<1$，$b^2<1$．

∴ 可得 $a^2-1<0$，$1-b^2>0$，

$(a^2-1)(1-b^2)<0$ 成立，

又以上各步均可逆，

∴ 原不等式成立。

练习二

1．计算下列各题：

(1) $\dfrac{1}{2i+\dfrac{1}{2i+\dfrac{1}{i}}}$；

(2) $\left\{\left[i^{100}-\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5\right]^2+\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{20}\right\}(1+2i)$；

(3) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^3(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{(\cos 45^\circ-i\sin 45^\circ)}$；

(4) $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{100}$，