

职工文化补课辅导读物

中学数学系列练习(六)

高中数学自我测验题

张世魁 主编 邵玉珍 励运赐 马骏 编著



地质出版社

职工文化补课辅导读物

中学数学系列练习(六)

高中数学自我测验题

张世魁 主编 邵玉珍
 励耘赐 马 骏 编著

地 质 出 版 社

职工文化补课辅导读物
中学数学系列练习 (六)
高中数学自我测验题

张世魁 主编 邵玉珍 马 骏 编著
励运赐

责任编辑: 张 瑚
地质出版社出版
(北京西四)

北京丰华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: 8 字数: 172,000
1984年9月北京第一版·1984年9月北京第一次印刷
印数: 1—126,430册 定价: 1.00 元
统一书号: 7038·新145

前 言

发展国民经济，实现四化建设，必须依靠科学技术进步；而推动科学技术进步，首先要有大批的人才。这就必须把智力开发提到现代化建设的重要地位，大力发展包括职工教育在内的各类教育事业，普遍提高干部和职工队伍的素质，提高他们的政治、文化、技术和管理水平。

目前，举国上下都十分重视智力开发问题，广开学路，采取多种形式办学，各类职工学校和培训班迅速发展起来，广大职工自学互帮，学文化，钻技术，蔚然成风，职工教育出现了前所未有的新形势。

现在的青壮年职工是九十年代经济建设的主力军，他们的文化技术培训是当务之急。为了适应广大青壮年职工进行中学文化补课的急需，使他们能利用业余时间，通过自学尽快掌握中学各门课程，达到高中文化程度，在条件允许的情况下参加电大、职大、函大等各类职工大学的入学考试，或通过自学达到大专文化水平，我们特组织编写了这套“职工文化补课辅导读物”，共包括十门基础课，十四个分册：

中学数学系列练习（一）初中代数

中学数学系列练习（二）平面几何

中学数学系列练习（三）初中数学自我测验题

中学数学系列练习（四）高中代数

中学数学系列练习（五）三角与高中几何

中学数学系列练习（六）高中数学自我测验题

中学语文自学读本（上册）

中学语文自学读本（下册）

中学物理自学指导

中学化学自学指导

中学历史自学读本（上册）中国历史部分

中学历史自学读本（下册）世界历史部分

中学地理自学读本

中学政治自学读本

这套辅导读物是根据教育部有关职工文化补课的规定和1983年“北京市职工文化课各科复习提要”的要求，并参照中学统编教材编写的。在编写过程中，编者充分考虑到青壮年职工负担重、时间紧、基础薄和自学为主的实际情况，尤其考虑到地质、石油、煤炭、冶金、铁路、林业等系统以及其他从事野外、流动分散工作或没有条件脱产学习的广大职工的需要，“辅导读物”自始至终贯穿了“寓讲于练”、“讲练结合”和“少而精”的指导思想，力求充分启发读者的自学潜力，探索出一条辅导自学成才的路子。理科各分册均按照知识系统划分单元，每个单元包括有概念提示或学习指导，并配以适量的精选系列练习，每组练习集中解决一两个概念和原理问题，练习前有说明，后有小结，最后附有答案或解题思路。此外，还有供读者系统复习的专题自我测验题和综合测验题。文科各册除讲述基本知识外，还配有课文提示或内容要点，分课练习、单元练习或专题复习提纲，以及阶段测验和参考答案。因此，这套辅导读物是符合成人自学的特点的，可以收到事半功倍的效果。

参加这套读物编写工作的，都是有丰富教学经验的职工教育工作者和中学教师，他们十分了解职工文化补课的要求

和成人教育的特点,在选材、叙述、体例、进度等方面都兼顾到职工个人自学和集中讲课的两种需要;同时,讲解简明扼要,行文通俗易懂。因此,这套辅导读物既可作为职工文化补课的自学读本,又可作为职工文化补课班的教材或辅导材料。

本分册里配合中学数学系列练习(四)高中代数和中学数学系列练习(五)三角与高中几何的自我测验题。包括分科练习和综合练习两部分。此外,还附录有近年来电视大学、职工大学及部分函授大学的数学入学试题选解。自学读者可在分科自我测验的基础上,通过综合练习进行全面测验,以便检查对高中代数、三角与高中几何等知识掌握的程度,为转入高等自学教育和报考电大、职大、函大做好准备。

我们衷心希望这套“职工文化补课辅导读物”能够帮助青壮年职工提高文化水平,帮助他们顺利通过中学文化补课,并为接受高等教育打下良好基础。请读者将使用这套读物时所发现的问题和对本套读物的改进意见,及时告诉我们,以帮助我们改进工作。

柯 普

1984年2月

目 录

一、分科练习	1
代 数	1
练习一	1
参考答案	3
练习二	7
参考答案	8
练习三	13
参考答案	14
练习四	18
参考答案	18
练习五	22
参考答案	23
练习六	26
参考答案	27
练习七	30
参考答案	31
练习八	36
参考答案	37
练习九	39
参考答案	40
练习十	42
参考答案	43
三 角	49
练习一	49

参考答案	50
练习二	54
参考答案	55
练习三	58
参考答案	60
练习四	65
参考答案	66
练习五	71
参考答案	72
练习六	77
参考答案	78
练习七	83
参考答案	84
练习八	89
参考答案	90
立 体 几 何	96
练习一	96
参考答案	97
练习二	99
参考答案	100
平 面 解 析 几 何	104
练习一	104
参考答案	105
练习二	111
参考答案	112
练习三	118
参考答案	119
练习四	125
参考答案	126

练习五	131
参考答案	133
二、综合练习	139
练习一	139
参考答案	140
练习二	143
参考答案	145
练习三	149
参考答案	150
练习四	153
参考答案	155
练习五	159
参考答案	161
练习六	165
参考答案	166
练习七	171
参考答案	172
练习八	178
参考答案	179
三、附录	185
一九八二年全国广播电视大学统一招生考	
试数学试题(工科类)	185
参考答案	186
一九八三年全国广播电视大学统一招生考	
试数学试题(经济类)	193
参考答案	196
一九八三年中国人民大学函授生考试数学试题	
(经济专业)	200
参考答案	201

一九七九年邮电高等函授招生数学试题	204
参考答案	205
一九八二年华北电力学院函授招生数学试题	210
参考答案	211
一九八三年北京师范学院夜大学统一招生数学试题	219
参考答案	221
一九八三年北京工业大学职工夜大招生数学试题	225
参考答案	226
一九八二年北京市职工高校联合招生考试数学试题	
(财经类)	229
参考答案	232
一九八三年北京市职工高校联合招生考试数学试题	
(理工类)	235
参考答案	237
一九八三年江苏省职工高等学校招生考试数学试题	
(财经类)	240
参考答案	241

一、分 科 练 习

代 数

练习一

1. 填空:

(1) 满足 $|x| < 1$ 的整数集是_____.

(2) 若 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, a, e\}$ 则

$$A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}, \quad A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3) 设 $I = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{0, 1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{0\}$, 指出下列式子是否正确, 凡正确的在空白处画“√”, 凡不正确的在空白处画“×”.

① $0 \in A$ _____; ② $\{0\} \subset A$ _____;

③ $\{0\} \in A$ _____; ④ $0 \subset C$ _____;

⑤ $B \subset A$ _____; ⑥ $\phi = C$ _____;

⑦ $B \cup C = I$ _____; ⑧ $I \subset A$ _____;

⑨ $(A \cap B) \in I$ _____; ⑩ $A \cap (B \cup C) \subset I$ _____.

(4) 设 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{4, 10, 16\}$, 它们之间能建立单值对应关系吗? _____; 能建立一一对应关系吗? _____; 它们的对应关系是 _____; 其逆对应是 _____.

2. 解下列关于 x 的不等式或不等式组:

(1)
$$\begin{cases} 2x > 0, \\ 1+x < 0, \end{cases}$$

$$(2) 4-x < 3-2x;$$

$$(3) 5-x^2 < 8;$$

$$(4) x^2-3x+2 > 0;$$

$$(5) x^2+x+1 > 0;$$

$$(6) \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0;$$

$$(7) \frac{x-1}{x+1} > 0;$$

$$(8) 2^x < 8;$$

$$(9) \begin{cases} x^2+1 > 0, \\ (x-1)(x-3) < 0; \end{cases}$$

$$(10) |x| > x;$$

$$(11) 0 < (x-2)^2 \leq 4;$$

$$(12) \left| \frac{x}{1+x} \right| > \frac{x}{1+x}.$$

3. 证明下列不等式:

$$(1) \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}; \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(2) a^2+b^2+1 \geq a+b+ab;$$

$$(3) \text{ 已知 } a > 0, b > 0, \text{ 且 } a+b=1,$$

$$\text{求证: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4.$$

4. 解关于 x 的不等式:

$$x^2 + (2k+3)x + k^2 + \frac{1}{2}(3k+9) < 0.$$

5. 求函数 $y = \frac{2x}{x^2+x+1}$ 的极值.

6. 已知 a, b 为实数, 且 $|a| < 1, |b| < 1,$

求证: $\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$.

参考答案

1. (1) $\{0\}$; (2) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$, $A \cap B = \{a, c\}$; (3) ① $\checkmark$; ② $\checkmark$; ③ $\times$; ④ $\times$; ⑤ $\times$; ⑥ $\times$; ⑦ $\checkmark$; ⑧ $\times$; ⑨ $\times$; ⑩ $\checkmark$.

(4) 能; 能; $A \rightarrow B = 3A + 1$; $B \rightarrow A = \frac{B-1}{3}$.

2. (1) 解集为 $\emptyset$; (2) $x < -1$; (3) 解集为 R ; (4) $x < 1$ 或 $x > 2$; (5) 解集为 R ; (6) $0 < x < 1$; (7) $x < -1$ 或 $x > 1$; (8) $x < 3$; (9) $1 < x < 3$; (10) $x < 0$; (11) $0 \leq x < 2, 2 < x \leq 4$; (12) $-1 < x < 0$.

3. (1) 证明一 (用比较法):

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ = \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{b-a}{\sqrt{a}} + \frac{a-b}{\sqrt{b}} \\ = \frac{(a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \\ = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \geq 0. \end{aligned}$$

$\therefore$ 原不等式成立.

证明二: $\because a > 0, b > 0$.

$$\therefore \sqrt{\frac{a^2}{b}} > 0, \sqrt{\frac{b^2}{a}} > 0,$$

$$\therefore \sqrt{a} > 0, \sqrt{b} > 0.$$

$$\begin{aligned}
\text{因此, } \frac{\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\
&= \frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}(a-b)} \\
&= \frac{a^2 - b^2 + b\sqrt{ab} - a\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(a-b)} \\
&= \frac{(a-b)(a+b-\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}(a-b)} \geq \frac{2\sqrt{ab} - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 1.
\end{aligned}$$

∴ 原不等式成立.

证明三 (用分析法):

假设 $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 成立.

因为两边均为正, 故两边平方, 得

$$\frac{a^2}{b} + 2\sqrt{ab} + \frac{b^2}{a} \geq a + 2\sqrt{ab} + b,$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b,$$

∵ $a > 0, b > 0$, 两边同乘 ab , 得

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a+b)ab,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

即 $(a-b)^2 \geq 0$.

∵ $(a-b)^2 \geq 0$ 是成立的,

又以上各步均可逆,

∴ 原不等式成立.

证明四 (用综合法):

∵ $a > 0, b > 0$,

$$\therefore \sqrt{a} > 0, \sqrt{b} > 0$$

$$\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 0,$$

$$(a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0,$$

$$a\sqrt{a} - b\sqrt{a} - a\sqrt{b} + b\sqrt{b} \geq 0,$$

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a},$$

$$\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \geq \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}},$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

即 $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

说明：利用综合法证明不等式也是我们经常应用的方法之一，一般都是从已知条件或已学过的定理、公理、公式出发，顺序推导出所求结论。

(2) 证明：

假设 $a^2 + b^2 + 1 \geq a + b + ab$ 成立。

则 $2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2a + 2b + 2ab.$

移项得 $a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0,$

即 $(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0.$

$\therefore (a-b)^2 \geq 0, (a-1)^2 \geq 0, (b-1)^2 \geq 0$ 成立，

$\therefore (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$ 成立

而 以上各步均可逆，

$\therefore$ 原不等式成立。

(3) 证明： $\because a+b=1, a>0, b>0,$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{b}{a} + 1 + \frac{a}{b} \\
 &= 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \\
 &\geq 2 + 2 = 4.
 \end{aligned}$$

∴ 原不等式成立.

4. 解: ∵ $(2k+3)^2 - 4\left[k^2 + \frac{1}{2}(3k+9)\right] = 6k-9,$

∴ 当 $6k-9 \leq 0$, 即 $k \leq \frac{3}{2}$ 时, 不等式无解.

当 $6k-9 > 0$, 即 $k > \frac{3}{2}$ 时, 解不等式得

$$\frac{-2k-3-\sqrt{6k-9}}{2} < x < \frac{-2k-3+\sqrt{6k-9}}{2}.$$

5. 解: ∵ 无论 x 为什么实数, x^2+x+1 恒为正,

$$\therefore yx^2+yx+y=2x,$$

$$yx^2+(y-2)x+y=0.$$

由于 $(y-2)^2-4y^2 \geq 0,$

$$-3y^2-4y+4 \geq 0,$$

$$3y^2+4y-4 \leq 0,$$

$$(y+2)(3y-2) \leq 0.$$

得 $-2 \leq y \leq \frac{2}{3}.$

故 函数 $y = \frac{2x}{x^2+x+1}$ 的极大值为 $\frac{2}{3}$, 极小值为 -2 .

说明: 利用一元二次方程根的判别式求函数的极值, 是求函数极值的重要方法之一. 特别是求可化为一元二次方

程的含有分式或根式的函数的极值时,经常使用这种方法.

6. 证明: 假设 $\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$ 成立,

$$\therefore |a+b| < |1+ab|.$$

而 $|a+b|$ 和 $|1+ab|$ 均为非负数.

$$\therefore (|a+b|)^2 < (|1+ab|)^2.$$

因此, $a^2 + 2ab + b^2 < 1 + 2ab + a^2b^2$.

$$a^2 + b^2 - a^2b^2 - 1 < 0,$$

$$(a^2 - 1) + b^2(1 - a^2) < 0,$$

$$(a^2 - 1)(1 - b^2) < 0.$$

由于 $|a| < 1, |b| < 1$,

$$\therefore a^2 < 1, b^2 < 1.$$

$\therefore$ 可得 $a^2 - 1 < 0, 1 - b^2 > 0$,

$$(a^2 - 1)(1 - b^2) < 0 \text{ 成立,}$$

又以上各步均可逆,

$\therefore$ 原不等式成立.

练习二

1. 计算下列各题:

$$(1) \frac{1}{2i + \frac{1}{2i + \frac{1}{i}}},$$

$$(2) \left\{ \left[i^{100} - \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^5 \right]^2 + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{20} \right\} (1+2i);$$

$$(3) \frac{(\sqrt{3} + i)^3 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)}{(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)};$$

$$(4) i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{100},$$