圓

承方著

中国青年出版社

圓

承方著

中國青年出版社
一九五四年・北京

內 容 提 要

圓是初中幾何裏面最後的部分。本書總結教科書裏所有的知識，並多舉應用的例子，以加强讀者運用知識的能力。關於圓的軌跡問題和作圖題，本書作了更詳細的敍述。關於共線點、共點線、共圓點等零星材料，本書作了系統的整理，並加以補充，使讀者在進修高中幾何時可以得到便利。

書號599　數理化61

圓

著　者　承　方

出版者　中國青年出版社
青年·開明聯合組織
北京東四12條老君堂11號

總經售　新　華　書　店

印刷者　北京中國青年出版社印刷廠

開本 787×1092 1/32　一九五四年十二月北京第一版
印張 2 1/4　字數 42,000　一九五四年十二月北京第一次印刷
定價 2,600 元　印數 1—42,000

北京市書刊出版業營業許可證出字第036號

目　次

一　圓的簡單性質……1
二　直綫和圓的關係……11
三　兩圓的關係……17
四　圓中的特殊角……25
五　關於圓的基本作圖題……33
六　關於圓的基本軌跡……36
七　關於圓的交軌作圖法……40
八　圓的內接形和外切形……45
九　三角形的特殊點……51
一〇　怎樣證共綫點和共點綫……56
一一　怎樣證共圓點和共點圓……62

一 圓的簡單性質

圓是怎樣的圖形呢？有人說：像鐵環、車輪和篩子等的形狀就是圓．不錯，這圓的一個概念，原是從鐵環、車輪和篩子，以及其他具有同樣形狀的一切物體的形象抽象得出來的．但是，我們爲了要精確地研究圓的性質，對圓僅僅用這樣的一句話來作解釋是不夠的，應該給它下一個恰當的定義．

圓的定義應該怎樣下呢？我們不妨拿一根鐵條，把它製成一個圓形的鐵環，在製造的過程中研究一下它的特性．

假定我們取一根形狀成直綫的鐵條（如圖 1），把它隨便彎幾彎，就成了曲綫．這曲綫有兩個頭，當然不是圓．

圖 1.

如果我們把這鐵條的兩頭彎到一塊兒，再把它煅接起來，這時的形狀是一條連續不斷（或稱循環無端）的曲綫，叫做'封閉曲綫'．但是這一條封閉曲綫七歪八扭的，還不能算作圓．

我們必須用鐵鎚把這煅接好的鐵條橫着先敲平了，然後再豎起來仔細地敲，使它的任何部分都彎曲得一模一樣，這封閉曲綫就近似於圓了．但要檢驗它是不是眞正的圓，還得想

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一個適當的辦法．我們看到正確的圓形車輪，在平地上滾動時，它的軸心跟地面常保持一定的距離，這就是說，車輪邊緣上的一切點距離軸心都是一樣遠．於是我們把做成的鐵環放平了，在它所在的平面內去找出一個像車輪軸心那樣的中心點，它跟鐵環上的各點的距離都一樣遠．如果找到了這樣的中心點的話，那末它才是一個眞正圓形的鐵環，可以另外做一個鉤子，鉤住了它在地上滾着玩耍（如圖 2）．

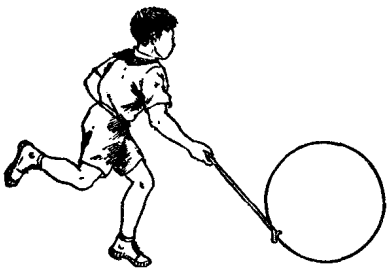

圖 2.

像篩子、碗口等，凡是跟圓形的鐵環或車輪形狀相同的東西，都有上述的特性．於是我們給圓下這樣的定義：

在平面內的一條封閉曲綫，如果這綫上的任何一點都跟同一平面內不在這綫上的一個定點距離相等，那末這曲綫叫做圓，又叫做圓周；被這曲綫所包圍的平面叫做圓面．

通常用符號⊙表示圓．

圓的定義中所稱的一個定點叫做圓心（圖 3 的 O），聯接圓心和圓上任意一點的綫段，即從圓心到圓上任何一點的距離叫做半徑（OC、OE 等），經過圓心聯接圓上兩點的綫段叫做直徑（CD）．圓心確定圓的位置，圓心一移動，圓就跟着移動．半徑確定圓的大小，半徑減短，圓就縮小；半徑增長，圓就擴大．可見圓心和半徑是確定一個圓的兩個基本條件．

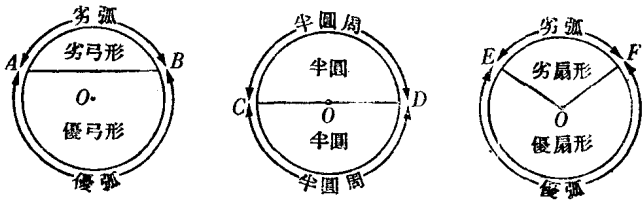

圖 3.

如果我們單說'平面上的一條封閉曲綫就是圓',那末如圖 1 的封閉曲綫就也要算作圓,這當然是不對的. 如果單說'若曲綫上的任何一點都跟同一平面內不在這綫上的一個定點距離相等,那末這條曲綫就是圓',這樣說也不行. 因爲如果我們在圓上任意截取一段,它都能合於這一個條件,但它並不是一個圓而只是圓的一部分.

圓的一部分叫做弧,用⌒表示,大於半圓的弧叫做'優弧',小於半圓的弧叫做'劣弧'. 聯接弧兩端的綫段叫做弦(如圖 3 的 AB). 弧和弦所構成的圖形正像一張弓,叫做弓形. 弧和它兩端的半徑所構成的圖形正像一把扇子,叫做扇形. 弧大於半圓的弓形和扇形分別叫做'優弓形'和'優扇形';相反的分別叫做'劣弓形'和'劣扇形'. 一般單說弓形或扇形,都指劣弓形或劣扇形. 弧等於半圓的弓形又是扇形,因爲直徑既可以算做一條弦,又可以算做兩條半徑.

設 AB 是 $\odot O$ 的弦,半徑 OC 垂直於 AB,交 AB 於 D(如圖 4). 則在弓形 ABC 中,$\overset{\frown}{ACB}$ 是'弓形弧';AB 是'弓形弦',或叫做弓形的'底';CD 是弓形的'矢',或叫做弓形的'高'. 又在扇形 $AOBC$ 中,$\overset{\frown}{ACB}$ 是'扇形弧';OA,OB 都是'扇形半

徑'；$\angle AOB$ 是'扇形角'，其實就是扇形弧所對的圓心角．又弦 AB 跟圓心 O 的距離 OD，叫做'弦心距'．

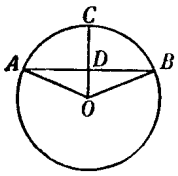

圖 4.

每一段弧必有一條對應的弦和一個對應的圓心角．例如在圖 4 中，$\overset{\frown}{AB}$ 的對應弦（或說所對的弦）是 AB，對應圓心角（或說所對的圓心角）是 $\angle AOB$．又每一條弦必有它的弦心距，如弦 AB 的弦心距是 OD．

在一個定圓裏，互相對應的弧、弦、圓心角和弦心距，只要有一個的大小改變，其他三個的大小就要跟着改變．在同圓或等圓中互相對應的弧、弦、圓心角和弦心距之間存在着下面列舉的關係：

（1）若二弧相等，則所對的圓心角也相等；若二弧不等，則大弧所對的圓心角較大．

（2）若二圓心角相等，則所對的弧也相等；若二圓心角不等，則大圓心角所對的弧較大．

（3）若二弧相等，則所對的弦也相等；若二劣弧不等，則大劣弧所對的弦較大．

（4）若二弦相等，則所對的弧也相等；若二弦不等，則大弦所對的劣弧較大．

（5）若二弦相等，則弦心距也相等；若二弦不等，則大弦的弦心距較小．

（6）若二弦心距相等，則二弦也相等；若二弦心距不等，則弦心距大的弦較小．

這些定理分別敍述起來雖很嚕嗦，但總起來說却只有一句話：'在同圓或等圓中，兩弧和對應的兩弦、兩圓心角、兩弦

心距，四種裏有一種相等就都相等，一種不等就都不等；但弧（指劣弧）、弦和圓心角中的一種較大，其餘都較大，而弦和弦心距的一種較大，則另一種反較小。'

弦、弧跟直徑的關係，又有下列的六條定理：

（7）垂直於一弦的直徑，必平分這條弦，且平分這弦所對的兩弧.

（8）過弦的中點的直徑，必垂直於這弦，且平分這弦所對的兩弧.

（9）過弧的中點的直徑，必垂直且平分這弧所對的弦.

(10) 弦的垂直平分綫，必過圓心，且過這弦所對兩弧的中點.

(11) 過弧的中點所引對應弦的垂綫，必平分這條弦，且過圓心.

(12) 過弧和對應弦的兩個中點的綫，必垂直於這弦，且過圓心.

這六條定理乍看會搞得頭昏腦脹，但仔細分析一下，知道就是一條直綫若具有下列四個條件中的任何兩個，也就具有其他的兩個：

（a）垂直於弦，（b）過圓心，（c）過弦的中點，（d）過弧的中點.

圓的其他基本性質是：

(13) 過不在一直綫上的三點可作一圓，且僅可作一圓.

(14) 兩條平行弦所截的兩弧相等.

(15) 直徑是最長的弦.

利用這些性質，可以解決各種幾何題，舉例於下.

例題一 過已知圓內一定點的許多弦中，最短的是垂直於過這點的直徑的一條.

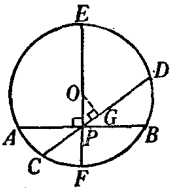

圖 5.

假設 如圖 5，⊙O 內有一定點P，EF

是過 P 的直徑，AB 是過 P 的弦，$AB\perp EF$.

求證 AB 是過 P 的最短弦.

〔思考〕 要證 AB 是過 P 的最短弦，可過 P 作任意弦 CD，設法證 $AB<CD$. 既然 AB 比過 P 的任意一條弦來得短，那末它就是最短弦.

要證弦 $AB<CD$，須先證它們的對應弧不等，對應圓心角不等，或對應弦心距不等. 但要證前面的二種都困難，而證最後的一種，即弦心距 $OP>OG$，却是容易解決的.

證明 1. 過 P 作任意弦 CD，再作 $OG\perp CD$.

2. 因 OPG 是直角三角形，故斜邊爲最長邊，即 $OP>OG$.

3. 於是知 $AB<CD$，即 AB 是過 P 的最短弦.

〔注意〕 過 P 點的弦以直徑 EF 爲最長. 怎樣證明?

例題二 **假設** 如圖 6，$\angle XOY$ 是定角，P 是 OY 上的一個定點，l 是定長.

求作 以 P 爲圓心的圓，使它在 OX 上截得的弦等於 l.

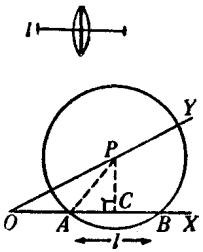

圖 6.

〔解析〕 假定所求的圓已經作成，它截 OX 所得的弦 $AB=l$. 因爲 P 是所求圓的圓心，爲了要顯出它跟 AB 弦的關係，試作 $PC\perp AB$，由此得 $AC=CB$，即 $AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}l$.

可見要作出所求的圓，只須先求 C 點，再求 A 點，則 PA 就是所求圓的半徑.

作法 1. 作 $PC\perp OX$，在 OX 上取 $CA=\frac{1}{2}l$.

2. 以 P 爲圓心，PA 爲半徑作圓，就得所求的圓.

證明 若以 P 爲圓心，PA 爲半徑的圓交 OX 於另一點 B，因

$PC\perp AB$，故$AC=CB$。但$AC=\frac{1}{2}l$，故$CB=\frac{1}{2}l$，$AB=l$。

討論 本題常有一解。

例題三 求已知圓內平行弦中點的軌跡。

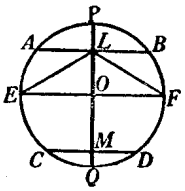

圖 7.

假設 ⊙O內平行弦AB、CD……的中點是L、M……（如圖 7）。

求 L、M……的軌跡。

〔思考〕 題設有許多平行弦，我們容易想到其中有特殊的一條，即平行於AB的直徑EF。因爲圓心O是EF的中點，所以O是所求軌跡上的特殊點。又因垂直於弦AB、CD……的直徑必過它們的中點L、M……，而這直徑又是EF的垂直平分綫，所以只須研究L等中點是否距兩個定點E、F等遠，就可根據基本軌跡定理，確定所求的軌跡。

解 1. 作平行於AB的直徑EF，則E和F是兩個定點。

2. 聯LE、LF、LO，則$LO\perp AB$。但$EF\parallel AB$，故$LO\perp EF$。

3. 因 $EO=FO$、$LO=LO$，$\angle EOL=\angle FOL=\angle R$，故 $\triangle EOL\cong\triangle FOL$，$LE=LF$。

4. 既知L距E、F等遠，那末它的軌跡應是EF的垂直平分綫。

5. 但各平行弦的中點不能在圓外，故所求的軌跡是垂直於AB的直徑PQ。

研究題一

1. 如圖 8，延長 ⊙O的弦AB到C，使$BC=OA$，聯CO，並且延長交圓於D，試證$\angle AOD=3\angle C$。

〔提示〕 注意同圓的兩條半徑相等，等腰三角形的兩底角相等。

2. 如圖 9，從圓外一點A作一直綫通過圓心O，交圓於B、C，則AB

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

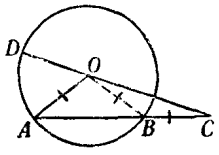

圖 8.

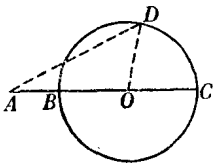

圖 9.

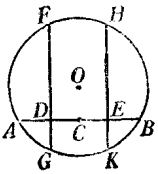

圖 10.

是從 A 到圓上各點的最短綫段，AC 是從 A 到圓上各點的最長綫段。

〔提示〕 仿例題一，要證 AB 是從 A 到圓上各點的最短綫段，必須在圓上任取一點 D，證 $AB<AD$.

3. 如圖 10，C 是弦 AB 的中點，$CD=CE$，過 D 作 $FG\perp AB$，過 E 作 $HK\perp AB$，則 $FG=HK$.

〔提示〕 試添補助綫，應用前舉定理(6)。下題同。

4. 如圖 11，$\odot O$ 的二弦 AB、CD 相交於 E，若 $\angle 1=\angle 2$，則 $AB=CD$.

5. 如圖 11，二弦 $AB=CD$，又相交於 E，則 $AE=CE$，$BE=DE$.

6. 如圖 12，兩圓 O 和 O' 相交，過一交點 C 作直綫平行於 OO' (這 OO' 是聯接兩圓心的綫段叫做聯心綫)，交兩圓周於 A、B，試證 $AB=2OO'$.

〔提示〕 作 OD、$O'E\perp AB$，試證 $AB=2DE$.

7. 如圖 13，同上題，試證 AB 是過 C 而止於二圓的最長綫段。

〔提示〕 作過 C 而止於二圓的任意綫段 FG，仿上題可證 $FG=2LO'$，試比較 OO' 和 LO' 的長短。

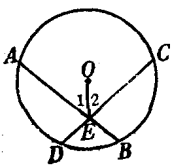

圖 11.

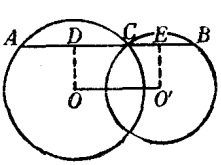

圖 12.

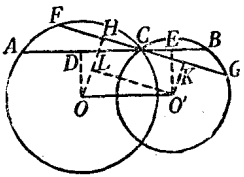

圖 13.

8. 如圖 14，一直綫平行於兩個等圓的聯心綫 OO'，分別交兩圓於 A、B 和 A'、B'，則 $AA'=BB'=OO'$.

〔提示〕 仿上題作補助綫，先證 $AB=A'B'$.

9. 如圖 15，大小二圓同以 O 爲圓心，大圓的弦 AB 交小圓於 C、D，則 $AC=BD$.

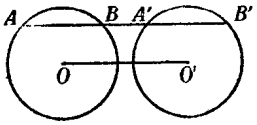

圖 14.

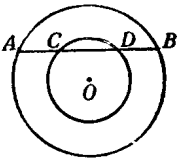

圖 15.

10. $\angle XOY$ 是定角，在 OY 上求一點 P，使以 P 爲圓心，已知長 r 爲半徑的圓，在 OX 上截取一弦等於已知長 l.

〔提示〕 如圖 16，先作直角三角形 $A'C'P'$，使一直角邊 $A'C'=\frac{1}{2}l$，斜邊 $A'P'=r$，則所求的 P 點距 OX 必等於 $P'C'$，可用交軌法求得 P 點.

11. 以已知長 r 爲半徑，求作一圓，使它在已知角 XOY 的邊 OX 上截取等於已知長 l 的弦，在 OY 上截取等於已知長 m 的弦.

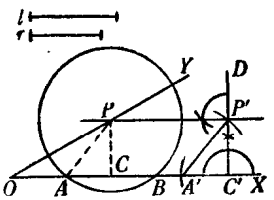

圖 16.

12. 過已知圓 O 內一個定點 P，求作一弦 AB，使 $PB-PA$ 等於已知長 l.

〔提示〕 如圖 17，若在 PB 上取 $BC=AP$，則 $PC=l$. 參閱第 9 題.

13. 求過兩個定點所作圓的圓心的軌跡.

〔提示〕 研究各圓心跟兩個定點

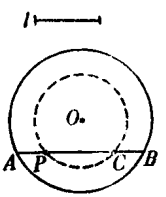

圖 17.

間有什麼關係，能否應用基本軌跡定理來確定所求的軌跡。

14. 求已知圓內等弦中點的軌跡。

〔提示〕 研究各中點是否距已知圓心等遠。

15. 若$\angle ABC=120°$，$AB=BC=4$厘米，求過A、B、C三點的圓的半徑。

16. 兩條相等的弦互相垂直，每一弦被垂足分成3厘米和7厘米的二部分，求從圓心到各弦的距離。

〔提示〕 全弦長10厘米，半弦長5厘米.

17. 如圖18，$\odot O$的弦CD交直徑AB於F，$\angle DFB=30°$，$AF=2$厘米，$FB=6$厘米，$OE\perp CD$，求OE的長。

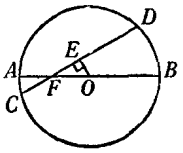

圖18.

二　直綫和圓的關係

在滾鐵環遊戲中，所用的鐵環是一個圓，裝着鉤子的鐵桿可以當作一條直綫．我們現在拿它們來作比方，說明一條直綫和一個圓放在一塊，會有種種不同的位置關係．

在同一平面上，如果一直綫上所有的各點都在一個圓的外面，那末我們說這直綫跟這圓'相離'，像鐵桿還沒有推着鐵環時的樣子(如圖 19 的 a)．

如果直綫跟圓有一個公共點，而除此以外再沒有公共的點，叫做這直綫跟圓'相切'，像鐵桿推着鐵環的樣子(如圖 19 的 b)．這直綫叫做圓的切綫，公共點(C)叫做切點．

如果直綫跟圓有兩個公共點，叫做直綫跟圓'相交'，像把鐵桿上的鉤子放到鐵環上着地點的前方，壓着環向前滾的樣子(如圖 19 的 c)．這直綫叫做圓的割綫，兩個公共點(C 和 D)都叫做交點．

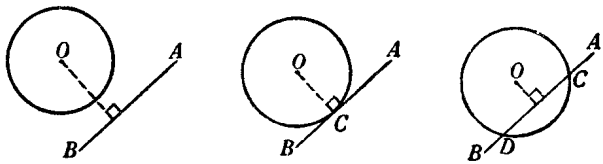

圖 19.

很明顯的，在這三種情況中，圓心跟直綫的距離，在相離時必大於半徑；相切時等於半徑；相交時小於半徑．

圓和直綫相切的關係是最重要的，我們必須熟記以下的幾條定理：

（1）過圓上的一點，只能畫一條切綫，但從圓外的一點可畫兩條切綫。

（2）垂直於半徑外端的直綫，是這圓的切綫。

（3）若一直綫切於一圓，則這綫垂直於過切點的半徑。

（4）從圓心引切綫的垂綫，它的垂綫足就是切點。

（5）從切點引切綫的垂綫，必通過圓心。

（6）若切綫平行於一已知弦，則切點必平分這弦所對的弧。

（7）從圓外一點所引圓的二切綫相等（這裏的切綫指的是從圓外一點到切點的綫段）。

（8）從圓外一點所引圓的二切綫的夾角，被這點和圓心的聯綫所平分。

（9）過二切綫切點的兩條半徑的夾角，被這二切綫交點和圓心的聯綫所平分。

弧和直綫之間，或兩弧之間，也有一種特殊的位置關係。

譬如有兩條直綫的火車軌道 AB 和 CD（如圖 20），因爲方向不同，必須要插入一條弧形的軌道，把它們啣接起來，使

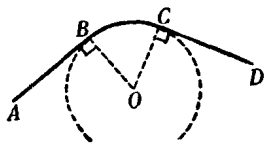

圖 20.

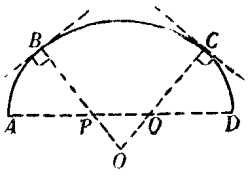

圖 21.

能平滑地由一綫轉向另一綫．這時的弧形軌道 BC 所在的圓應該切 AB 於 B，切 CD 於 C．於是我們說：從弧的一端所引

的直線，若切於這弧所在的圓，則稱這直線跟弧在弧的這一端互相胎結。

又如我們要用三段弧 AB、BC、CD 平滑地接在一起，畫成拱門的頂，使它像半個橢圓的形狀（如圖 21），這時過每二弧相接的點必須有一條直線，同時切於這兩弧所在的兩圓。這樣的兩弧也叫做互相胎結。

關於這兩種互相胎結的情況，我們易於看到下列的兩種性質：

（1）弧跟直線相胎結時，過胎結處的點所作弧的半徑必垂直於這直線。

（2）兩弧相胎結時，這兩弧所在圓的圓心和胎結處的點，共三點在一直線上。

例題四 **假設** 定圓 O 的二切線 CX 和 CY 互相垂直，切點是 E 和 D（如圖 22）。過優弧 DE 上的任意點 F 作第三切線，交 CX、CY 於 A、B。

求證 $AC+BC-AB$ 是一個定值。

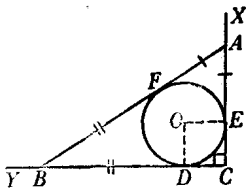

圖 22.

〔思考〕 因 F 點可在優弧 DE 上任意移動，而同時 A、B 二點也各在 CX、CY 上跟着移動，所以 AC、BC、AB 三綫段的長度各自跟着 F 點的位置不同而改變。

AC、BC、AB 三綫段的長度雖沒有一定，但它們常被三個切點 E、D、F 分成六段，而這六段中的 AE 和 AF 常常相等（從圓外一點所引的二切綫相等），BD 和 BF 也常常相等，所以 $AC+BC-AB=AC+BC-(AF+BF)=AC+BC-(AE+BD)=CE+CD$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com