

# 电磁场及 电离子光学系统 数值分析

储璇雯 谢志行 编著

## 内容提要

### 模拟电荷法

常用的模拟电荷类型,  
关于电位和电场强度的计算公式  
复合媒质中的电场问题  
组合算法

### 蒙特卡洛法

蒙特卡洛方法基础  
随机变量抽样  
蒙特卡洛方法在积分计算中的应用  
蒙特卡洛方法计算电磁场

### 电(磁)透镜特性参量及像差计算

轴对称电(磁)透镜特性参量的计算  
相空间动力学在电、  
离子透镜设计中的应用

调制传递函数的计算

### 电子枪发射系统的计算

阴极发射电流和近阴极区电位的计算  
发射系统计算的蒙特卡洛方法

### 偏转系统的计算

边界元法计算多极静电偏转场  
偏转线圈磁场的计算  
边界元法在磁偏转场计算中的应用

### 电、离子光学系统 计算机辅助优化设计

浙江大学出版社

# 电磁场及电离子光学系统数值分析

储璇雯、谢志行 编著

浙江大学出版社

(浙)新登字10号

## 内 容 简 介

本书上篇内容包括：属于场域分割法的有限差分法和有限元法；属于边界分割法的模拟电荷法和边界元法，以及求解随机性问题的蒙特卡洛法。下篇内容包括荷电粒子轨迹的确定，电（磁）透镜特性参量及像差计算，电子枪发射系统和电（磁）偏转系统的设计、计算以及电、离子光学系统的计算机优化设计方法等。书中各章附有实际计算的示例，可供参考。

本书可作为高等院校电子物理与器件专业硕士生的教材。对无线电和电子物理类专业的高年级学生和研究生以及从事于电、离子束器件和仪器的研究设计和制造的科技工作者也是一本有价值的参考书籍。

## 电磁场及电离子光学系统数值分析

储璇雯 谢志行 等著

责任编辑 张明 王文文

\* \* \* \* \*

浙江大学出版社出版

德清第二印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

\* \* \* \* \*

开本 850×1168 1/32 印张：17.125 字数：432千字

1991年9月第1版

1991年9月第1次印刷

印数：1—2000

ISBN 7—308—00323—x

---

TN·017 定价：5.50

# 前 言

电子、离子光学是研究荷电粒子在电磁场中的运动，电子束和离子束的形成、聚焦、成像和偏转等的规律，以及应用电、离子束的各种器件、科学仪器和装置原理的一门学科。

电子光学早期应用的一个主要方面是电子束器件，它包括示波管、显像管和摄像管等。与此同时，在1932—1933年出现了第一台电子显微镜，它的分辨率很快就超过了光学显微镜，显示出很强的生命力。1942年制成了扫描电子显微镜，到1965年有了出售的商品。近年来，由于离子与固体表面作用的独特优异性能，扫描离子显微镜取得了重大的进展。70年代以后，随着表面科学的发展，研制出了如俄歇电子谱仪、光电子谱仪、低能电子衍射仪和二次离子质谱仪等各种多用途的综合分析仪器。另外电子束焊接，电、离子束微细加工，离子束注入等的应用又为电、离子束开辟了一个新的领域。电子、离子束应用的上述发展，说明了它们已经并还将更进一步地在现代科学技术的发展中起重大作用。

在这些电、离子束器件和仪器的电子枪和偏转系统等的设计、算中，都涉及到大量的电、离子光学问题。由于近年来计算机和计算技术的迅速发展，促进了电、离子光学和计算技术的紧密结合，逐步形成和完善了电、离子光学系统的分析、计算和设计方法的计算机辅助设计(Computer Aided Design)，对电、离子光学理论的进一步完善和应用的扩展具有重大意义，也

EAD 15/57

是计算机辅助设计方法在各应用领域中取得巨大成功的方面之一，而且目前仍在蓬勃发展中。

电子、离子光学系统的设计、计算问题，主要包括：构成光学系统电磁场的场分布的计算；荷电粒子在给定场中的运动轨迹；系统特性参量和像差的分析、计算等方面。为此本书分上、下两篇，上篇为电磁场数值分析部分，下篇是电、离子光学计算机辅助设计部分。

在电磁场数值分析部分中，着重介绍了当前使用较多的四种数值计算方法。它们是：属于场域分割法的有限差分法和有限元法，属于边界分割法的模拟电荷法和边界元法。最后，为了求解例如阴极发射电子的能量分布等随机性问题，又介绍了一种具有独特风格的数值计算方法——蒙特卡洛法。这一方法随着当前计算机和计算技术的不断发展，越来越显示出它的优越性，它在计算技术中的地位也越来越重要。

结合我们的教学和计算实践，在电、离子光学辅助设计部分着重介绍了轴对称电（磁）透镜场分布和荷电粒子轨迹的计算和确定，电（磁）透镜特性参量及像差计算，以及电子枪发射系统和电（磁）偏转系统的计算，由于计算机辅助优化设计加速了系统的设计试验过程，显示出是一种很有前途的方法，为此本篇最后又介绍了电、离子光学系统的计算机辅助优化设计方法。

本书各章均附有实际计算的示例。

本书上篇由储璇雯编写，下篇由谢志行编写。在全书编写过程中沈庆焘教授提出了许多宝贵的意见，并给予了热情的关怀和支持。还得到浙江大学电工基础教研组倪光正老师以及光电技术教研组有关同志的许多帮助，作者在此一并表示深切的谢意。

限于编著者的能力和水平，书中不够完善或不妥之处，敬请读者批评指正。

**编著者**

1988年10月于浙江大学

# 目 录

## 上篇 电磁场数值分析

<b>第一章 有限差分法</b> .....	1
§1-1 引言.....	1
§1-2 拉普拉斯方程和泊松方程的差分格式.....	3
§1-3 差分方程组的求解.....	19
§1-4 计算点状源发射系统的SCWIM 方法.....	28
§1-5 时变电磁场中的有限差分法.....	33
§1-6 示例.....	41
<b>第二章 有限元法</b> .....	50
§2-1 有限元法的基本原理和实施概述.....	50
§2-2 有限元近似.....	68
§2-3 基于参元的近似.....	71
§2-4 常用的典型单元.....	85
§2-5 近似积分.....	95
§2-6 有限元法的矩阵公式.....	106
§2-7 示例.....	123
<b>第三章 模拟电荷法</b> .....	134
§3-1 基本原理和方法.....	134
§3-2 常用的模拟电荷类型, 关于电位和电场强度 的计算公式.....	141
§3-3 复合媒质中的电场问题.....	156
§3-4 组合算法.....	159

§3-5 示例：液态金属离子源发射系统的计算·····	164
<b>第四章 边界元法</b> ·····	<b>170</b>
§4-1 概述·····	170
§4-2 矩量法·····	172
§4-3 表面电荷法·····	180
§4-4 高斯——契比雪夫求积公式在旋转对称电极 系统中的应用·····	186
§4-5 一般三维场的计算·····	195
§4-6 表面电荷法与模拟电荷法的比较·····	200
§4-7 边界积分方程法·····	204
§4-8 计算磁场的边界元方法·····	214
§4-9 示例：用表面电荷法计算等径双圆筒电子透 镜的轴上电位·····	224
<b>第五章 蒙特卡洛法</b> ·····	<b>233</b>
§5-1 蒙特卡洛方法基础·····	233
§5-2 随机变量抽样·····	247
§5-3 蒙特卡洛方法在积分计算中的应用·····	258
§5-4 用蒙特卡洛方法计算电磁场·····	261
§5-5 示例：用蒙特卡洛法确定液态金属离子源离 子发射的初始条件·····	265
<b>附录</b> ·····	<b>272</b>

## 下篇 电、离子光学系统的数值分析

<b>第六章 荷电粒子轨迹的确定</b> ·····	<b>291</b>
§6-1 确定荷电粒子轨迹的基本方程·····	292



§6-2	轴对称静电场中运动方程的求解	295
§6-3	外推法	310
§6-4	轨迹计算中精度控制方法	315
§6-5	插值电位及其电位梯度的计算	317
§6-6	简正傍轴轨迹方程的应用	319
§6-7	曲轴轨迹的计算	321
§6-8	磁聚焦——磁偏转复合场中电子轨迹的计算	329
<b>第七章 电(磁)透镜特性参量及像差计算</b>		
§7-1	轴对称电(磁)透镜特性参量的计算	334
§7-2	四极透镜特性参量计算	342
§7-3	电(磁)透镜象差计算	348
§7-4	相空间动力学在电、离子透镜设计中的应用	353
§7-5	调制传递函数的计算	359
<b>第八章 电子枪发射系统的计算</b>		
§8-1	发射系统的特性参量	368
§8-2	阴极发射电流和近阴极区电位的计算	371
§8-3	考虑横向热初速效应时的包络方程——惠勃模型	378
§8-4	同时考虑纵横向热初速效应时的包络方程 二官模型	382
§8-5	考虑热初速分布后的空间电荷密度	383
§8-6	主轨迹的计算	386
§8-7	示例: 显像管电子枪发射系统的计算	388

§8-8 发射系统计算的蒙特卡洛方法·····	392
<b>第九章 偏转系统的计算</b> ·····	<b>401</b>
§9-1 静电偏转器的场分布及场函数·····	401
§9-2 边界元法计算多极静电偏转场·····	407
§9-3 磁偏转系统·····	412
§9-4 偏转线圈磁场的计算·····	426
§9-5 边界元法在磁偏转场计算中的应用·····	448
<b>附录</b> ·····	<b>457</b>
A1. 特殊函数·····	457
A1.1 $\Gamma$ 函数·····	457
A1.2 $\beta$ 函数·····	462
A1.3 超几何函数·····	464
A1.4 椭圆积分·····	469
A1.5 第二类伴随勒让德函数·····	476
A2. 格林函数 $G(r, r')$ 在柱坐标系下展开·····	480
<b>第十章 电、离子光学系统计算机辅助优化设计</b> ·····	<b>486</b>
§10-1 优化设计的一般原则·····	486
§10-2 直接法·····	489
§10-3 解析法·····	502
§10-4 阻尼最小二乘法·····	523
§10-5 正交设计法·····	518
§10-6 示例：直接法在静电聚焦透镜优化设计中 的应用·····	523
§10-7 示例：磁偏转线圈的优化设计·····	530

# 上篇 电磁场数值分析

## 第一章 有限差分法

### §1-1 引言

#### 1. 概述

有限差分法 (Finite Difference Method) 不仅用于电磁场数值计算, 而且是偏微分方程数值求解的一种常用方法。和其它方法相比, 它应用得最早, 1940 年就已经开始应用。由于其简单、直观等特点, 到 50 年代得到了广泛的应用。30 多年来已经形成了各种各样的数值计算方法, 发展甚快。这一方面是由于许多待求的电磁场工程技术问题的复杂性, 难以用解析法得到满意的结果, 必须考虑用比较简便的方法求得它们的数值解的缘故。另一方面计算技术的发展也为此提供了物质基础。

有限差分法以差分原理为基础, 它的基本思想是把场域划分成网格, 着眼于网格节点。将网格节点电位作为未知数的差分近似替代该点的偏导数, 从而把待求的偏微分方程的边值问题转化为一组相应的差分方程问题。然后, 由差分方程组解出网格节点电位值, 它们就是所求边值问题的数值解。

因此通常的解题步骤是:

- ① 采用一定的网格剖分方式使场域离散化。
- ② 应用差分原理, 对场域内偏微分方程以及场域边界上的边界条件 (包括场域内不同媒质分界面上的边界条件) 进行差分离散化处理, 给出相应的差分计算公式。
- ③ 选用适宜的线性代数方程组求解法, 编制计算程序。

由上面的讨论可见，网格剖分方式直接决定了离散点（网格节点）的分布形式和差分方程的具体内容。因此，虽然原则上可以采用任意的网格剖分方式，但是为了能在每个离散点上得到相同形式的差分方程，以便有效地提高解题速度，常采用规则分布的网格剖分。通常使用最多的是矩形或正方形网格。

## 2. 电磁场的边值问题

电磁场问题的理论基础，也是电磁场问题分析的出发点，是1865年麦克斯韦尔奠定的电磁场基本方程组，它们的微分形式表述为：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{cases}$$

对于各向同性媒质，电场和磁场各有关物理量之间的关系为：

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J}_e = \gamma \mathbf{E} \end{cases}$$

由电磁场基本方程组（麦克斯韦尔方程组）出发，在静态场或似稳场的情况下，场方程可归结为泊松方程或拉普拉斯方程：

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y)$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

为了定解上述偏微分方程，应给定场域边界条件，从而构成电磁场的边值问题。

边界条件通常分为下述三类：

① 给定的是边界上的位函数值

$$U = U(x, y)$$

$U(x, y)$  是边界点  $(x, y)$  的点函数，称第一类边值问题或第略赫利问题。

② 给定的是待求位函数在边界上的法向导数值

$$\frac{\partial U}{\partial n} = U(x, y)$$

称第二类边值问题或聂以曼问题。

③ 给定的是边界上的位函数与其法向导数的线性组合

$$U + f_1(x, y) \frac{\partial U}{\partial n} = f_2(x, y)$$

称为第三类边值问题。

## §1-2 拉普拉斯方程和泊松方程的差分格式

### 1. 二维平面场的差分格式

首先在由边界  $\Gamma$  限定的二维场域  $G$  内，考虑拉普拉斯方程的第一类边值问题。

$$\begin{cases} \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 & \text{在场域 } G \text{ 内} \\ U|_{\Gamma} = U(x, y) & \text{在场域 } G \text{ 的边界 } \Gamma \text{ 上} \end{cases} \quad (1-1)$$

在  $x, y$  平面上，场域  $G$  内作两组平行于坐标轴的直线

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_0 + ih \\ y_j &= y_0 + j\tau \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中:  $i, j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

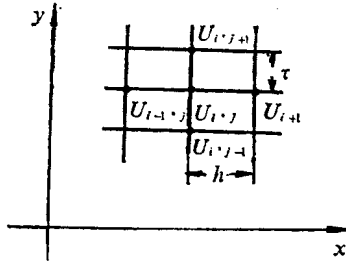


图1-1 场域剖分

$(x_0, y_0)$  是  $x, y$  平面上的一个任意点,  $h, \tau$  分别表示  $x, y$  方向的步长, 两组平行线的交点称为节点。若一个节点的所有四个相邻节点均属于  $G + \Gamma$ , 则称此节点为内部节点 (或简称内点)。若其相邻四个节点中至少有一个不属于  $G + \Gamma$  时, 则称此节点为边界节点。有限差分法求解的目的, 在于求出所有内点上位函数  $U(x, y)$  的近似值。为此, 我们在网格区域  $G + \Gamma$  的每一个内点上用差商代替偏导数, 然后列出与偏微分方程(1-1)相应的差分方程。

应用泰勒公式, 可得:

$$\begin{aligned}
 U_{i+1,j} = U(x_{i+1}, y_j) &= U(x_i, y_j) + h \frac{\partial U(x_i, y_j)}{\partial x} \\
 &+ \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \\
 &\times \frac{\partial^3 U(x_i, y_j)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 U(\xi_1, y_j)}{\partial x^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{i-1,j} = U(x_{i-1}, y_j) &= U(x_i, y_j) - h \frac{\partial U(x_i, y_j)}{\partial x} \\
 &+ \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}
 \end{aligned}$$

$$\times \frac{\partial^3 U(x_i, y_j)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 U(\xi_2, y_j)}{\partial x^4}]$$

式中 $\xi_1, \xi_2$ 为某些中值, 即 $x_{i-1} \leq \xi_1, \xi_2 \leq x_{i+1}$ , 将上两式相加, 得到:

$$\begin{aligned} & \frac{U(x_{i+1}, y_j) - 2U(x_i, y_j) + U(x_{i-1}, y_j))}{h^2} \\ &= \frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{4!} \left( \frac{\partial^4 U(\xi_1, y_j)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U(\xi_2, y_j)}{\partial x^4} \right) \\ &= \frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial x^2} + O(h^2) \end{aligned}$$

同理可得:

$$\begin{aligned} & \frac{U(x_i, y_{j+1}) - 2U(x_i, y_j) + U(x_i, y_{j-1}))}{\tau^2} \\ &= \frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\tau^2}{4!} \left( \frac{\partial^4 U(x_i, \eta_1)}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U(x_i, \eta_2)}{\partial y^4} \right) \\ &= \frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial y^2} + O(\tau^2) \end{aligned}$$

式中:  $y_{j-1} \leq \eta_1, \eta_2 \leq y_{j+1}$

引进记号:

$$\begin{aligned} \Delta_h U(x_i, y_j) &= \frac{U(x_{i+1}, y_j) - 2U(x_i, y_j) + U(x_{i-1}, y_j))}{h^2} \\ &+ \frac{U(x_i, y_{j+1}) - 2U(x_i, y_j) + U(x_i, y_{j-1}))}{\tau^2} \end{aligned}$$

则有

$$\Delta_h U(x_i, y_j) = (\Delta U)_{i,j} + O(h^2 + \tau^2)$$

为了简便起见, 用 $U_{i,j}$ 表示 $U(x, y)$ 在 $(x_i, y_j)$ 节点上的近似值。若 $U(x, y)$ 是 $\Delta U = 0$ 的精确解, 则在 $(x_i, y_j)$ 节点上

应满足方程

$$\Delta_h U(x_i, y_j) = O(h^2 + \tau^2)$$

略去  $O(h^2 + \tau^2)$  不计，则对应于微分方程 (1-1) 的差分方程应为：

$$\begin{aligned} \Delta_h U_{i,j} = & \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \\ & + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\tau^2} = 0 \end{aligned} \quad (1-3)$$

这就是最常用的五点差分格式，当  $x, y$  方向的步长相等，即  $\tau = h$  时，称为正方形网格，此时的差分格式为：

$$U_{i,j} = \frac{1}{4} (U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i-1,j} + U_{i,j-1}) \quad (1-4)$$

若讨论的偏微分方程是泊松方程，即

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1-5)$$

则相应的差分方程为：

$$\begin{aligned} & \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\tau^2} \\ & = f_{i,j} \end{aligned} \quad (1-6)$$

式中： $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$

对于正方形网格，相应的差分方程是：

$$U_{i,j} = \frac{1}{4} (U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i-1,j} + U_{i,j-1})$$



$$-\frac{h^2}{4}f_{i,j} \quad (1-7)$$

以上公式的截断误差都是  $O(h^2)$ ，即为  $h^2$  的量级。

## 2. 轴对称场的差分格式

在电、离子光学问题的计算中，经常遇到的是具有轴对称特征的三维场问题。此时可归结为轴对称平面内场的分析计算问题，即轴对称场问题。对于这类问题，宜采用圆柱坐标系。

位于轴对称  $r, z$  平面上的场域离散化和二维场中的情况是一样的。应注意的是，它们的空间分布是完全不相同的。在轴对称场中，网格在空间的连续分布是关于对称轴的一系列旋转体。

若对称轴与  $z$  轴相重合，由于位函数  $U$  与  $\theta$  无关，即  $\partial U / \partial \theta = 0$ ，故泊松方程为：

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f_{r,z} \quad (1-8)$$

作  $x \rightarrow r, y \rightarrow z$  的替换后，同样可得用圆柱坐标描述的轴对称场的差分格式：

$$U_{i,j} = \frac{1}{4} \left\{ \left( 1 + \frac{h}{2r_0} \right) U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + \left( 1 - \frac{h}{2r_0} \right) \right. \\ \left. \times U_{i-1,j} + U_{i,j-1} - h^2 f_{i,j} \right\} \quad (1-9)$$

式中： $r_0$  是  $i$  点的离轴位置。

对位于轴线上的点，即  $r_0 = 0$  时，由于场的轴对称性，在轴上有  $\partial U / \partial r = 0$ ，导致(1-8)式中的  $\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$  项变成不定值。

此时可使用罗彼塔定理，即

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)'}{(r)'} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right)_{r=0}$$