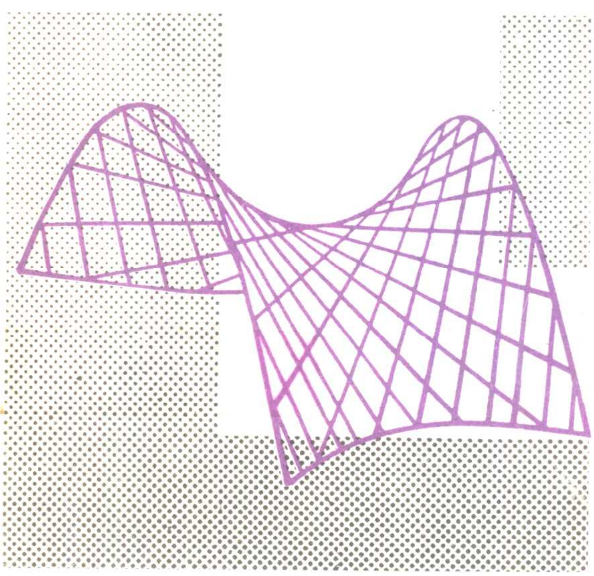
高等学校建筑工程专业系列教材

有限单元法及计算程序

哈尔滨建筑大学　王焕定
重庆建筑大学　吴德伦　主编
西安建筑科技大学　林家骥　主审



中国建筑工业出版社

高等学校建筑工程专业系列教材

有限单元法及计算程序

哈尔滨建筑大学 王焕定 主编
重庆建筑大学 吴德伦

哈尔滨建筑大学 王焕定 王伟 编
重庆建筑大学 吴德伦
西安建筑科技大学 李青宁 赵桂平
武汉城市建设学院 金康宁

西安建筑科技大学 林家骥 主审

中国建筑工业出版社

（京）新登字 035 号

本书是在哈尔滨建筑大学、重庆建筑大学、西安建筑科技大学和武汉城市建设学院十多年本科、硕士研究生教学讲义与教材的基础上修订、增补而成。

全书共十二章，包括绪论、预备知识、杆系结构有限元、弹性力学平面问题有限元、空间问题与轴对称、板壳分析初步、板壳有限元分析(续)、弹性力学广义变分原理及其在有限元中的应用、有限元动力分析、非线性有限元初步与材料非线性分析、弹性稳定性与几何非线性分析和其他数值方法（含加权余量、半解析、样条有限元和边界单元法）。前六章供本科高年级学生学习有限单元法用，并可供硕士研究生和部分专业博士生选用。

本书取材适宜，由浅入深，内容丰富，引入了不少新内容和科研成果；论述严谨、细致，便于学习；较重视原理与方法的论证，但也有足够的算例，几乎章章都有配书教学软件，便于应用和编程参考。

本书可作为土木、交通、水利和工程力学等专业的本科、硕士研究生教材，也可供有关工程技术人员参考。

高等学校建筑工程专业系列教材

有限单元法及计算程序

哈尔滨建筑大学　王焕定
重庆建筑大学　吴德伦　主编

哈尔滨建筑大学　王焕定　王　伟
重庆建筑大学　吴德伦
西安建筑科技大学　李青宁　赵桂平
武汉城市建设学院　金康宁　编

西安建筑科技大学　林家骥　主审

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）
新华书店总店科技发行所发行
北京云浩印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米　1/16　印张：30¼　字数：730 千字
1997 年 6 月第一版　1997 年 6 月第一次印刷
印数：1—3000 册　定价：30.70 元

ISBN 7-112-02991-0
TU・2283（8106）

高等学校建筑工程专业力学系列教材
编审委员会成员名单

前　言

80 年代以来，我国高等院校在土木、水利、道桥等工程和应用理论专业的本科高年级和研究生教育中，已把有限元法列入选修课或学位课。这是因为有限元的研究对象广泛，不仅可解决杆系结构分析问题，而且还解决板、壳、三维连续体及各种复杂组合结构和复杂结构系统间的相互作用问题；有限元法分析结构的复杂力学性能也十分有效，不仅可以分析结构的弹性性能，还可以解决弹塑性、断裂及各种大变形性能分析问题；有限元法框架内发展起来的现代变分原理和相应的单元格式以及有限元数值方法的计算机实现等方面也产生了若干积极成果。因此，有限元法在解决工程和科学问题中的地位和作用随着计算机辅助设计、辅助管理的普及与提高显得愈来愈重要。近十多年来，本书作者在担任结构力学、有限元法等课程的教学和研究工作中不断学习，汲取国内外的新近成果，积累了一些点滴经验和研究心得。本书就是在这样的背景下，在中国建筑工业出版社及高等学校建筑工程专业力学系列教材编审委员会推动下完成的。

本书的目的是作为土木、水利、道桥等工程专业的本科生高年级提供有限元法和实用程序的入门教材，同时作为这些专业的研究生学位课程教学参考。对于一些从事工程设计或管理的人员来说，本书也可以作为自学或查阅之用。因此，本书按上、下两篇组织编写。第一篇为第一至第八章。作为预备知识，简述了弹性理论概要及有限元中常用的虚功原理，接着以读者较熟悉的杆系结构为对象讲述了有限元分析的概念和方法。平面问题有限元一章是有限元法思想、步骤的集中体现，通过本章学习，读者可以理解到有限元法不仅能解决复杂结构的分析问题，而且作为一种科学的分析方法，有限元法不失为解决科学研究问题的一个范例。因此，这个方法很自然地推广到解决空间问题、轴对称问题及板、壳分析问题。然而，象板壳这类问题，由于其几何量和力学量的一些特性，具体分析中还会遇到许多数值分析上的困难，诸如计算速度、精度、收敛性等等。从而迫使人们在有限元框架内去研究各种单元模式和相应的能量原理。要在本书中全面反映这方面的一些研究成果是不可能的。因此，本书第七章专门介绍了板壳分析的一些新近研究成果。这些成果已用于工程分析。对于从事结构分析的人员来说，了解这些内容是有益的，因为不少分析软件内核即是与这些内容相关联的。广义变分原理是为了拓宽有限元法的理论基础而写的，各种变分原理是建立有限元模式的理论依据，也是各种新型有限元赖以立足的基石。本书第二篇为第九至第十二章，由动力分析、非线性分析及与有限元相关的其他数值方法组成。在动力有限元一章中除讲述常用方法外，还介绍了求动力反应的高精度的高阶单步 β 法。第十、十一章集中讲述有限元非线性分析的理论和方法，包括材料非线性、几何非线性分析两个部分。对于涉及到的非线性方程组解法、结构有限变形理论、材料本构理论等内容都作了扼要描述。最后，作为有限元法的补充，第十二章介绍了加权余量法、半解析法、有限条法、边界元法等。虽然这些方法都有专著，本章简洁、明了地概括它们的思路和理论

线索对于拓宽读者在数值分析方面的知识，理解有限元与它们的联系和区别无疑是有所裨益的。

本书系统性强，由浅入深，重在讲述方法的理论基础、概念和思路，力求做到概念清晰，层次分明。在教材上注意了传统内容与新近成果的关系，使之便于学习，利于教学。各章都有例题和较丰富的习题，各主要方法和主要结构型式分析都配有相应的计算程序，可供读者直接上机使用。多数程序为源程序也可供读者作为编程或扩展之参考。根据作者教学体会，作为本门课学习，书中例题、习题固然不可少，与之配套的程序和计算机上机作业显得更为必要。

本书由王焕定、吴德伦主编。王焕定编写第一、三、七、八及第十二章的主要部分。吴德伦编写第四、十、十一章及附录，王伟编写第二章。李青宁、王伟编写第九章。赵桂平编写第五章。金康宁编写第六和第十二章的边界元法部分。全书分为两篇。第一篇为第一至第八章，由王焕定统稿。第二篇为第九至第十二章及附录，由吴德伦统稿。在统稿时，对一些章节作了变动、补充或删节。最后由西安建筑科技大学林家骥教授主审并提出了很多宝贵的意见和建议，对此我们深表感谢。本书程序除编者的工作外，哈尔滨建筑大学张永山副教授、河北建筑工程学院王永跃副教授也作了大量的工作，我们对他们的热忱帮助深表感谢。

目　录

第一篇　基本部分及计算程序

第一篇　基本部分及计算程序

第一章　绪　　论

第一节　何谓有限单元法

有限单元法是随电子计算机应用的日益普及和数值分析技术日益发展而迅速发展的一种新颖有效的数值方法。它在50年代起源于飞机结构的矩阵分析，60年代开始被推广用来分析弹性力学平面问题。由于它所依据的理论的普遍性，因此，很快就广泛应用于求解热传导、电磁场、流体力学等连续问题。目前已在各个工程技术领域中得到了十分广泛的应用。

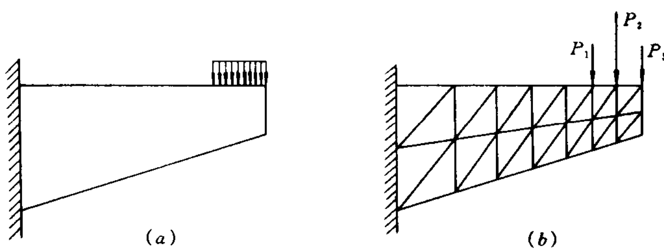


图 1-1　厂房柱的牛腿示意图

现举例说明其基本概念。例如，为分析单层工业厂房柱子牛腿部分的应力分布，可通过分析如图 1-1（a）所示的一个平面截面内的位移分布来解决。用有限单元法分析这一问题时，可有如下两种理解。

从物理角度理解，可把牛腿连续的梯形截面分割成图 1-1（b）所示的很多小三角形，这些小三角形称作为单元，单元与单元之间认为仅在一些结点（如图 1-1b 的三角形顶点）处相连接（铰链或刚性连接），以这一离散的单元集合体近似代替原连续体结构。如果能象杆系结构矩阵分析那样，合理地求得各单元的特性（即建立单元刚度方程），就可以进一步获得单元组合结构的特性。从而在给定荷载及给定约束条件下，求出单元组合体各结点的位移，进而求解单元应力等等。这就是有限单元法直观的、物理的解释。

从数学角度理解，将牛腿梯形的求解区域剖分成图 1-1（b）所示的许多三角形子域，对每个子域的位移分布可用子域上某些点（也即结点）的待定位移及合理的插值函数来表示，整个求解域的位移则以某些限制下的各子域位移表达。然后，利用问题控制方程或其对应的泛函及约束条件，建立求解各结点待定位移的线性代数方程组。如果待解问题是温度场等其他连续域问题，结点的未知量将是温度等相应的其他物理量。这就是有限单元法的数

学解释。

在一定条件下，用什么样的单元集合体来近似代替真实求解问题（结构或求解域），如何合理地建立各单元的变量场以代替其真实解，如何正确地进行各单元的特性分析，这种分析中应满足的条件、应注意的问题等，就是有限单元法所要研究的内容。

第二节　有限单元法分析过程

不管用有限单元法分析一维、二维、三维还是板壳等问题，其基本分析过程都是一样的，概括起来可以分为以下五步。

一、结构的离散化

所谓离散化是指，将待分析的结构用选定的单元型式划分成有限个单元体，把单元的一些指定点设为连接相邻单元的结点，以单元的集合体来代替原结构。

在这一步应做的具体工作是：建立坐标系；对单元和结点进行合理编号；为以下的有限单元法具体分析准备必要的信息。所用应用软件不同，所需准备的数据也不同。对具有“前处理”功能的有限元应用软件来说，可以人机交互地只输入少量计算所必不可少的信息，其他大量信息将由软件控制自动生成。这不仅方便了程序的使用，而且也可减少原始数据的输入错误。

下面将以弹性力学问题的有限单元法为例，说明剩余的四个基本过程。

二、确定位移模式

完成离散化工作后，为对典型单元进行特性分析，必须对单元中的位移分布作出合理的假设，也即假设单元中任一点的位移可用结点待定位移的一个合理、简单的坐标函数来表示，这一坐标函数称作为位移模式或位移函数。

位移模式的确定是有限单元法分析的关键。比较常用的做法是以多项式作为位移模式，这是因为其微积分运算比较简单。从泰勒级数展开的意义上来说，任意光滑函数的局部均可用多项式来逼近。位移模式的确定是本书主要讨论的问题之一，将在以后各章中结合具体的单元加以介绍。

本步工作的结果是建立起如下的矩阵方程

$$\underset{\sim}{d}=\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{\delta}_e \tag{1-1}$$

式中　$\underset{\sim}{d}$——单元中任一点的位移列阵；

$\underset{\sim}{N}$——形函数矩阵，其元素是坐标的函数；

$\underset{\sim}{\delta}_e$——单元的结点位移列阵。

三、单元特性分析

确定了单元位移模式之后，即可对单元做以下三方面工作：

1. 利用几何方程（应变-位移关系）将单元中任一点的应变用待定结点位移来表示，也即建立如下矩阵方程

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\delta}_e \tag{1-2}$$

式中　$\underset{\sim}{\varepsilon}$——单元中任一点的应变列阵；

$\underset{\sim}{B}$——形变矩阵，一般其元素是坐标的函数。

2. 利用物理方程（应力-应变关系）导出用单元结点位移表示的单元应力矩阵方程

$$\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\delta}_e=\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{\delta}_e \tag{1-3}$$

式中 $\underset{\sim}{\sigma}$——单元中任一点的应力列阵；

$\underset{\sim}{D}$——与单元材料有关的弹性矩阵；

$\underset{\sim}{S}$——应力矩阵，一般其元素是坐标的函数。

3. 利用虚位移或最小势能原理建立刚度方程

$$\underset{\sim}{V}_e+\underset{\sim}{P}^e_{eq}=\underset{\sim}{K}_e\,\underset{\sim}{\delta}_e \tag{1-4}$$

式中 $\underset{\sim}{V}_e$——单元结点力列阵；

$\underset{\sim}{P}^e_{eq}$——单元等效荷载列阵，与作用在单元上的外荷载有关，其计算以后介绍；

$\underset{\sim}{K}_e$——单元刚度矩阵，可导得它按下式计算：

$$\underset{\sim}{K}_e=\int_{V_e}\underset{\sim}{B}^{\mathrm{T}}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{B}\,\mathrm{d}V \tag{1-5}$$

（V_e 为单元体积）

在以上三方面工作中，核心的工作是建立单元刚度矩阵和等效结点荷载列阵。

四、集成所有单元的特性，建立整个结构的结点平衡方程

本步工作象杆系结构矩阵分析一样，利用直接刚度法“对号入座”集成整个结构的整体刚度矩阵和综合等效结点荷载列阵（包括直接结点荷载与等效结点荷载两部分），从而建立结构整体刚度方程

$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\Delta}=\underset{\sim}{P} \tag{1-6}$$

式中 $\underset{\sim}{K}$——结构整体刚度矩阵；

$\underset{\sim}{\Delta}$——结构整体位移列阵；

$\underset{\sim}{P}$——结构综合等效结点荷载列阵。

本步工作的具体细节因所求解问题和程序处理方法的不同有所区别，对一些问题将存在坐标（局部与整体）转换问题，对于“后处理”法（用于对号入座的定位向量可不考虑边界位移约束）还存在位移边界条件的引入等问题。

五、解方程组和计算输出结果

对线性问题，整体刚度方程式（1-6）将是一组线性代数方程组，一般是高阶方程组。由于整体刚度矩阵的高阶、带状、稀疏和对称的特性，在有限单元法发展过程中，研究建立了许多不同的存贮方式和相应的计算方法，利用它们可以解出全部未知位移（对于非线性分析，则要通过一系列的步骤，逐步修改刚度矩阵或荷载列阵，用相应的算法才能获得解答）。

求出位移后，可以进一步计算应力（或内力），并用数表或图形方式输出整理后的结果，在此基础上再结合具体问题进行结构设计。

第三节　有限元发展概况

早在 1943 年，Gourant 就采用分片（也即上节子域）插值的思想，用最小势能原理分析了圣维南（St. Venant）扭转问题。但由于当时没有电子计算机这一工具，没能用来分析

工程实际问题，因而未得到重视和发展。

从经典结构力学派生的结构矩阵分析，随着计算技术的发展，早就用于建筑工程的复杂刚架和航空工程的蒙皮骨架等结构的分析。但这些结构本身都是明显地由元件所组成，元件的特性可通过经典的分析来建立。虽然整个分析方法和步骤都与有限单元法相似，也可用矩阵来表达、用计算机来求解，但它与目前广泛应用的有限单元法是有区别的。前者只能分析杆系结构，而不能分析本身没有明显元件的连续体。

50 年代，Turner，Clough，Martin 和 Topp 等学者，首先将平面连续体结构人为地划分成很多三角形的单元，单元内部任一点的位移由三角形三个顶点的待定位移线性插值来得到，在此基础上建立了合理的单元特性公式（也即单元刚度方程），进而象结构矩阵分析一样，用直接刚度法组成单元集合体结构的位移法方程组以求解。这就是上节所述的有限元物理理解。1960 年 Clough 将它命名为有限单元法，以便与弹性力学中取微元体、无限自由度的研究方法相区别。

有限单元法由解决具体工程问题开始，但很快就认识到它是弹性力学中变分问题里兹（Ritz）解法的一种特殊应用。在里兹法中因为要在整个求解域中建立试函数，因此只能解决规则区域的少量简单问题。而有限单元法是通过分片插值建立整个求解域的分片连续函数，所以具有广泛的适用性。也正因为此，有限单元法迅速地被推广应用于由变分原理控制的各种连续域求解问题。

有限单元法在工程中应用的巨大成功，引起了数学界的关注。60～70 年代数学工作者对有限单元法的误差、解的收敛性和稳定性等方面进行了卓有成效的研究，从而巩固了有限单元法的数学基础。我国数学家冯康，在 60 年代研究变分问题的差分格式时，也独立地提出了分片插值的思想，为有限单元法的创立做出了贡献。

以结点位移作为基本未知量，插值构造单元内部位移场从而建立有限元分析的位移协调元，这是有限元形成以来一直主要研究的方面。但是，位移协调元在分析板壳结构时遇到了相容性（也称协调性）难以满足的困难。此外，随着分析问题的日趋大型化、复杂化，位移协调元虽原理上均可应用，终因未知量太多，导致计算时间过长、费用太高等问题。为解决上述问题，又提出了混合元、杂交元、加权残数法、边界元、广义协调元等等新的分析方法和新型单元，这些研究不仅扩大了有限元等数值解法的适用性，也促进了弹塑性力学变分原理和数值计算技术的发展。

有限单元法的应用离不开计算机、有限单元法应用软件，随着有限单元法理论的发展与完善，已开发了许多大型通用有限元程序。它们一般包括结构的静、动力分析和稳定、非线性分析等功能，有的还包含热传导、热应力、流体分析等功能，有齐全的单元库。利用通用程序，一般的工程问题均可获得解决。但这些通用程序常常需要在大型机上或工作站上运行，掌握其应用比较困难，某些新研究内容可能还不能解决。因此针对某一特定内容开发各种特殊问题的专用软件，在充分考虑“可重用性”的前提下，积累与组成有限单元法分析程序库和可重用“构件”库，对工程应用和加快软件开发是很有实际意义的。

有限单元法从被命名到现在已有 30 多年的历史，已成为新兴学科——计算力学的一个领域，它与任何学科的发展一样，已进入平缓发展阶段。但除在巩固有限单元法的物理、数学基础，扩大其应用领域等方面还将不断取得进展外，在并行算法研究、计算可视化和智能化、不确定信息处理等方面，随着计算机技术日新月异的发展，也还将有较快的发展。

第四节　内容安排与学习指导

本书共十二章分成两篇。第一篇包含前六章，它是有限元法的基本内容，既可作硕士研究生的教材，也可供本科高年级学习有限元选用。第二篇是为土木、交通、机械、水利和结构力学硕士研究生选用的提高部分内容，其内容又分两类：第七、八章为必读部分；第九～十二章为选读部分。前者，作为硕士生是必须掌握的基本内容；后者，是可以结合研究方向进行选择的专题内容。由于各专题内容都是有限单元法的一个分支，其内容十分丰富，都有相应的专门书籍。作为一本教材当然只能安排其最基本的原理与方法，为读者结合研究课题深入学习该方面知识打下必要的基础。

除专题内容外，基本上各章均安排一段文字指出本章内容的重点及各知识点的要求层次，以便初学者和教师选择讲授内容时参考。

基本内容各章均在章后安排有一定数量的复习题，除一些以供应用教学程序上机实践外，绝大多数是为巩固所学原理及方法而安排的。我们多年的教学实践表明，思考或动手做一定量的作业，对很好掌握有限单元法的原理与方法是不可少的。

其次，除少数章外，基本上每章均附有一个教学参考程序。将配书软盘用如下命令

当前盘符或路径>a：aextract↓

或　　　　　　　…>b：bextract↓　　（有下划线部分为 DOS 命令）

安装后，当前路径的 finite 目录下除 PE＊．＊文件（PE2 编辑软件）和 DOSXMSF.EXE 外，＊.FOR 为源程序，＊.TXT 为数据填写说明文件，＊.DA? 为数据文件举例（＊.DA1 多数为＊.TXT 与＊.DAT 的组合），＊.EXE 为可执行程序，＊.DOC 为两个（平面刚架和平面应力）用元语言表示的程序设计说明文件。建议读者结合一些工程的力学计算问题，参照＊.DA1形成该问题的数据文件，应用相应的程序进行计算，从而提高自己的使用程序进行力学分析的能力。对编程有兴趣和有余力的读者，建议结合原理阅读源程序，从中吸取编制经验，若能进一步对一些程序作修改，使其功能增强或使用更方便，则对提高自己的程序设计能力是很有益的。

全书力图物理概念清晰、准确，内容安排由浅入深，尽可能讲得细致一些以便自学。一些打＊号的内容，初学时可以越过，待掌握了有限元基本内容后再看可能收获更大。

第二章　预 备 知 识

为便于下面各章的学习，本章首先介绍弹性理论有关方程的矩阵表达式，然后介绍作为有限元位移法（位移为基本未知量的）理论基础的变形体虚位移原理和最小势能原理，最后简单介绍里兹法求近似解的应用。对上述内容已经熟悉的读者，可以越过本章，直接学习后面的内容。否则，应深刻理解变形体虚位移原理和最小势能原理的合理表达和证明的基本思想；应熟练掌握并能灵活应用格林公式；应了解如何用里兹法求近似解。

第一节　弹性理论有关方程的矩阵表示

本节将以笛卡儿坐标系下的三维问题为例加以说明。

一、运动方程（内力与体积力的关系）

根据达朗贝尔原理，在考虑微元体上惯性力后，由瞬时 t 处于“动平衡”可得体积 V 内任意一点的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\tag{2-1}$$

当记　位移列阵　$\underset{\sim}{d}=[u\quad v\quad w]^{\mathrm{T}}$

体积力列阵　$\underset{\sim}{F}=[X\quad Y\quad Z]^{\mathrm{T}}$　(2-2)

应力列阵　$\underset{\sim}{\sigma}=[\sigma_x\quad \sigma_y\quad \sigma_z\quad \tau_{xy}\quad \tau_{yz}\quad \tau_{zx}]^{\mathrm{T}}$

时，若引入如下微分算子矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}=\underset{\sim}{A}\tag{2-3}$$

则根据矩阵乘法规则不难证明，体内一点的运动方程可用如下矩阵方程来表示

在 V 内
$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{F}=\rho\frac{\partial^2 \underset{\sim}{d}}{\partial t^2}\tag{2-4}$$

当物体在外力作用下处于平衡状态时，上式变为平衡方程

在 V 内
$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{0}\tag{2-5}$$

二、几何方程（应变与位移的关系）

在微小变形情况下，通过分析一点的三个坐标方向的微分线段的相对伸长和它们间的三个直角改变，可得一点的六个应变分量与位移间的关系

$$\text{在}V\text{内}\quad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \tag{2-6}$$

当记应变列阵

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^{\mathrm{T}} \tag{2-7}$$

时，由矩阵乘法不难验证几何方程可用如下矩阵方程表示

$$\text{在}V\text{内}\quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}} \underset{\sim}{d} \tag{2-8}$$

式中　$\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}$——微分算子$\underset{\sim}{A}$的转置矩阵。

三、本构关系（物理方程——应力与应变的关系）

对于各向同性均质线弹性体，由广义虎克定律可知应力，应变之间存在如下本构关系

$$\text{在}V\text{内}\quad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] & \gamma_{yz} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz} \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx} \end{cases} \tag{2-9}$$

当记

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{D}^{-1} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -\mu & 1 & & & \text{对称} & \\ -\mu & -\mu & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \tag{2-10}$$

时，式（2-9）的本构关系可用如下矩阵方程表示

$$\text{在}V\text{内}\quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}^{-1}\,\underset{\sim}{\sigma} \tag{2-11}$$

$$\text{或}\quad \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{a}^{-1}\,\underset{\sim}{\varepsilon} \tag{2-12}$$

式中$\underset{\sim}{D}$称作弹性矩阵，由$\underset{\sim}{a}$矩阵求逆可知

$$\underset{\sim}{D} = \mathrm{diag}[\underset{\sim}{D}_1 \quad \underset{\sim}{D}_2] \tag{2-13}$$

其中

$$\underset{\sim}{D}_1 = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\mu}{1-\mu} & \dfrac{\mu}{1-\mu} \\ \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 & \dfrac{\mu}{1-\mu} \\ \dfrac{\mu}{1-\mu} & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 \end{bmatrix} \tag{2-14}$$

$$\underset{\sim}{D}_2=\frac{E}{2(1+\mu)}\underset{\sim}{I}_3$$

当以拉梅系数表示本构关系时，有

$$\underset{\sim}{D}_1=\begin{bmatrix}\lambda+2G & \lambda & \lambda\\ \lambda & \lambda+2G & \lambda\\ \lambda & \lambda & \lambda+2G\end{bmatrix}\tag{2-15}$$

$$\underset{\sim}{D}_2=G\,\underset{\sim}{I}_3$$

式中　　拉梅系数 $\lambda=\dfrac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$　$G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$　　(2-16)

四、变形协调方程

当以应力作为基本未知量求解弹性力学方程时，通过本构关系所得的应变尚须在体积内满足如下变形协调方程〔在式（2-6）的条件下，它们应是恒等式〕

$$\text{在}V\text{内}\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x^2 y}\\[2mm] \dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}\end{cases}\tag{2-17}$$

引入协调算子矩阵

$$\underset{\sim}{C}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & 0 & 0\\[2mm] 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z} & 0\\[2mm] \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & -\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial x}\\[2mm] -2\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z} & 0 & 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial z\partial x} & -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}\\[2mm] 0 & -2\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial x} & 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\\[2mm] 0 & 0 & -2\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & -\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial z} & \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z}\end{bmatrix}\tag{2-18}$$

变形协调方程可用如下矩阵方程表示

在 V 内　　$\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{\varepsilon}=\underset{\sim}{0}$　　(2-19)