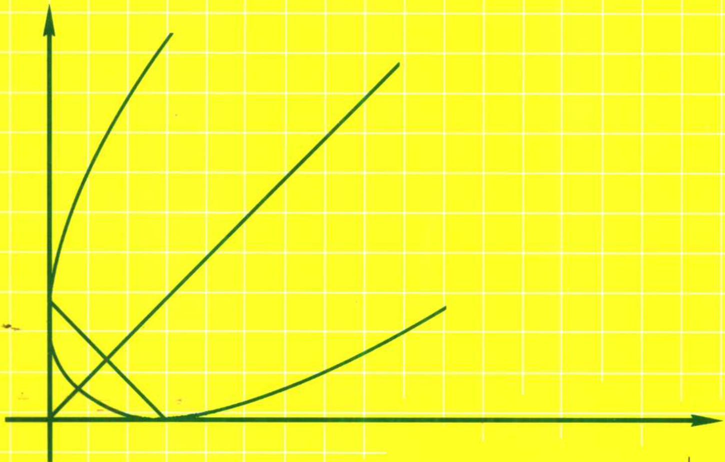

高等数学

例题与习题集

第2版

石建城 李佩芝 徐文雄

西安交通大学出版社

高等数学例题与习题集

(第2版)

石建城　李佩芝　徐文雄

西安交通大学出版社
·西安·

内 容 简 介

本书根据高等工科学校高等数学课程教学要求编写。按教学内容对应分为11章，每章含有：基本内容提要、例题、练习题、复习题、考研题、测验题等六部分。另有学习高等数学的预备知识，每三章后附有期中测试题或期末测试题，并在附录中附有各章的练习题、复习题、考研题与测验题的答案或提示。

本书可作为各类学科高校高等数学辅助教材或参考书，还可作为报考各学科硕士研究生的数学复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学例题与习题集/石建城编.—2版.西安：西安交通大学出版社，2002.1

ISBN 7-5605-1457-X

Ⅰ.高...　Ⅱ.石...　Ⅲ.高等数学－高等学校－习题　Ⅳ.013－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第061596号

西安交通大学出版社出版发行

(西安市兴庆南路25号　邮政编码:710049　电话:(029)2668315)

蓝田县立新印刷厂印装

各地新华书店经销

※

开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:18.375　字数:627千字

2002年2月第2版　　2002年9月第2次印刷

印数:5 001～10 000　　定价:22.00元

发行科电话:(029)2668357,2667874

第 2 版前言

本书第 1 版是主要针对高等学校理工科各专业高等数学教学和学习的要求。本次再版，为了满足财经、管理等专业教学的需要，并为了各科考研生对下届考研试题内容的前瞻与预测提供条件，作了适当的增改：(1)在第 1 章之前增加一章“预备知识”；(2)在第 2 章的导数概念中增加了导数的经济意义(边际成本、边际利润及产品需求量对于价格的弹性概念)。在每一章的习题中除原有的练习题与复习题外，增加了历届(从 1987 年以来)各科专业的考研试题(试题的右上角注明年份)，为了紧缩篇幅，对考研题中的客观题全部改成主观题，并在书末的附录中附上考研题的答案或提示。

做这样的改动，是否合适，希望读者给予指正并提出宝贵意见。

石建城

2001 年 9 月于西安交通大学

第 1 版序言

高等数学是工科院校最重要的基础课之一,学生们对它掌握得好坏,不仅直接影响到后继课程的学习,而且对今后工作将产生重要的影响。读者在高等数学的学习中,不仅要注意获取必要的数学知识,更为重要的是,在获取数学知识的同时,要努力提高自己的抽象思维、逻辑推理、运算技能、综合应用等方面的能力。一本好的例题与习题集,对内容的消化、巩固以及上述各种能力的培养与训练,都将有重要的作用。

石建城教授从事高等数学教学工作近 40 年,具有丰富的教学经验,并积累了大量的教学资料,这本《例题与习题集》是他与李佩芝、徐文雄两位教授根据多年的教学经验编写的。该书内容的深广度,紧扣国家教委 1987 年颁发的"高等工科学校高等数学课程教学基本要求",对少量超过基本要求的内容及过难的题目,均以"*"号标明,以供学有余力的读者使用。

本书共分 11 章,每章开始有简明的内容提要,便于读者对该章内容的复习和归纳,例题与习题作了精心的挑选与分类,以确保基本概念、基本理论、基本方法为重点,遵循由浅入深、循序渐进的学习规律,将习题分成练习题与复习题两类,以体现基本题与提高题、综合题两个不同的教学阶梯,每章末尾附有测验题,并在适当阶段附有期中测试题或期末模拟试题,便于读者在阶段复习后自我测试。所有习题与测试题的答案都按其次序编写在书末的附页中,对部分难题还附注提示。

本文初稿曾多次在西安交通大学的部分工科专业的学生中结合教学使用,受到广大学生的欢迎,对提高高等数学课程的教学质

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

量，培养学生的自学能力，起了积极的作用。相信本书的出版不仅会对工科院校广大学生学习高等数学课程大有帮助，而且也将有助于成人自学及各科研究生入学前的考前复习。

高等学校工科数学课程教学指导委员会主任

马知恩

1992 年 5 月 30 日

第 1 版编者的话

《高等数学例题与习题集》共分 11 章,每章由“基本内容”、“例题”、“练习题”、“复习题”、“考研题”与“测验题”6 部分组成。其中练习题侧重基本概念.主要适于作课后练习,复习题侧重于难度较大并提高综合能力;考研题除作为补充复习题外,还可供考研前对下届考研试题在本章内容的预测与展望。此外,在第 3 章及第 9 章之后有期中测试题,在第 6 章及第 11 章之后有两套期末试题,在本书末尾的附页部分有每章的练习题、复习题、测验题以及其中、期末测试题的答案或提示,并且还附有(从 1989 届到 1992 届)四届的研究生高等数学入学试题及其内容分布。

本书内容的深广度是按照 1987 年国家教委颁发的“高等工业学校高等数学课程教学的基本要求”而确定的。对超要求或过难的内容与题目都用“ * ”号标出。

第 1、2、6、9、10、11 章以及期中、期末测试题由石建城编写,第 3、7、8 章由李佩芝编写,第 4、5 章由徐文雄编写,全书由石建城统稿。

本书由前高等学校工科数学课程教学指导委员会主任陆庆乐教授悉心审阅,并给予很多建设性的建议,这对本书质量的提高有莫大的帮助,深为感谢。

本书出版过程中,自始至终得到龚冬保教授的大力帮助与支持,特此表示衷心的谢意。

由于时间仓促及限于编者的水平,难免尚有错误与不当之处,诚请读者指正。

1992 年 5 月

目　录

第 11 章　常微分方程

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

预　备　知　识

0.1　初等代数

1. 乘法及因式分解

1) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

2) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

3) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$,　$n=2,3,4,\cdots$.

4) $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\cdots+(-1)^k a^{2n-k}b^k+\cdots+b^{2n})$,　$n=1,2,3,\cdots$.

5) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$,　　a 与 b 都是正的实数

6) $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b$

7) $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}, q\neq\pm 1$

8) 牛顿(Newton)二项式定理($n=2,3,4,\cdots$):

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n$$

2. 指数运算(a,b 都是正数)

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　2) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

3) $(a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn}$　　4) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m, n\neq 0$

5) $(ab)^m=a^mb^m$　　6) $(\dfrac{a}{b})^m=\dfrac{a^m}{b^m}$

3. 对数运算($0<a\neq 1, 0<b\neq 1, u, v$ 都是正数)

设　$u=a^x$,即 $x=\log_a u$

1) $\log_a a = 1$　　2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$　　4) $\log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

5) $\log_a u^v = v\log_a u$　　6) $\log_a \sqrt[v]{u} = \dfrac{1}{v}\log_a u$

7) $\log_a u = \dfrac{\log_b u}{\log_b a}$　　8) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

9) $\log_a a^x = x, -\infty < x < +\infty$　　10) $a^{\log_a x} = x, 0 < x < +\infty$

4. 自然数的乘方和

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n}{2}(n+1)$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [\dfrac{n}{2}(n+1)]^2$

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

5. 阶乘与半阶乘(n 为自然数)

1) 阶乘

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

$$0! = 1$$

2) 半阶乘

$$(2n)!! = \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \cdot n!$$

$$0!! = 0$$

$$(2n+1)!! = \prod_{k=1}^{n}(2k+1) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$$

3) 有关公式与不等式

(1) 斯特林(Stirling) 公式

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1$$

式中： $\pi = 3.141\,592\,65\cdots$,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718\,281\,82\cdots$$

(2) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} < \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

6. 绝对值与不等式

1)绝对值定义

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

2)绝对值的运算

(1) $|xy| = |x|\cdot|y|$　　(2) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

(3) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$　　(4) $|x| - |y| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$

(5) $|x-a| < \delta \quad (\delta > 0)$，即　$a - \delta < x < a + \delta$

7. 一元二次方程　$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

1)根的公式　$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2)根与系数的关系　$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$,　$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

8. 行列式与二元一次方程组

1)二阶行列式定义：设有 4 个实数 $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

称做以 $x_{11}, x_{12}. x_{21}, x_{22}$ 为元素的二阶行列式.

2)三阶行列式

设有 9 个实数 $\{x_{ij}\}\ i = 1,2,3, j = 1,2,3$

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - x_{12}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{13}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}$$

称做以 $\{x_{ij}\}\ i = 1,2,3, j = 1,2,3$ 为元素的三阶行列式.

3)二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(1)当 $\Delta\neq0$,即$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$时方程组有惟一一组解:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta};$$

(2)当 $\Delta=0$ 且 $\Delta_x\neq0$,即$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$时,方程组无解;

(3)当 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$,即$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$时,方程组有无穷多组解:

$x=x,y=\dfrac{c_1}{b_1}-\dfrac{a_1}{b_1}x,b_1\neq0.$

0.2 初等几何公式

设 r 为半径,h 为高,l 为周长,S 为面积,V 为体积

1)三角形 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin\angle C=\dfrac{1}{2}ca\sin\angle B=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle A$

2)梯形 $S=\dfrac{1}{2}(b_1+b_2)h$ (b_1 与 b_2 是底边长)

3)平行四边形 $S=bh$ (b 是底边长)

4)圆 $l=2\pi r$; $S=\pi r^2$

5)扇形 $l=2r+\varphi r$; $S=\dfrac{\varphi}{2}r^2$(其中扇形的圆心角为 φ 弧度)

6)正圆柱 $S_全=2\pi(r+h)r$; $V=\pi r^2h$

7)正圆锥 $S_全=\pi(r+\sqrt{r^2+h^2})r$; $V=\dfrac{\pi}{3}r^2h$

8)正圆锥台 $S_全=\pi[(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}+R^2+r^2]$;

$V=\dfrac{\pi}{3}h(R^2+r^2+Rr)$

9)球 $S=4\pi r^2$; $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

10)椭球 $V=\dfrac{4}{3}\pi abc$ (a、b、c 是椭球的 3 个中心轴的半径)

0.3 平面三角

1)角的度量

1 平角 $=\pi$(弧度)$=180°$,其中 $\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\cdots$

1(弧度)$=\dfrac{180°}{\pi}\approx 57°17'45''$

$1°=\dfrac{\pi}{180}$(弧度)$\approx 0.017\ 45$(弧度)

2)三角函数的定义及其正负值的确定

设在 xoy 坐标系上任意点 $P(x,y)$.

α 是以 Ox 为始边,OP 为终边的角. OP 之长为 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$.

且 $\left(2n+\dfrac{k-1}{2}\right)\pi<\alpha<\left(2n+\dfrac{k}{2}\right)\pi$. $n=0,\pm1,\pm2,\cdots,k=1,2,3,4$ 即 α 总是处在第 k 象限之内($k=1,2,3,4$),见图 0-1.

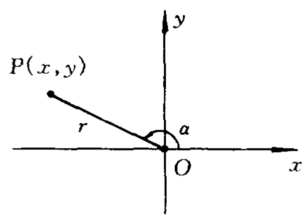

图 0-1

则三角函数的定义与正负号可用下表表示:

三角函数名称	定义	α 角的象限数与三角函数正负号的关系			
		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
$\sin\alpha=\dfrac{1}{\csc\alpha}$	$\dfrac{y}{r}$	+	+	−	−
$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\dfrac{x}{r}$	+	−	−	+
$\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}$	$\dfrac{y}{x}$	+	−	+	−

3)三角函数的基本关系

(1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$; $\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1$;

(2)$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1$; $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$; $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$;

(3)$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4)特别角的三角函数值与诱导公式

(1)设有 5 个特别角:$\alpha_0=0,\alpha_1=\dfrac{\pi}{6},\alpha_2=\dfrac{\pi}{4},\alpha_3=\dfrac{\pi}{3},\alpha_4=\dfrac{\pi}{2}$

则 $\sin\alpha_k = \dfrac{\sqrt{k}}{2}$， $\cos\alpha_k = \dfrac{\sqrt{4-k}}{2}$， $k=0,1,2,3,4$

(2)诱导公式

设 $f(\alpha)$与 $cof(\alpha)$是互为余函数的三角函数，且 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，

则有诱导公式：

$$f\left(\frac{n}{2}\pi+\alpha\right)=\begin{cases}\pm f(\alpha), & n=0,\pm2,\pm4,\cdots\\ \pm cof(\alpha), & n=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots\end{cases}$$

其中 $\pm$ 号由角$\left(\dfrac{n}{2}\pi+\alpha\right)$所处的象限确定.

5)和角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

6)积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

7)和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

8)倍角公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$； $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$；

$\sin3\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha$； $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com