

文科



21SJGDSFJYJC

21世纪高等
师范教育教材

高等数学 基础(B)

——数学思想和方法

华东师范大学出版社

主 编	魏文展	
副主编	黄旭广	
编写者	魏文展	黄旭广
	元昌安	欧 苡
	赵 飞	

图书在版编目(CIP)数据

文科高等数学基础(B)——数学思想和方法/魏文展主编. —上海:华东师范大学出版社,2002.9

ISBN 7-5617-3055-1

I. 文... II. 魏... III. 高等数学-师范大学-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 059586 号



21世纪高等师范教育教材

文科高等数学基础(B)

——数学思想和方法

主 编 魏文展
策划组稿 教材策划部
特约编辑 韩 雷
责任校对 邱红穗
封面设计 卢晓红
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
传真 021-62860410

<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 上海市中山北路 3663 号
邮编 200062

印 刷 江苏苏州永新印刷包装有限责任公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 13.5
字 数 250 千字
版 次 2002 年 9 月第一版
印 次 2002 年 9 月第一次
印 数 001—5 100
书 号 ISBN 7-5617-3055-1/O·132
定 价 18.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

21 世纪高等师范教育教材编委会

主 任 王建磐

副主任 颜泽贤 马钦荣

委 员 (按拼音排序)

卞成林 笄佐领 杜 卫 冯广艺 郭泽深

何向东 胡晓莺 李 贇 刘 鸣 吕九如

罗增儒 马 敏 沈振煜 汪白云 王 超

王 伦 王 屹 王世华 薛守琼 张仲谋

郑祥福 周 鸿 朱小蔓

秘 书 陈强璋

总 序

自中共中央、国务院《关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》提出要“调整 and 改革课程体系、结构、内容,建立新的基础教育课程体系”以来,基础教育课程改革浪潮在全国迅速兴起。基础教育的课程改革必然对师范院校的教学内容提出新的要求,因而更新师范院校教学内容的呼声日渐强烈。教材是教学内容的最基本的表达形式,是对教学内容的系统阐述,是学生在校进行学习、获得系统知识的主要材料。编写出优秀的教师教育教材是广大教师教育工作者孜孜以求的。

正是基于这种认识,我们致力于编写一套“21世纪高等师范教育教材”。本套教材编委会汇集了全国十余所部属和省属师范大学专家学者的意见,确定编写书目,并经过严格的遴选程序,推选出在各专业有较高学术威望、有丰富教学经验、曾经编写出版过教材的学科带头人作为各册教材的主编。

为了适应基础教育课程改革的要求,体现基础教育改革的时代精神,我们在编写本套教材时力求做到两个统一:

第一,在内容选择上力求做到科学性、思想性和先进性的统一。

教材的内容首先必须是科学的,要准确地阐述相关学科的基本概念、原理和事实,并科学地阐述概念之间的相互关系;思想性是建立在科学性的基础之上并寓于科学性之中的,教材要使学生能从科学的内容中习得正确的思想观点;先进性是时代发展的要求,要把科学上最新的、被证实的成果反映到教材中来,使学生的学习能把握时代跳动的脉搏。

第二,在内容编排上力求做到知识的内在逻辑与教学法的要求相统一。

每门学科都有自身的系统性,编写教材必须考虑这门学科本身的内在逻辑,即如布鲁纳所说的学科结构,以使能够洞察学科的基本架构;但是一门学科的教材不是相应科学的缩写本,它还必须把科学知识的系统性和教学法的要求结合起来,充分考虑学生的学



习特点和认知过程的发展规律,使科学知识的表达能以最恰当的方式为学生所接受并内化。

当然,作为新世纪的教材,我们还要求本套教材在编辑、出版、印刷、装帧等方面也是高质量的。

如今,经过教材编委会、编者和出版社历时 18 个月的努力,第一批 16 本“21 世纪高等师范教育教材”终于在新学期开学前与广大读者见面了。希望这套新教材能受到大家的欢迎和喜爱,也期待各位提出宝贵意见和建议。

按照编写出版计划,整套“21 世纪高等师范教育教材”将在 5 年中陆续出齐。我们将在汇总和分析大家意见的基础上,做好第二批教材的编写出版工作,使之成为全国高等师范院校首选的教学用书。

“21 世纪高等师范教育教材”编委会主任

华东师范大学校长

王建磐

2002 年 5 月

前 言

21 世纪的数学已不仅仅是“技艺”或“工具”。我们不能仅仅从“应用”和“功利”的角度来衡量数学的价值,而应强调数学所具有的普遍文化的意义。从本质上说,数学是整个现代科学的一种文化或理性的基础构造成分。数学的文化价值,体现在数学具有非功利方面的社会功能,同时又具有伦理学、逻辑学、美学与哲学的内蕴。即将从事人文社会科学工作的文科学生,如果能有较宽广的数学基础,较高的理性思维素养,将使他们在工作中变得更加活跃,思维敏捷,发挥出更大的创造性。

文科学生学习高等数学,除了进一步了解数学,形成必需的“理性思维”之外,更重要的是形成正确的数学观,学会欣赏数学的美,能把数学看成是一种文化。虽然对文科学生来说,最终将只会运用不多的数学知识,但蕴藏在头脑中的数学思想和方法将永远伴随着他们成长。

本书正是基于上述目的编写的。我们希望文科学生在读完这本书之后,会更加喜欢数学,进而能自觉、主动地学习更多的数学,并运用数学解决问题。

当前,市面上的文科高等数学教材,林林总总不下几十种,但基本上是沿用理科高等数学的模式和内容,或者只是增加一些经济数学的知识,却总也摆脱不了老三块(微积分初步、线性代数基础、简易概率和数理统计)的模式。教材的呈现方式依然是纯粹的“演绎式”。这一切对文科学生来说,似乎不是那么必要,也不再新鲜。

眼前这本《文科高等数学基础(B)——数学思想和方法》,完全改变了传统文科数学的模式,根据文科学生的实际和需要,从文化的角度阐释数学的思想和方法。而且,从内容和形式看,更加贴近学生的阅读习惯和学习心理。本书从数学概况说起,通过对中外数学史的简单回顾,阐述了数学发展的动力,介绍了若干重要的数学思想和方法,最后从文化的角度展示了数学作为文化的一个重要组成部分的深刻内涵。学生可以在教师的指导下,以本书为蓝本,广泛阅读书



中提供的参考资料,以丰富自己的数学阅历,通过博览群书来提高对数学及数学思想和方法的认识。

通过对本书的学习,可以使文科学生摆脱在学习传统高等数学中经常遇到的知识难点,使他们摆脱纯粹数学知识的局限性,能从宏观上进一步了解数学,从而形成正确的数学观。这才是现代人所必备的数学修养。

本书是由数学博士领衔,战斗在教育教学第一线且具有丰富经验的多位副教授、硕士参与编写的。其中魏文展同志负责第一、二章的编写;黄旭广同志负责第九、十章及附录二的编写;欧苡同志负责第三、四章的编写;赵飞同志负责第五、六章及附录一的编写;元昌安同志负责第七、八章的编写。全书由魏文展教授统稿。

本书在编写过程中,参考和引用了不少资料,尤其是引用了不少徐利治先生、张奠宙先生、张楚廷先生、王子兴先生、郑毓信先生的研究成果,在此对有关作者或单位表示崇高的敬意和谢忱!

在本书出版过程中,广西师范学院的钟海青书记、院长给予了热情的指导和帮助,华东师范大学出版社的翁春敏副编审以及广西师范学院教务处王屹副处长也对本书的编写给予了大力的支持。编者在此向他们表示衷心的感谢!特别值得一提的是,华东师范大学出版社为我们提供了一个很好的机会,使我们多年来的梦想终于变成了现实,虽然还很不完善。对此,我们感激不尽。

本书在某种程度上说是开创性的。它突破了传统文科高等数学模式的束缚,从思想和方法甚至是文化的角度向文科学生阐述了数学。因此,在编写过程中一定存在不少问题,甚至是错漏,请各位读者不吝指教。

编者

2002. 5. 26

目 录

绪 论

- 3 第一章 数学是什么
- 3 第一节 数学的对象和特征
- 7 第二节 数学的地位
- 9 第三节 数学观和方法论
- 17 思考与练习

- 18 第二章 数学思想和方法概述
- 18 第一节 数学思想和方法的研究对象及意义
- 21 第二节 数学思想和方法的学习指导
- 22 第三节 学习数学思想和方法应注意的问题
- 24 思考与练习

第一编 数学的源与流

- 27 第三章 数学发展历程简介
- 27 第一节 数学萌芽
- 29 第二节 常量数学
- 32 第三节 变量数学
- 36 第四节 近代数学
- 39 第五节 现代数学
- 44 思考与练习

- 46 第四章 中国古代数学的兴衰
- 46 第一节 中国古代数学的萌芽
- 49 第二节 体系的形成及稳步发展



52	第三节 传统数学的兴盛
57	第四节 衰落与复苏
61	思考与练习
62	第五章 数学发展的动力
63	第一节 数学发展的基本形式
83	第二节 数学发展的动力
93	思考与练习
第二编 数学的思想和方法	
97	第六章 数学问题解决与数学精神
98	第一节 问题解决中的数学精神
102	第二节 数学精神的诸方面
111	思考与练习
113	第七章 若干重要的数学思想
114	第一节 充分自由的思想
115	第二节 公理化与演绎思想
118	第三节 极限思想
120	第四节 符号化思想
124	第五节 集合与对应思想
130	思考与练习
131	第八章 几种重要的数学方法
132	第一节 公理化方法
134	第二节 化归方法
141	第三节 模型方法
148	思考与练习
150	第九章 数学发现的方法
150	第一节 数学发现概述

- 154 第二节 数学发现的美学方法
158 第三节 数学发现的合情推理方法
164 第四节 数学发现的直觉、灵感与猜想
171 思考与练习

第三编 数 学 文 化

- 175 **第十章 数学文化**
175 第一节 数学文化：一个开放的系统
176 第二节 数学的文化价值
182 第三节 数学语言
185 思考与练习

- 186 **附录一 数学实验简介**
186 一、数学需要实验
187 二、数学实验的意义
187 三、数学实验的内容
188 四、怎样做数学实验

- 194 **附录二 20世纪数学发展的五大定理**
195 一、极小极大值定理(对策论)
196 二、布劳威尔不动点定理
197 三、莫尔斯定理(奇点理论)
198 四、停机理论(计算的理论)
198 五、单纯形法(最优化理论)

- 200 **主要参考文献**



绪 论

文科高等数学基础(B)



第一章 数学是什么

数学已经有几千年的发展历程。人们在学习、研究和运用数学的过程中已经形成了各种看法。因此,回答“数学是什么”这样的问题,似乎是数学哲学家们应该思考的问题。但是,在这里我们不想太专业化。我们只是想让文科的学生多了解一些数学,正确认识数学的对象和特征,数学的地位和作用,帮助学生形成正确的数学观,引导学生运用辩证唯物主义的观点和方法,了解数学和实践的关系,正确看待数学的发展。

第一节 数学的对象和特征

对于数学,我们最熟悉的就是:数学是研究空间形式和数量关系的科学。于是,我们知道,空间形式和数量关系就是数学的研究对象。然而,数学经过几千年的发展,它的研究对象也在不断地发展变化,而且,人们对数学研究对象的认识并没有完全统一。这里,我们只是简要介绍数学的发展过程中的一些具有代表性的观点,仅供参考。

一、数学的研究对象

(一) 古希腊:数学是研究“数”的科学

以毕达哥拉斯(Pythagoras,公元前580至前570之间~约公元前500)为代表的古希腊学派认为“万物皆数”,把数看成是万物之源,因此“数”就成了数学的研究对象;而以亚里士多德(Aristotlēs,公元前384~公元前322)为代表的学者认为,数量还可以进一步划分为离散的和连续的量,因此有算术和几何的区分。而这两门学科都是研究数量及其相互关系的,因而数学也称作研究数量的科学。

(二) 笛卡儿(René Descartes, 1596~1650):数学是研究“顺序”和“度量”的科学

亚里士多德关于数学的解释得到数学家和哲学家的认可,并持



续了很长一段时间。直到 17 世纪,笛卡儿对数学重新进行了阐释。他认为:“所有那些研究顺序和度量的学科,都和数学有关……”;“应该有一门普遍的学科,去解释我们能够知道的顺序和度量”。这就是数学。

(三) 恩格斯:纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系

在 19 世纪以前,数学的主要成就只是算术、几何、代数和微积分。数学的研究对象也只是客观事物的形式和数量。恩格斯在《反杜林论》中明确指出:“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。”在《自然辩证法札记》中,他认为:“数学是数量的科学”;“我们的几何学是从空间关系出发,我们的代数和算术是从数量出发”。恩格斯的这些论证准确地概括了 19 世纪以前数学研究的主要内容。

(四) 布尔巴基学派(Bourbaki):数学是研究抽象结构的科学

由于近代数学的发展,数学的许多分支已经失去了直观背景,在现实生活中几乎找不到原型。数学的对象已经超越了对数量关系和空间形式最初意义的理解。比如“函数空间”就不是一般意义上的空间概念,它只是形式上与一般空间的概念有一些相似。布尔巴基学派认为:“数学是研究抽象结构的科学。”他们把数学的研究对象分为三种结构:代数结构、拓扑结构、次序结构,主张用结构的观点看待数学。这些都远远超出了原来数量关系的意义。

另外,苏联著名数学家亚历山大洛夫(Павел Сергеевич Александров, 1896~1982)指出:“数学以纯粹形态的关系和形式作为自己的研究对象。”也有数学家认为,只要把恩格斯关于数学的论述进一步扩充内涵,就适用于现代数学。而罗素则把数学和逻辑学等同起来,认为逻辑学的研究对象就是数学的研究对象。

(五) 数学是“模式”的科学

随着数理科学的发展,数学作为一门抽象性学科,它的研究对象已经转变为理想化的“量化模式”。“数学模式”是指按照某种要求(理想化或可实际应用)来概括反映一类或一种事物的关系结构的数学形式。数学模式大至数学分支,小至公式、定理、方法甚至数学概念。这些模式都带有不同程度的理想化特征,而且必须具有一定范围内的普遍适用性。

二、数学的特征

(一) 高度的抽象性

每一门学科都有抽象性,但数学的抽象具有特殊性。高度抽象性是数学的

本质特征。数学的抽象具有如下特征。

1. 具有较高抽象程度

一般人都认为数学是最抽象的学科。数学的概念、公式、定理甚至集合等在现实生活中几乎难以找到原型。“数学以及其他学科都是把物体、现象、生活的一个方面抽象化”，数学的抽象只保留了量的关系而舍掉一切质的特点；只保留一定的形式、结构而舍弃了内容。从逻辑上讲，概念的内涵越小，它的外延就越大。数学就是以这样的方式得到了在纯粹状态下反映量和量的关系的抽象，与其他自然学科相比当然具有较高的抽象形式。

2. 具有方法抽象和独特的抽象语言

数学抽象的特殊性还表现在方法的抽象和自身特有的符号语言上。数学为了证明定理只能用逻辑推理和运算，最根本的就是公理化方法。数学的符号语言是经过千锤百炼的，运用符号有利于简化研究，发现规律。一个字母可以有不同的意义，如 $A + B = C$ ，可以是普通加法，也可以是矩阵加法。它不但增加了数学的形式美，而且提高了数学的抽象程度。

3. 有不同的抽象层次及其历史发展过程

如由数到常量，由常量到变量、函数，由函数到映射，由映射到关系，就是一个不同层次的抽象过程。又如从“勾3股4弦5”($3^2 + 4^2 = 5^2$)开始到一般直角三角形($a^2 + b^2 = c^2$)的抽象，再到 n 维空间中的向量纯积的关系(若 f 、 g 正交，则 $(f+g, f+g) = (f, f) + (g, g)$ 这种更为一般化的形式了。当然，这种抽象并不是一步到位的，而是经历了一个漫长的历史发展过程。就如函数概念、曲线概念的抽象发展一样，在另一种意义上说，数学抽象经历着从个体→特殊→一般的发展过程。这种逐级抽象就是数学区别于其他学科抽象的典型特征。经过多次逐级抽象，数学中的许多概念已经不容易在现实生活中找到原型了。数学研究的目的或原动力已经不是为了解决实际问题，数学的内容大部分已经用于研究各种抽象概念及其相互关系了。可以说，数学抽象比其他学科的抽象具有更高的层次。另外，在数学中我们还有弱抽象和强抽象的区分。弱抽象也叫做“概念扩张式抽象”，就是通过减少内涵，即由原型中选取某一特征或侧面加以抽象，从而形成比原型更为普遍、更为一般的概念或理论。这时，原型就成为新概念或理论的特例。如从“全等三角形”到“相似三角形”的抽象就是弱抽象，又如“正方形→菱形→平行四边形→梯形→凸四边形→四边形→曲边四边形→曲边形→闭曲线”的抽象也是一个弱抽象的过程。而强抽象与弱抽象的过程刚好互逆，它是通过扩大内涵而达到减少概念的外延的抽象，这样得到的新概念或理论就是原型的特例。如从“四边形”到“平行四边形”的抽象就是强抽象。还有所谓的等置抽象的方法，这里就不赘述了。

(二) 严谨的逻辑性和精确性

关于数学的逻辑性与精确性特点，可以从数学在解决“白马非马”和“先有鸡



还是先有蛋”的问题中窥见一斑。

“白马非马”说的是,要马,黄马、黑马都可以;要白马,黄马、黑马都不行。可见,白马非马。实际上,许多人都不清楚该问题之所在,根本无从解释。事实上,这里涉及到“是”与“非”的含义。在数学上,“是”在不同场合有“等于”、“属于”、“包含于”的意思,而“非”则是“是”的反义词。“白马非马”中的“非”表示的是“不等于”,它的含义是“白马”包含于“马”的集合,但不等于“马”的集合。

至于“先有鸡还是先有蛋”问题,常被认为是说不清楚的。数学却可以解释清楚。首先,鸡与鸡蛋必有其一出现在先,或同时出现。然后,弄清究竟什么是鸡?这个问题由生物学家回答就可以了;什么是鸡蛋?这个问题显然与鸡有关,否则就无所谓先后了。如果认定:“鸡生的蛋才叫鸡蛋”,那么,一定先有鸡后有蛋;如果认定:“能孵出鸡的蛋和鸡生的蛋都叫鸡蛋”,那么,一定先有鸡蛋。

从以上两个问题的讨论中,我们可以看出,只要把定义约定好,问题就有明确的答案。否则,就只有无尽的争论。

数学语言讲究精确性,如果某种数学语言能够导致悖论,数学就会修改自己的语言,使之更加精确。实际上,除数学语言自身以外,没有哪一种语言能够像数学语言一样无歧义。特别是19世纪以来,随着数学基础研究和公理化研究的进一步深入,数学对定义的要求非常严格、规范。一般来说,有以下三点要求:①只能有少数几个元概念;②其余概念必须可以由元概念加以定义;③定义中不能有循环成分。欧几里得(Euclid,公元前330~公元前275)几何便是数学严密性、精确性、逻辑推理方面的突出代表。

(三) 广泛的应用性

一般人认为,日常生活离不开数学,如买菜等。换句话说,数学的应用对一般人来说更多是“间接”的或者是“潜在”的,因为它不能直接造出洗衣机、电冰箱、汽车等产品。但如果从更高的层次上说,科学技术和自然科学的发展都离不开数学。而令人觉得惊奇的是,数学本身几乎不直接考虑应用。它并不考虑“数”和“形”以及“量”的来源,甚至数学已经扩张到了非数领域。一般人认为,因为自己“用不上”,所以学数学没有用,或者只有“训练思维”这样的用途。事实上,正是数学的这种“远离现实”才产生了“广泛应用”的效果。密码学、计算机理论等离不开数论;汽车设计、轮船设计、远距离通讯等离不开复变函数理论;群论对物理学和化学的发现和发 展提供了强有力的理论基础;非欧几何被爱因斯坦(A. Einstein, 1879~1955)应用来建立相对论(非欧几何在创立之初被认为是与物质世界没有联系的数学游戏);统计学、地学、经济学更是离不开数学,甚至心理学、教育学的发展也是如此。这一切都深刻说明了数学在现实生活中的巨大的“实际”应用。而且,数学不只是人、事物或形象,更重要的是一种认识的手段。在《美国数学的现在和未来》中有一段概括性的论述:“人们现在更深刻地认识到