〔苏〕Я.Д.柯里凯尔　著

零件机械加工精度的数学分析

LINGJIAN JIXIE JIAGONG
JINGDU DE SHUXUE FENXI

机械工业出版社

零件机械加工精度的数学分析

〔苏〕Я.Д.柯里凯尔 著

祝玉光 译

机械工业出版社

本书讲述了用统计分析、相关分析、回归分析和方差分析解决机器制造工艺问题的方法。其中特别注意了零件机械加工流程中规律性的揭示与分析，以及工艺过程可靠性、精度稳定性和分布稳定性的评价。除一般理论与方法的原则以外，书中还给出了一些对生产实际中的应用很有价值的具体建议、实例和计算。另外，还探讨了运用电子数字计算机解题的方法与技巧。本书供从事机械加工的技术人员参考，也可供工科大学的学生参考。

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ТОЧНОСТИ МЕХАНИЧЕСКОЙ
ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ
Я. Д. КОЛКЕР
Издательство《Техніка》, 1976Г.

* * *

零件机械加工精度的数学分析
〔苏〕Я Д. 柯里凯尔 著
祝玉光 译

*

机械工业出版社出版（北京阜成門外百万庄南街一号）
（书刊出版业营业許可証出字第 117 号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32·印张 6 1/4·字数 136 千字
1983 年 2 月北京第一版·1983 年 2 月北京第一次印刷
印数 00,001—12,200·定价 0.80 元

*

统一书号：15033·5367

前　　言

现代机器制造业的工艺工程师，在自己的工作实践中，为了采用正确而又有根据的方案，常常需要做各种各样的实验。这些实验使他们对于每一种具体情况，都可以选出最佳的方案。

要从所做的实验引出可靠的结论和做出客观的评价，就必须运用专门的数学方法。这些以概率论和数理统计为基础的数学方法，正日益广泛地用于研究零件机械加工的工艺过程。

在苏联和其他国家，H. A. 鲍罗达切夫（H. A. Бородачев）、A. H. 加弗里洛夫（A. H. Гаврилов）、A. K. 库塔伊（A. K. Кутай）、X. Б. 科尔顿斯基（X. Б. Кордонский）、H. B. 斯米尔诺夫（H. B. Смирнов）、И. B. 杜宁——巴尔科夫斯基（И. B. Дунин—Барковский）、A. Б. 亚欣（A. Б. Яхин）、K. A. 勃拉乌里（K. A. Браунль）、Д. И. 高金（Д. И. Коуден）、A. 哈里特（A. Хальд）、Б. 韩辛那（Б. Хансена）等在运用概率论和数理统计方面，发表了一系列著作，为数学分析这一现代工具向工艺研究领域的充分渗透，建立了必要的前提。

引用数学方法的宗旨是：以实验获得的客观数据，来取代对工艺过程的主观估计。

由此，在本书中，讲述了把统计分析、相关分析、回归分析和方差分析应用于机器零件机械加工工艺过程的方法，

同时还阐述了工艺过程可靠性和稳定性（包括精度稳定性和分布稳定性）的评价问题。

除了一般性原理与方法的论述之外，书中还提供了一些对实际运用很有价值的具体说明、实例和计算。

书中所述许多原理的实用性方面，作者应当感谢乌克兰科学和技术功勋活动家、技术科学博士A. A.马太林（A. A. Маталин）教授。

目　录

第一章　工艺过程的统计分析

机器零件的机械加工工艺过程有代表性的基本特点是：影响制成零件精度的参数很多，各独立参数间的差别很大，以及由于它们变化的随机性，不可能对大量参数实行有目的地控制。

由系统图（图 1）可见，零件机械加工的工艺过程是一个复杂的系统。工艺师应当善于预测并在必要时校正它的行为，也就是为了保证高质量的产品实行有效的控制。

工艺过程的作用遵从一定的规律性，有关这些规律性的知识是预测和控制这些过程所不可缺少的，而揭示这些规律性则是工艺过程分析的一个最重要的组成部分。

大量可控与不可控的因素影响着工艺过程的进行，要对它做客观的分析需要采用数理统计的方法。

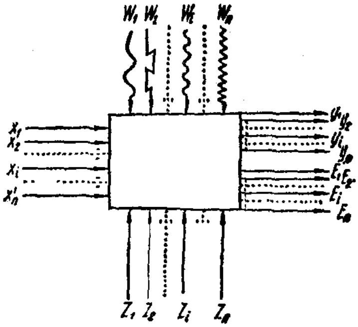

图 1　工艺过程作用系统图

$x_1 \cdots\cdots x_n$—被测的输入参数

$z_1 \cdots\cdots z_n$—被测的控制参数

$W_1 \cdots\cdots W_n$—不可测的干扰参数

$y_1 \cdots\cdots y_n$—输出的质量指标

$E_1 \cdots\cdots E_n$—输出的经济指标

做各种数量化指标的比较，对各种因素的作用进行因果关系的分析，查明数量指标在不同的时间内或条件改变时的变化趋势，并在此基础上

定出行为的定额，然后预测某些所记录的现象的可能结果，这就是统计学的价值所在[21]。

在机器制造工艺中，统计分析方法用来解决下列基本问题：

1. 判定生产设备的精度是否适合于图纸给定的精度；
2. 确定加工的综合误差；
3. 制定单个工序和整个工艺过程的精度指标；
4. 评价工艺过程的调整质量；
5. 确定工艺过程调整的时间；
6. 拟定产品质量的检查方法；
7. 确定生产设备的精度和它的修理质量。

进行工艺过程的统计分析要借助于大样本和小样本。在随后的部分就要叙述运用大样本做工艺过程分析的方法，而小样本主要是用于工艺过程的可靠性分析，将在第二章叙述。

用于工艺过程分析的主要方法是抽样方法，其原理已在数理统计学中做了足够充分的探讨。在抽样方法的理论中，最基本的概念是母体——所有可能元素（零件）的总和，每个元素都有研究者感兴趣的指标；抽样总体（样本）——为获取关于全部总体的可靠信息而由母体中选出的部分元素的总和。

组成样本的个体数 n 就是它的容量。样本容量 $n>20$ 算作大样本，而 $n<20$ 即为小样本。

大样本根据它形成的时间可以是一次的或顺序的。一次样本是由加工完成后的一批零件中取出的。为了保证样本的代表性，包含在样本中的所有零件应当是彼此精心地混合过的。如果工艺师必须使用一大批零件的一次大样本，而且要混合它们又很困难，那么就给这批中的每个零件编上序号，

而样本中零件的选择就按随机数表进行[18]。

顺序样本是由在某一机床的某次调整中的一定时间间隔内顺序制造出的零件组成的。

工艺过程精度的统计分析方法，要顺次地完成下面所讲的若干阶段的工作。

1 样本容量的确定

一项研究的规模，所用的期限，财政费用和其他一系列组织上的问题，以及最重要的是，一项生产研究结果的精度和可靠性都与正确的确定样本容量有关。

通常，工艺师在做工艺研究时要利用一个样本，此时，他必须有足够的把握断定，由样本分析所得的特征值同母体的相应特征之间的差异符合给定的精度和置信度，这样才允许把样本分析的结论推广到全部母体。因此样本容量就与这一精度和置信度有关，工艺研究者所期望的就是以这个精度和置信度取得分析结果。此外，样本容量还与确定用于描述被研究现象特征的统计指标的种类有关。

作为母体主要统计特征的有：被研究特征的算术平均值 $\overline{X}_0$、均方根偏差 σ_0 和由下式确定的变异系数 V_0：

$$V_0=\frac{\sigma_0}{\overline{X}_0}\times 100\% \qquad (1)$$

根据有限次数的观测确定出的过程抽样特征 $\overline{X}$、S、V，只能以一定的精度近似于整个母体所固有的过程特征的真值（$\overline{X}_0$、σ_0、V_0），即：

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}_0&=\overline{X}\pm\varepsilon\\ \sigma_0&=S\pm\varepsilon\\ V_0&=V\pm\varepsilon\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

根据方程（2）可以写出：

$$\left.\begin{array}{l}\overline{X}-\varepsilon<\overline{X}_0<\overline{X}+\varepsilon\\ S-\varepsilon<\sigma_0<S+\varepsilon\\ V-\varepsilon<V_0<V+\varepsilon\end{array}\right\}\qquad(3)$$

满足不等式（3）的概率，就是特征值的真值处于不等式（3）所规定的范围之中的概率，即为置信度α：

$$\left.\begin{array}{l}P(\overline{X}-\varepsilon<\overline{X}_0<\overline{X}+\varepsilon)=\alpha\\ P(S-\varepsilon<\sigma_0<S+\varepsilon)=\alpha\\ P(V-\varepsilon<V_0<V+\varepsilon)=\alpha\end{array}\right\}\qquad(4)$$

机器制造工艺中的置信度α一般取为0.95或0.99(95%或99%的置信水平)。

精度ε可以用被研究指标的度量单位给定，也可以用抽样标准差S的单位和偏离所研究指标特征值的百分数给定。

如果精度以抽样标准差的单位给定，即$\varepsilon=qS$，那么，不等式（4）可以改写成如下形式：

$$\left.\begin{array}{l}P(\overline{X}-qS<\overline{X}_0<\overline{X}+qS)=\alpha\\ P(S-qS<\sigma_0<S+qS)=\alpha\\ P(V-qS<V_0<V+qS)=\alpha\end{array}\right\}\qquad(5)$$

确定样本必要容量n的最简单方法是利用充分大数表(достаточно большое число)(表1)。表1是根据伯努利原理制定的，这个原理规定了样本容量n、精度ε和置信度α之间的关系。

表1 充分大数表

α	ε									
	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
0.95	96	118	150	195	266	384	600	1067	2400	9603
0.99	165	204	259	338	460	663	1036	1843	4146	16587

表 1 中精度 ε 是用被研究指标的度量单位给定的。

例1　为了以 $\varepsilon = 0.05$ мм 的精度和 $\alpha = 0.95$ 的置信度计算轴颈 D，试确定样本容量。

对于 $\varepsilon = 0.05$ 和 $\alpha = 0.95$，由表 1 查到 $n = 384$ 件，假定根据 384 个试验数据处理得轴颈尺寸 $\overline{D} = 24.5$мм，这就是说，$\overline{D}_0$ 的真值以 $\alpha = 0.95$ 的置信度落在下述范围之内：

$$24.5 - 0.05 = 24.45 < \overline{D}_0 < 24.5 + 0.05 = 24.55$$

应该指出，工艺师通过表 1 的数据所得的样本容量 n 是过大的。因此这个方法应该用于那样一些场合，即当样本只是母体的很小一部分（$N > 20n$；N——母体容量）时；进行工艺过程的独次有效的研究时或是初次研究（关于过程的统计特征原先什么也不知道）时。

如果根据先前的研究，已经知道变异系数 V，那么，样本容量 n 就可以根据精度 ε 和置信度 $\alpha = 0.95$ 由（图 2）的列线图求得[18]。在列线图（图 2）上，精度 ε 用被研究指标特征值的百分比给出。如果变异系数 V 大于 10%，那么，就把 $V_1 = 0.1V$ 的值置于左侧的刻度上，然后按中间刻度确定出 n_1 值，而样本必要容量则按 $n = 100n_1$ 算出。

由引用的列线图所得到的样本容量 n 远小于按表 1 确定的样本容量。

如果在研究之前不知道变异系数 V，那么就建议用不大容量 $n = 5 \sim 10$ 件的样本来确定 V（确定统计特征值 $\overline{X}$，S，V 的方法在第一章中讲述）。

一般情况下，样本容量 n 取决于精度 ε、置信度 α 以及一定的统计特征形式和样本与母体容量的比例，由表 2 所给的公式确定。这些公式中 t 表示拉普拉斯（Лаплас）函数的自变量，它由表 3 根据置信度 $\alpha = 2\Phi(t)$ 确定；t_c——斯

图顿（Стьюдент）函数的自变量，它由表 4 确定；k——函数 $L(q, k)$ 的自变量，它根据置信度 $\alpha = L(q, k)$ 和 q 值（一般在小样本的容量计算中，精度以关系式 $\varepsilon = qS$ 的形式给出）由表 5 确定。

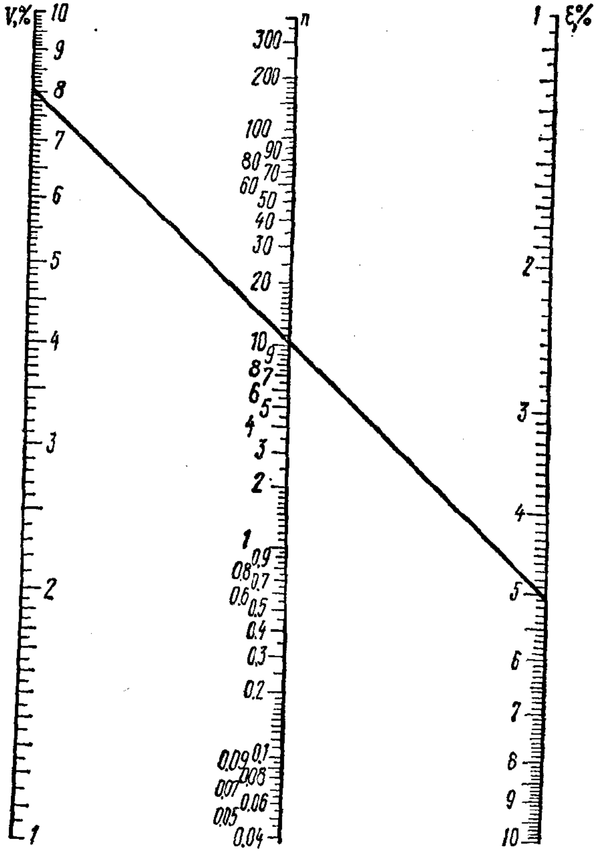

图 2　置信度 $\alpha = 0.95$ 的充分大数列线图[18]

表 2　计算样本容量的公式

特征值	条件	样本容量		
		$n>20$；$N>20n$	$n>20$；$N<20n$	$n\leqslant 20$
$\overline{X}_0$	σ_0—已知 ε—以绝对单位给出	$n=\dfrac{t^2\sigma_0^2}{\varepsilon^2}$ (6)	$n=\dfrac{t^2\sigma_0^2N}{\varepsilon^2(N-1)+t^2\sigma_0^2}$ (15)	—
	σ_0—未知 ε—以绝对单位给出	$n=\dfrac{t^2S^2}{\varepsilon^2}$ (7)	$n=\dfrac{t^2S^2N}{\varepsilon^2(N-1)+t^2S^2}$ (16)	$n=\dfrac{t_c^2S^2+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$ (24)
	σ_0—未知 $\varepsilon=qS$	$n=\dfrac{t^2}{q^2}$ (8)	$n=\dfrac{t^2N}{q^2(N-1)+t^2}$ (17)	$n=\dfrac{t_c^2+q^2}{q^2}$ (25)
σ_0	σ_0—已知 ε—以绝对单位给出	$n=\dfrac{t^2\sigma_0^2}{2\varepsilon^2}$ (9)	$n=\dfrac{t^2\sigma_0^2N}{2\varepsilon^2(N-1)+t^2\sigma_0^2}$ (18)	—
	σ_0—未知 ε—以绝对单位给出	$n=\dfrac{t^2S^2}{2\varepsilon^2}$ (10)	$n=\dfrac{t^2S^2N}{2\varepsilon^2(N-1)+t^2S^2}$ (19)	—
	σ_0—未知 $\varepsilon=qS$	$n=\dfrac{t^2}{2q^2}$ (11)	$n=\dfrac{t^2N}{2q^2(N-1)+t^2}$ (20)	$n=k+1$ (26)
V_0	V_0—已知 ε—以绝对单位给出	$n=\dfrac{t^2V_0^2}{2\varepsilon^2}$ (12)	$n=\dfrac{t^2V_0^2N}{2\varepsilon^2(N-1)+t^2V_0^2}$ (21)	—
	V_0—未知 ε—以绝对单位给出	$n=\dfrac{t^2V^2}{2\varepsilon^2}$ (13)	$n=\dfrac{t^2V^2N}{2\varepsilon^2(N-1)+t^2V^2}$ (22)	—
	V_0—未知 $\varepsilon=qS$	$n=\dfrac{t^2 10^4}{2\overline{X}^2q^2}$ (14)	$n=\dfrac{t^2N10^4}{2\overline{X}^2q^2(N-1)+t^2}$ (23)	$n=k+1$ (27)

如果不知道标准差 σ_0 或 V_0（多半是这样），那么就把任何以前同类型试验结果的相应值当做 σ_0 或 V_0 值；或者预先取一个容量不太大的样本（$n\leqslant 10$），并根据它确定出标准差 S 或 V（参看第一章第 4 节）。把所得的 S 值代入公式（7），

(10), (16), (19) 中，而V值代入公式 (13) 和 (22) 中。

根据公式 (24) 或 (25) 确定样本容量的方法如下：

a) 选一个小容量 $n_1 \leqslant 10$ 的初样本；

б) 根据这个容量为 n_1 的样本数据确定标准差 S；

в) 根据给定的置信度 α 按下式计算函数：

$$S_n(t_c) = \frac{\alpha + 1}{2} \tag{28}$$

г) 根据 $S_n(t_c)$ 值和 n_1 由表 4 查得斯图顿函数自变量 t_c 的值。

例2 如果希望以 $\alpha = 0.95$ 的置信度和 $\varepsilon = 10$мкм 的精度估计加工的套筒内径 d_0，N——很大，试确定样 本容量 n 的大小？由以前的经验知道 $S = 0.05$мм。

表 3 拉普拉斯函数值

t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$	t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$
0.00	0.0000	0.000	0.23	0.1810	0.0910
0.01	0.0080	0.004	0.24	0.1897	0.0950
0.02	0.0160	0.008	0.25	0.1974	0.0985
0.03	0.0239	0.012	0.26	0.2051	0.1025
0.04	0.0319	0.016	0.27	0.2128	0.1065
0.05	0.0399	0.020	0.28	0.2205	0.1105
0.06	0.0478	0.024	0.29	0.2282	0.1140
0.07	0.0558	0.028	0.30	0.2358	0.1180
0.08	0.0638	0.032	0.31	0.2434	0.1215
0.09	0.0717	0.036	0.32	0.2510	0.1255
0.10	0.0797	0.040	0.33	0.2586	0.1295
0.11	0.0876	0.044	0.34	0.2661	0.1330
0.12	0.0955	0.048	0.35	0.2737	0.1370
0.13	0.1034	0.0515	0.36	0.2812	0.1405
0.14	0.1113	0.0555	0.37	0.2886	0.1445
0.15	0.1192	0.0595	0.38	0.2961	0.1480
0.16	0.1271	0.0635	0.39	0.3035	0.1515
0.17	0.1350	0.0675	0.40	0.3108	0.1555
0.18	0.1428	0.0715	0.41	0.3182	0.1590
0.19	0.1507	0.0755	0.42	0.3255	0.1630
0.20	0.1585	0.0795	0.43	0.3328	0.1665
0.21	0.1663	0.0830	0.44	0.3401	0.1700
0.22	0.1741	0.0870	0.45	0.3473	0.1735

（续）

t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$	t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$
0.46	0.3545	0.1770	1.20	0.7699	0.3850
0.47	0.3616	0.1810	1.25	0.7887	0.3945
0.48	0.3688	0.1845	1.30	0.8064	0.4030
0.49	0.3759	0.1880	1.35	0.8230	0.4115
0.50	0.3829	0.1915	1.40	0.8385	0.4190
0.52	0.3969	0.1985	1.45	0.8529	0.4265
0.54	0.4108	0.2055	1.50	0.8664	0.4330
0.56	0.4245	0.2125	1.55	0.8789	0.4395
0.58	0.4381	0.2190	1.60	0.8904	0.4450
0.60	0.4515	0.2255	1.65	0.9011	0.4505
0.62	0.4647	0.2325	1.70	0.9109	0.4555
0.64	0.4778	0.2390	1.75	0.9199	0.4600
0.66	0.4907	0.2455	1.80	0.9281	0.4640
0.68	0.5035	0.2520	1.85	0.9357	0.4680
0.70	0.5161	0.2580	1.90	0.9426	0.4715
0.72	0.5285	0.2640	1.96	0.9500	0.4750
0.74	0.5407	0.2705	2.00	0.9545	0.4775
0.76	0.5527	0.2765	2.10	0.9643	0.4820
0.78	0.5646	0.2825	2.20	0.9722	0.4860
0.80	0.5763	0.2880	2.30	0.9786	0.4895
0.82	0.5878	0.2940	2.40	0.9836	0.4920
0.84	0.5991	0.2995	2.50	0.9876	0.4940
0.86	0.6102	0.3050	2.60	0.9907	0.4955
0.88	0.6211	0.3105	2.70	0.9931	0.4965
0.90	0.6319	0.3160	2.80	0.9949	0.4975
0.92	0.6424	0.3210	2.90	0.9962	0.4980
0.94	0.6528	0.3265	3.00	0.9973	0.4986
0.96	0.6629	0.3315	3.20	0.9986	0.4993
0.98	0.6729	0.3365	3.40	0.9993	0.4996
1.00	0.6827	0.3415	3.60	0.9997	0.4998
1.05	0.7063	0.3530	3.80	0.9999	0.4999
1.10	0.7287	0.3645	4.00	0.99995	0.4999
1.15	0.7499	0.3740	5.00	0.99999	0.49999

根据 $\alpha = 2\Phi(t) = 0.95$ 由表 3 查得 $t = 1.96$，然后按公式（7）计算样本容量 n：

$$n = \frac{1.96^2 \times 0.05^2}{0.01^2} = 96\text{（件）}$$

例3 为了以 $\varepsilon = 0.05$ 的精度和 $\alpha = 0.95$ 的置信度估计活塞销的平均直径 $\overline{D}_0$，在一个容量不过大的样本中必须含有大约多少零件？

为了计算标准差 S，取一个容量 $n_1 = 5$ 件的初样本，假定由这

个样本试验数据的处理得 $S=0.06$MM。

我们用公式(28)求函数 $S_n(t_c)$：

$$S_n(t_c)=\frac{0.95+1}{2}=0.975$$

根据值 $S_n(t_c)=0.975$ 和 $n_1=5$ 由表 4 查得 $t_c=2.8$，把查得的值代入公式(24)得：

$$n=\frac{2.8^2\times0.06^2+0.05^2}{0.05^2}\approx12.3$$

因此，小样本的容量为 $n=13$ 件。

例4 当 $\alpha=0.95$ 时，确定一个样本容量使得标准差 S 与母体标准差 σ_0 的差值 $\varepsilon=\pm0.5S$。

根据 $\alpha=L(q,\ k)=0.95$ 和 $q=0.5$ 由表 5 查得 $k=13$，则根据公式(26)，样本的必需容量为：

$$n=k+1=13+1=14$$

在许多场合下，当用公式（6）～(23) 计算时得出 $n<20$，而用公式 (24)～(27) 计算时又得到 $n>20$，这样的计算结果不应当看成是研究者走入绝境，如果工艺师在布置任务时以大样本为目标，而计算出的 $n<20$；或者以小样本为目标，而计算出的 $n>20$，那么，这就意味着所给的精度是不对的。第一种情况它过低，第二种情况则过高，在重新修正精度之后就能得到正确的结果。如果工艺师所感兴趣的是原先给定的精度，那么，对于头一种情况就应改用小样本做工艺过程分析，而对于第二种情况则用大容量样本。此时样本容量应按条件变化后的相应公式重新检验。

工艺师在确定了样本容量之后，就遵照本节开始的指示选取样本零件。一般在生产条件下，大样本的容量 $n=50$～200 件就有足够的精度和置信度。此时，如果置信度 $\alpha=$

表 4　斯图顿分布的概率值$S_n(t_c)$

t_c	n_1														
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	∞
0.0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.50000
0.2	0.563	0.570	0.573	0.574	0.575	0.576	0.576	0.577	0.577	0.577	0.578	0.578	0.578	0.578	0.57926
0.4	0.621	0.636	0.642	0.645	0.647	0.648	0.650	0.650	0.651	0.652	0.652	0.653	0.653	0.653	0.65542
0.6	0.672	0.695	0.705	0.710	0.713	0.715	0.716	0.717	0.718	0.720	0.721	0.721	0.722	0.722	0.72575
0.8	0.715	0.746	0.759	0.766	0.770	0.773	0.775	0.777	0.778	0.780	0.781	0.782	0.783	0.783	0.78814
1.0	0.750	0.788	0.804	0.813	0.818	0.822	0.825	0.827	0.828	0.831	0.832	0.833	0.834	0.835	0.84134
1.2	0.779	0.824	0.842	0.852	0.858	0.862	0.865	0.868	0.870	0.872	0.874	0.876	0.877	0.878	0.88493
1.4	0.803	0.852	0.872	0.883	0.890	0.894	0.898	0.900	0.902	0.906	0.908	0.909	0.910	0.911	0.91924
1.6	0.822	0.875	0.896	0.908	0.915	0.920	0.923	0.926	0.928	0.931	0.933	0.935	0.936	0.937	0.94520
1.8	0.839	0.893	0.915	0.927	0.934	0.939	0.943	0.945	0.947	0.950	0.952	0.954	0.955	0.956	0.96407
2.0	0.852	0.908	0.930	0.942	0.949	0.954	0.957	0.960	0.962	0.965	0.967	0.968	0.969	0.970	0.97725
2.2	0.864	0.921	0.942	0.954	0.960	0.965	0.968	0.970	0.972	0.975	0.977	0.978	0.979	0.980	0.98610
2.4	0.874	0.931	0.952	0.963	0.969	0.973	0.976	0.978	0.980	0.982	0.984	0.985	0.986	0.987	0.99180
2.6	0.883	0.938	0.960	0.970	0.976	0.980	0.982	0.984	0.986	0.988	0.989	0.990	0.991	0.991	0.99534
2.8	0.891	0.946	0.966	0.976	0.981	0.984	0.987	0.988	0.990	0.991	0.992	0.993	0.994	0.994	0.99744
3.0	0.898	0.952	0.971	0.980	0.985	0.988	0.990	0.992	0.992	0.994	0.995	0.996	0.996	0.996	0.99865
3.2	0.904	0.957	0.975	0.984	0.988	0.991	0.992	0.994	0.995	0.996	0.996	0.997	0.997	0.998	0.99931
3.4	0.909	0.962	0.979	0.986	0.990	0.993	0.994	0.995	0.996	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.99966
3.6	0.914	0.965	0.982	0.989	0.992	0.994	0.996	0.996	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.998	0.99984
3.8	0.918	0.969	0.986	0.990	0.994	0.996	0.997	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.99993
4.0	0.922	0.971	0.986	0.992	0.995	0.996	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	1.000	1.000	0.99997
4.2	0.926	0.974	0.988	0.993	0.996	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	1.000	1.000	—	—	0.99999
4.4	0.929	0.976	0.989	0.994	0.996	0.998	0.998	0.999	0.999	1.000	—	—	—	—	0.99999
4.6	0.932	0.978	0.990	0.995	0.997	0.998	0.999	0.999	0.999	—	—	—	—	—	—
4.8	0.935	0.980	0.991	0.996	0.998	0.998	0.999	0.999	1.000	—	—	—	—	—	—
5.0	0.937	0.981	0.992	0.996	0.998	0.999	0.999	1.000	—	—	—	—	—	—	—