

高等学校试用教材

应用光学原理

天津大学 胡鸿璋 编
上海机械学院 凌世德

机械工业出版社

0439
4731

高等学校试用教材

应用光学原理

天津大学 胡鸿璋

上海机械学院 凌世德

编



机械工业出版社

(京)新登字054号

本书以光的电磁理论为基础,讨论光在传输过程中通过各种媒质(包括均匀、透明的各向同性媒质、各向异性媒质、分层媒质、吸收媒质以及平面光波导和光纤)时所遵循的规律,以及在电场、声波场和光波场作用下所发生的现象,并讨论如何对作为信息载体的光波的振幅、位相、偏振态和传播方向进行调制。本书最后部分还讨论了光的衍射现象和傅里叶光学。

本书可作为光学工程、光纤通讯和应用物理各专业硕士研究生的教学用书,也可作为有关专业的工程技术人员和大学生的参考书。

应用光学原理

天津大学 胡鸿璋 编
上海机械学院 凌世德

*
责任编辑:韩雪清 版式设计:王颖
封面设计:郭景云 责任校对:熊天荣
责任印制:王国光

*
机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)
邮政编码:100037

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

北京市密云县印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*
开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 23·字数 565 千字
1993年5月北京第1版·1993年5月北京第1次印刷
印数 001—450·定价:6.30 元

*
ISBN 7-111-03452-X/O·75 (课)

前 言

本书是为光学工程类各专业硕士研究生的学位课程“高等光学”而编写的。该课程的大纲是经清华大学、浙江大学、华中理工大学、北京工业大学、武汉测绘技术大学、上海机械学院和天津大学的有关教师共同审核通过的。

本书以光的电磁理论为基础，讨论光在从光源到接收器的传输过程中通过各种媒质时所遵循的规律以及在电场、声波场和光波场作用下所发生的现象。虽然光具有波粒二象性，然而在讨论光在传输过程中所出现的现象时，从光的电磁理论出发，将光看作电磁波，也是完全适当的。

本书内容可以分为三个部分。第一部分，包括第一～三章和第七章，从麦克斯韦方程组出发，讨论光在各种媒质中的传播规律。这些媒质包括均匀透明的各向同性媒质、各向异性媒质、分层媒质、吸收媒质以及平面光波导和光学纤维；第二部分，包括第四～六章，讨论光在传输过程中在电场、声波场和光波场作用下所发生的现象，进而讨论如何人为地对作为信息载体的光波的位相、振幅、偏振态和传播方向进行调制；第三部分，即第八章，讨论光的衍射。衍射是光的波动性的主要特征之一，是光在传播过程中必然出现的现象，而且在工程技术中有着极为重要的应用。衍射问题实质上是求解满足一定边值条件的波动方程。由于数学处理上的特殊性，因此将它从第一部分中分离出来，放在第八章讨论。光的波动性的另一主要特征——光的干涉，是光学的传统内容，考虑到光学工程类各专业的研究生在本科光学课程中已经深入地学习过这一部分内容，本书对此不再讨论。

本书第一章、第二章的绝大部分和第七章由凌世德编写，其余部分由胡鸿璋编写，并由后者完成全书统稿工作。上海激光研究所所长庄松林和浙江大学梁铨廷审阅了本书手稿，清华大学、浙江大学、华中理工大学、北京工业大学和武汉测绘技术大学参加审稿会的教师也对本书提出了许多宝贵意见和建议，谨向他们表示深切感谢。另外，冯晓民同志参加了本书手稿的整理工作，也向他表示感谢。

作者衷心希望读者对本书中的错误和不妥之处提出批评和指正。

作者

EAB55/08

目 录

前言

第一章 光的电磁理论基础1

§ 1-1 光的电磁理论的基本公式.....1

§ 1-2 标量波动方程和它的一些解.....7

§ 1-3 高斯光束12

§ 1-4 矢量平面光波及其偏振态21

§ 1-5 从波动方程推导光线方程24

§ 1-6 平面波的反射和折射27

习题.....37

第二章 分层媒质和金属膜的光学

性质39

§ 2-1 分层媒质的基本理论39

§ 2-2 光波在金属中的传播50

§ 2-3 光波在介质-金属界面上的反射和
金属光学常数的测定56

§ 2-4 分层金属膜理论60

习题.....66

第三章 光在各向异性媒质中的传播67

§ 3-1 各向异性媒质的物质方程和有关
张量67

§ 3-2 在各向异性媒质中的单色平面
光波71

§ 3-3 光学各向异性的其它几何表示78

§ 3-4 晶体的对称性和分类80

§ 3-5 光在单轴和双轴晶体中的传播83

§ 3-6 光在各向异性媒质界面上的折射
和反射87

§ 3-7 双折射光学系统的数学工具
——琼斯矩阵95

§ 3-8 旋光和磁光效应.....101

习题109

第四章 电光效应与电光器件.....112

§ 4-1 电光效应的基本理论.....112

§ 4-2 电光效应的实例分析.....126

§ 4-3 电光调制.....134

§ 4-4 泡克尔斯空间光调制器及其在
光计算中的应用.....142

§ 4-5 电光双稳器件.....148

§ 4-6 电光效应的耦合模分析.....153

§ 4-7 液晶的电光效应.....160

习题166

第五章 声光学.....168

§ 5-1 弹光效应.....168

§ 5-2 周期性媒质的耦合模理论.....175

§ 5-3 光声相互作用.....187

§ 5-4 喇曼-乃斯衍射196

§ 5-5 声光偏转器和声光调制器.....199

§ 5-6 声光可调谐滤波器和频谱分析器.....210

习题214

第六章 位相共轭光学.....216

§ 6-1 位相共轭光波.....216

§ 6-2 非线性媒质中的波动方程.....218

§ 6-3 用四波混频技术产生位相共轭
光波.....224

§ 6-4 位相共轭光学的潜在应用.....233

习题241

第七章 光波导基础.....243

§ 7-1 平面介质波导的射线分析法.....243

§ 7-2 平面介质波导的电磁场理论分析.....251

§ 7-3 阶梯折射率分布的光导纤维的
射线分析.....264

§ 7-4 变折射率分布的光导纤维的射线
分析法.....275

§ 7-5 阶梯折射率分布光纤的电磁场
理论分析.....283

§ 7-6 弱导光纤中的导模.....297

习题303

第八章 光的衍射理论.....305

§ 8-1 基尔霍夫标量衍射理论.....305

§ 8-2 菲涅耳衍射.....312

§ 8-3 夫琅和费衍射与傅里叶变换.....324

§ 8-4 光学成像的衍射理论.....337

§ 8-5 空间滤波及其应用.....346

§ 8-6 光学传递函数.....352

习题361

参考文献.....362

第一章 光的电磁理论基础

在19世纪麦克斯韦 (J. C. Maxwell, 1831~1879年) 以前, 光学和电磁学几乎独立地沿着各自的方向发展着。

麦克斯韦总结了前人关于电磁学方面的成就, 建立了一组方程式 (人们称它为麦克斯韦方程组)。根据这一方程组, 麦克斯韦指出, 变化着的电场与磁场是密切相互依赖的, 而且是以波动的形式存在的。他还纯粹由电磁学方法推算出电磁波的传播速度等于光速, 并由此断言, 光波是电磁波的一种。麦克斯韦关于电磁波的预言在他逝世后9年 (1888年) 才为赫兹 (H. Hertz, 1857~1894年) 的实验所证实。

麦克斯韦方程组尽管在处理光与物质的相互作用、解释光的发射过程和吸收过程方面还有严重的缺陷, 但它圆满地阐明了光波在传播过程中所出现的各种现象, 因此显示出强大的生命力。特别是随着激光器的问世, 可以将电磁学在工程技术中的辉煌成就直接应用到光学领域里来, 使得近代光学得到迅速发展, 例如傅里叶光学、光信息处理、导波光学、光通信理论以及光雷达和光计算机等等。这些都是在光的电磁学说的基础上结出的硕果。

本章是全书的基础。第一节扼要地总结了麦克斯韦方程组的微分形式以及由此得出的电磁波动方程。考虑到多数读者已经熟悉电磁学的内容, 因此不再讨论麦克斯韦方程组的由来及麦克斯韦在建立这一方程组的过程中所做出的特殊贡献。第一节还讨论了边值关系和物质方程。麦克斯韦方程组、边值关系以及各种媒质的物质方程, 是本书理论赖以建立的基本公式, 读者一定要熟记。接下去的几节讨论波动方程的解的主要形式。除了众所周知的平面波、球面波外, 还讨论了高斯形式的解以及当波长趋于零时的近似解。最后一节根据边值关系讨论光波在界面上的反射和折射。

§ 1-1 光的电磁理论的基本公式

一、麦克斯韦方程组

在经典电磁学中, 电磁场是用两个矢量, 即电矢量 $\mathbf{E}$ 和磁矢量 $\mathbf{H}$ 描述的。电磁场与电荷、电流密切相关。为了描述电荷, 引入电荷密度 ρ (单位体积内的电荷)。为了描述电流, 引入电流密度 $\mathbf{J}$ (在与电流方向垂直的单位面积内所通过的电流)。它包括传导电流和运动电流。前者是由良导体中的电子移动、半导体中的电子和空穴的移动或电解液中离子的移动而形成的, 其密度用 $\mathbf{J}_c$ 表示; 后者是由电子、离子或宏观带电体在真空中运动而形成的, 其密度以 $\mathbf{J}_m$ 记之。另外, 在电磁场的作用下, 物质中的束缚电荷和束缚电流会重新分布。为了把这一影响也包括进来, 必须引入第二组矢量, 即电位移矢量 $\mathbf{D}$ 和磁感应矢量 $\mathbf{B}$, 来描述电磁场。这些量之间的关系由下列麦克斯韦方程组 (MKS单位制) 给出

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-4)$$

式中, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_e$.

第一个方程是法拉第电磁感应定律的微分形式, 第二个方程是由麦克斯韦发展了的安培环路定律的微分形式, 其中位移电流(即 $\partial \mathbf{D} / \partial t$)的引入是麦克斯韦的特殊贡献。这两个方程描述了电磁场的空间变化和时间变化之间的关系。第三个方程是高斯定律的微分形式, 它也可以看作是电荷的定义方程。第四个方程也称为磁通连续方程, 它表示磁力线是封闭的, 自由磁荷是不存在的。

对式(1-2)两边取散度, 并注意到任何旋度的散度必为零 ($\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0$), 得到

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

再利用式(1-3)就得到

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1-5)$$

它与流体力学中的连续方程类似, 称之为电流连续方程。它是麦克斯韦方程组的一个衍生式。根据散度的物理意义不难知道: 式(1-5)表示任一体元内的电荷的增加等于从这一体元表面流入的电荷。这表明, 场空间任一体积内的电荷是守恒的。

二、物质方程

上面已经提到, 麦克斯韦方程组还隐含着场与物质的相互作用, 这可以通过矢量 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 之间的关系表示出来。这些描述场和物质之间相互影响的关系式称为物质方程。

最简单的是各向同性的非吸收媒质, 它的物质方程为

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1-6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-7)$$

式中, ϵ 和 μ 是两个实标量, 分别称为介电常数和磁导率。本书中也常用相对介电常数 ϵ_r 和相对磁导率 μ_r 来描述物质的特性。它们的定义为

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (1-8)$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (1-9)$$

式中, ϵ_0 是真空介电常数, 其值为 $8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$; μ_0 是真空磁导率, 其值为 $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 。

在均匀媒质中, ϵ 、 μ 或 ϵ_r 、 μ_r 是不随空间坐标变化的常数; 在非均匀媒质中, 它们是矢径 $\mathbf{r}$ 的函数。

本书将讨论光波在各种媒质中传播的规律。反映电磁场运动规律的麦克斯韦方程是不随媒质改变的。各种媒质的差别就表现在它们的物质方程不同。上面只讨论了各向同性的非吸收媒质的物质方程, 其它形式的物质方程将在有关章节中介绍。

三、电磁场的边值关系

麦克斯韦方程组是电磁学基本定律, 对电磁场的问题是普遍适用的。不过, 在电磁学、

光学中经常会遇到两种媒质的界面。在界面处，由于媒质的性质（用 ϵ 和 μ 描述）发生了突变， E 、 H 、 D 和 B 也要发生突变。因此，微分形式的麦克斯韦方程组不便直接应用，我们需要进一步分析界面两侧电磁场的变化。

(1) D 的法向分量的变化 如图 1-1 所示， T 表示两种媒质的界面。 T 两侧的介电常数、磁导率分别为 ϵ_1 、 μ_1 和 ϵ_2 、 μ_2 。两侧的 D 矢量分别为 D_1 和 D_2 。设 δA 是 T 界面上的任一小面元，通过 δA 作垂直于 T 界面的小圆柱体，柱顶和柱底紧挨 δA 。我们设想在 δA 的两侧媒质的特性急剧地然而连续地从 ϵ_1 、 μ_1 过渡到 ϵ_2 、 μ_2 ，于是可以应用微分形式的麦克斯韦方程组。根据式 (1-3)，从散度的物理意义知道，在圆柱体中， D 的通量等于所包含的电荷，于是得到

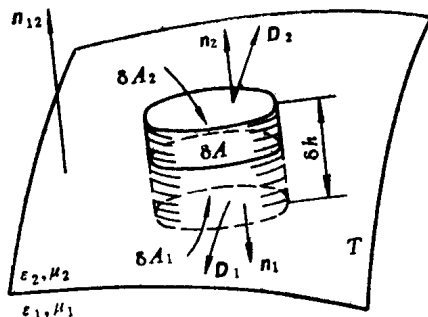


图 1-1 推导关于 D 的边值关系的示意图

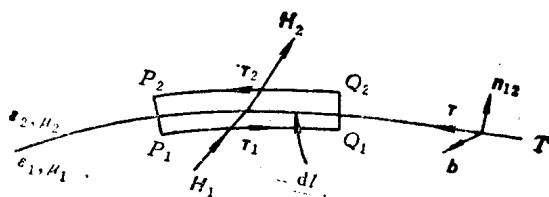


图 1-2 推导关于 E 的边值关系的示意图

$$-D_1 \cdot n_{12} \delta A + D_2 \cdot n_{12} \delta A + \text{柱体侧面的通量} = \rho \delta A \delta h$$

式中， n_{12} 是小面元 δA 的法向单位矢量，方向从媒质 1 指向媒质 2； ρ 是电荷密度。

当柱体的高度趋于零时， D 在其侧面的通量可以忽略，而 $\rho \delta A \delta h \rightarrow \sigma \delta A$ 。这里 σ 是电荷面密度，即界面上单位面积内的电荷。于是从上式得到

$$(D_2 - D_1) \cdot n_{12} = \sigma \quad (1-10 a)$$

或者

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (1-10 b)$$

式中， D_{1n} 、 D_{2n} 分别是 D_1 、 D_2 沿法向 n_{12} 的分量。当界面上不存在面电荷时

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (1-10 c)$$

(2) B 的法向分量的变化 对比式 (1-3) 和 (1-4)，用完全类似的方法得到

$$(B_2 - B_1) \cdot n_{12} = 0 \quad (1-11 a)$$

或者

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (1-11 b)$$

这说明在界面两侧磁感应矢量的法向分量总是相等的，这是磁通连续的直接结果。

(3) H 的切向分量的变化 如图 1-2 所示， dl 是界面 T 上的任一小线元，沿 dl 方向的单位矢量为 t 。通过这个线元两端作界面 T 的法线 $P_1 P_2$ 和 $Q_1 Q_2$ ，再作连线 $P_1 Q_1$ 和 $P_2 Q_2$ ，并令 $P_1 Q_1 \parallel P_2 Q_2 \parallel dl$ ，这样就构成了一个小矩形，它的法向单位矢量为 b 。同样设想，在 T 的两侧媒质的特性急剧而连续地从 ϵ_1 、 μ_1 变到 ϵ_2 、 μ_2 ，因而可以应用微分形式的麦克斯韦方程组，对式 (1-2) 的两边在小矩形上取积分得

$$\oint_{\text{小矩形}} \nabla \times H \cdot b dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{小矩形}} D \cdot b dS + \int_{\text{小矩形}} J \cdot b dS$$

对上式左方应用斯托克斯定理就得到

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{小矩形}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} d\mathbf{S} + \int_{\text{小矩形}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{b} d\mathbf{S}$$

式中, L 代表小矩形的边界。由于线元 $d\mathbf{l}$ 很短, 有理由认为, 在 P_1Q_1 上磁矢量处处相同, 其值为 $\mathbf{H}_1$; 在 P_2Q_2 上磁矢量也处处相同, 其值为 $\mathbf{H}_2$; 在小矩形上电位移矢量也处处相同。因此得到

$$-\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t} dh + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t} dh + P_1P_2 \text{ 和 } Q_1Q_2 \text{ 上 } \mathbf{H} \text{ 的贡献} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} dh dl + \mathbf{J} \cdot \mathbf{b} dh dl$$

式中, dh 等于 P_1P_2 与 Q_1Q_2 的长度。令 $dh \rightarrow 0$, 由于 $\mathbf{H}$ 和 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 是有限的, 上式左方最后一项和右方第一项均趋于零, 而 $\mathbf{J} dh \rightarrow \mathbf{K}$ 。这里 $\mathbf{K}$ 代表界面上穿过与电流方向垂直的单位线段的电流, 称为线电流密度, 于是得到

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{b} \quad (1-12a)$$

或

$$H_{2t} - H_{1t} = K_b \quad (1-12b)$$

式中, H_{1t} 、 H_{2t} 分别表示界面两侧磁矢量沿界面上 $\mathbf{t}$ 方向的分量; K_b 是面电流密度在 $\mathbf{b}$ 方向的分量。从图1-2易见

$$\mathbf{t} = \mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12}$$

将上式代入式 (1-12a), 并利用恒等式 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 就得到

$$\mathbf{b} \cdot [\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \mathbf{b} \cdot \mathbf{K}$$

因为界面上小线元的方向可以任意取, 因此上式对界面内任意方向的矢量 $\mathbf{b}$ 都成立, 而且 $\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$ 和 $\mathbf{K}$ 又都在界面上, 因此必须有

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (1-12c)$$

它与式 (1-12a) 或 (1-12b) 等效。它们都表明, 界面两侧的磁矢量沿界面上任一切线方向的分量之差等于在该切线方向单位长度内所穿过的面电流。

(4) $\mathbf{E}$ 的切向分量的变化 比较式 (1-1) 和 (1-2), 用完全类似的方法可以得到

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (1-13a)$$

或者

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1-13b)$$

即界面两侧的电矢量沿界面上任一切向的分量是连续的。

总之, 式 (1-10) 至 (1-13) 描述了界面两侧的电磁场的变化关系。它们相当于界面上的麦克斯韦方程组。我们将在 § 1-6 中利用它们来解决光波在界面上的反射和折射问题。

四、电磁场的能量守恒和坡印亭矢量

在场空间的任一体积内, 电磁储能的变化由两部分组成: 一是电磁能通过该体积界面流出或流进; 二是由于电磁场对电荷做功而消耗或由于做负功而积累。电磁场的能量守恒定律要求, 电磁储能的减少应该等于通过界面流出的能量和对电荷所做的功之和。由此可以推导出电磁能流密度的表示式。电磁能流密度就是单位时间内在与能流方向垂直的单位面积内所流过的电磁能。在光学领域内, 它就是光的强度。由于一切光探测器 (包括眼睛) 只对光的能量起反应, 所以这个量在光学中是至关重要的。下面我们从麦克斯韦方程组出发来进行分析。

在单位时间单位体积内, 电场对运动速度为 $\mathbf{v}$ 的电荷所做的功为 $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$, 这里, ρ 是电荷

密度, $\rho\mathbf{v}$ 就是运动电流密度 $\mathbf{J}_v$, 另外, 电场对传导电流密度为 $\mathbf{J}_c$ 的电荷所做的功为 $\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{E}$ 。因此, 在单位时间单位体积内电场对运动电荷所做的功可写为

$$(\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (1-14)$$

磁场对运动电荷所做的功为多少呢? 从速度为 $\mathbf{v}$ 的运动电荷 q 在磁场中所受的洛伦兹力 $\mathbf{F}_M = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 知道, 磁场不能使静止电荷 ($\mathbf{v} = 0$) 受力, 而它对运动电荷的作用力始终垂直于运动方向, 即 $\mathbf{F}_M \perp \mathbf{v}$ 。因此磁场只能改变运动电荷的运动方向, 不能改变其速度大小。这样一来, 磁场对电荷不做功。所以, 单位时间单位体积内, 电磁场对运动电荷所做总功由式 (1-14) 表示。将式 (1-2) 的两边点乘以 $\mathbf{E}$ 即得到

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

利用恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$, 并注意到式 (1-1), 可以从上式得到

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (1-15)$$

若进一步假定媒质是线性的 (即 ϵ 和 μ 不依赖于场强), 方程 (1-15) 可写成

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (1-16)$$

式中标量 w 和矢量 $\mathbf{S}$ 定义为

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (1-17)$$

和

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1-18)$$

在电磁学中已经知道, 由式 (1-17) 表示的 w 代表电磁能量密度。这样, 式 (1-16) 的左方就代表单位时间单位体积内电磁能的减少。式 (1-16) 右方第一项是单位时间单位体积内电磁场对电荷所做的功。根据电磁能守恒定律, 右方第二项应该是单位时间内从单位体积流出的能量, 亦即等于能流密度矢量的散度。因此, 将式 (1-18) 给出的 $\mathbf{S}$ 定义为能流密度矢量是合理的。事实也表明, 此定义与实验结果符合。有关能流密度矢量的公式 (1-18) 是由英国物理学家坡印亭 (J. H. Poynting, 1852~1912年) 在1884年首先建立的, 因此常常将能流密度矢量称为坡印亭矢量。它不仅表达了能流密度的大小, 也表达了它的方向。

五、波动方程

麦克斯韦方程组将随空间和时间变化的电磁场的诸参量密切联系起来。为了求解电磁场, 自然要通过消元法求出电矢量和磁矢量单独随时间、空间变化的方程式。在这一章我们只讨论各向同性的非吸收媒质, 物质方程由式 (1-6) 和 (1-7) 给出。另外, 在光学所涉及的场空间内, 往往不包含空间电荷和电流。因此, 可以假定 $\rho = 0$ 和 $\mathbf{J} = 0$, 再利用物质方程式 (1-6) 和 (1-7), 就可以把麦克斯韦方程式 (1-1) 至 (1-4) 化为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1-19a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1-19b)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0 \quad (1-19c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1-19d)$$

将式 (1-19a) 的两边各除以 μ 并取旋度得到

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 \quad (1-20)$$

将式 (1-19 b) 代入上式就得到

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0$$

引用矢量恒等式

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) &= \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \left(\nabla \frac{1}{\mu} \right) \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \end{aligned}$$

和

$$-\mu \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) = \nabla (\ln \mu)$$

得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \ln \mu \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (1-21)$$

应用恒等式 $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon$ 将式 (1-19 c) 展开可得到

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \ln \varepsilon)$$

将它代入式 (1-21) 得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \ln \mu \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla (\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon) = 0 \quad (1-22 a)$$

用完全类似的方法可以得到有关磁矢量的方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \nabla \ln \varepsilon \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \nabla (\mathbf{H} \cdot \nabla \ln \mu) = 0 \quad (1-22 b)$$

这些就是电矢量和磁矢量各自遵循的偏微分方程式。在均匀媒质中, $\nabla \ln \varepsilon = \nabla \ln \mu = 0$, 于是有

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-23 a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-23 b)$$

这就是众所熟知的均匀媒质中的波动方程的标准形式。它的解具有波动性, 亦即电磁场是以波的形式在空间传播的, 这些波称为电磁波。下面几节将详细地讨论方程式 (1-23) 的各种形式的解, 亦即讨论各种形式的电磁波。我们还将看到, 电磁波的传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad (1-24 a)$$

在真空中的传播速度为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (1-24 b)$$

将 μ_0 和 ε_0 的值代入得到

$$c = 2.997930 \times 10^8 \text{ m/s}$$

它与实验测得的光在真空中的传播速度相符。麦克斯韦就是根据这一结果, 推断出光波是电磁波的一种, 为光的电磁学说奠定了坚实的基础。

光波从真空射入媒质时的绝对折射率定义为

$$n = \frac{c}{v} \quad (1-25)$$

将式 (1-24 a) 和 (1-24 b) 代入上式得到

$$n = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (1-26)$$

上式把电磁学参量和光学参量联系起来。我们知道，光波的频率是极高的，可见光的频率约为 10^{15} Hz，而电磁学参量 μ_r 、 ϵ_r 只能在较低的频率下进行测量。因此，用上式计算出来的折射率，只对于非色散媒质才与用光学方法实际测量的折射率接近，对于色散媒质，二者之间会出现很大偏差。

六、互易法则

在光学所涉及的场空间内，往往不包含空间电荷和电流。在这种情形下，从麦克斯韦方程组 (1-19) 不难看出，如果按以下互易法则进行置换：

$$\begin{array}{cccc} E & H & \mu & \epsilon \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ H & -E & \epsilon & \mu \end{array} \quad (1-27)$$

方程组 (1-19) 仍然是成立的。因此，只要详细分析电矢量或磁矢量中的任一个，就可以推知另一个。这给分析问题带来很大的方便。例如，关于磁矢量的波动方程 (1-22 b) 或 (1-23 b) 就可以利用互易法则从电矢量的有关方程直接得到。

§ 1-2 标量波动方程和它的一些解

一、标量波动方程

前一节已经导出了场矢量 E 和 H 必须满足的微分方程。特别是，在各向同性的均匀媒质中，在没有电荷和电流的区域，这个微分方程由式 (1-23) 给出。根据该式，场矢量的每个直角分量必须满足波动方程

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1-28)$$

式中， ψ 代表 E 或 H 的任一直角分量， v 由式 (1-24 a) 给出。 ψ 是时间和空间坐标的函数，本书中也称它为波函数。要获得对场的完全描述，必须分别对每个场分量结合边界条件求解上述波动方程，这是十分复杂的。在一般情况下只能采用近似解法。我们将在第八章中讨论这个问题。这里暂时撇开边界条件，讨论一下标量波动方程 (1-28) 的一些可能的解，以便更具体地认识光波的一些主要的波动形式。

二、标量平面波

就空间变化而言，最简单的电磁波是平面波，即在与某一固定方向垂直的任一平面上，电磁场处处相同。这些平面就叫做波面。处在理想透镜焦点上的点光源发出的光波，经透镜准直后，在近轴区就可以近似地看作平面波。下面来推导平面波的一般表达式。

如图1-3所示， r 为空间任一点 P 的矢径， k_0 为波面法向的单位矢量。取一个新的直角坐标系 $\xi\eta\zeta$ ，令它的 ζ 轴与 k_0 重合。在新坐标系中，平面波的电磁场只依赖于 ζ ，不依赖于 ξ 和 η 。于是

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \psi$$

代入波动方程 (1-28) 得到

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1-29)$$

引入两个新变量

$$p = \xi - vt, \quad q = \xi + vt$$

则式 (1-29) 变为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} = 0$$

这个方程的普遍解是

$$\psi = \psi_1(p) + \psi_2(q) = \psi_1(\xi - vt) + \psi_2(\xi + vt) \quad (1-30)$$

式中, ψ_1 和 ψ_2 是两个任意函数。

先来分析 $\psi_1(\xi - vt)$ 。就一固定时间 ($t = \text{常数}$) 而言, ψ_1 是随空间坐标 ξ 变化的; 就一固定平面 ($\xi = \text{常数}$) 来说, 电磁场是随时间变化的。设当时间从 t 推移到 $t + dt$ 时, 电磁场保持不变的平面沿着 $+\xi$ 方向从 ξ 移到 $\xi + d\xi$ 。函数 ψ_1 在 t 和 $t + dt$ 时刻的参量必定相等, 即

$$\xi - vt = (\xi + d\xi) - v(t + dt)$$

由此不难求出波面的移动速度

$$\frac{d\xi}{dt} = v$$

可见, 波动方程 (1-28) 中的参量 v 确实代表了平面波的传播速度。用类似的分析可以知道, $\psi_2(\xi + vt)$ 代表沿 $-\xi$ 方向以速度 v 传播的平面波。

从图1-3不难看出

$$\xi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_0$$

式中, $\mathbf{k}_0$ 是波面传播方向的单位矢量。

将上式代入式 (1-30) 就得到平面波的普遍表示式

$$\psi = \psi_1(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_0 - vt) + \psi_2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_0 + vt) \quad (1-31)$$

三、标量球面波

电磁波的另一常见的空间变化形式是球面波, 即在以某一固定点为球心的任一球面上, 电磁场处处相同。这些球面也称作波面。例如, 在各向同性的均匀媒质中, 从点光源发出的光波就是球面波。在以该固定点为中心的球面坐标系中, 球面波的电磁场只依赖于矢径的长度 r , 于是有

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi)$$

代入式 (1-28) 得到

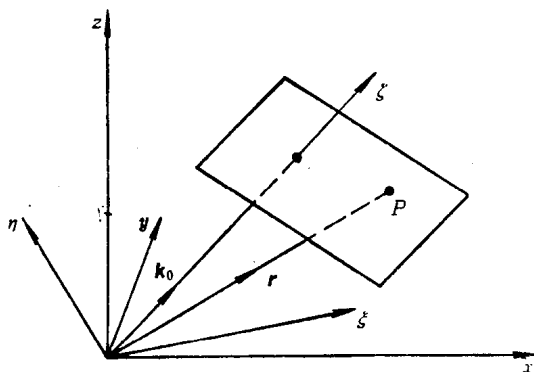


图1-3 平面波

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t^2}(r\psi) = 0$$

与式 (1-29) 对比, 可以得到它的普遍解

$$\psi = \frac{1}{r}\psi_1(r-vt) + \frac{1}{r}\psi_2(r+vt) \quad (1-32)$$

式中第一项代表从中心向外发散的球面波, 第二项代表向中心会聚的球面波, 式中的 v 也代表波面的速度。

四、单色光波

就时间变化而言, 最简单的电磁波是时谐波, 即空间任一点的电磁场都以一个确定的频率随时间作正弦 (或余弦) 变化

$$\psi = A\cos(\omega t - \delta) \quad (1-33)$$

式中, A 是光波的振幅, ω 是光波的角频率, δ 是初位相, 它随空间坐标而变化。在光学中, 这种波称作单色光波。

1. 单色光波的复数表示

为了数学运算方便起见, 本书中常常采用复数表示光波。利用欧拉公式, 可以将式 (1-33) 表示为

$$\psi = \text{Re}\{Ae^{-i(\omega t - \delta)}\}$$

式中, $\text{Re}\{\}$ 表示只取括号内的实部。在对波函数进行线性运算时, 可以将符号 $\text{Re}\{\}$ 略去, 写成

$$\psi = Ae^{-i(\omega t - \delta)} \quad (1-34)$$

这就是单色光波的复数表示式。但应牢记, 在最后结果中有物理意义的是复数的实数部分。另外, 只有当对波函数进行线性运算时才能采用复数表示式。将复数表示式 (1-34) 改写成

$$\psi = Ae^{i\delta}e^{-i\omega t} = Ue^{-i\omega t} \quad (1-35a)$$

式中

$$U = Ae^{i\delta} \quad (1-35b)$$

U 的模 A 代表光波的振幅, U 的幅角代表光波的位相中随空间改变的部分。 U 称为光波的复振幅。在只涉及一种频率的单色光波 ($\omega = \text{常数}$) 时, 显然可以只对复振幅施加线性运算, 而将共同的时间因子 $e^{-i\omega t}$ 略去。但在阐明最后结果的物理意义时, 应将时间因子 $e^{-i\omega t}$ 还原, 并取实部。

在涉及象坡印亭矢量这样的由两个场矢量的乘积表示 [见式 (1-18)] 的物理量时, 每个场矢量必须取其实部。即在公式 (1-18) 中, 场矢量 E 和 H 的每个分量不能用复数表示式代入, 而应该用它们的实数表示式。但是, 由于光波频率极高, 任何探测器无法测出它的能流的瞬时值, 有意义的物理量是能流密度在一个周期内的时间平均值

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S dt$$

式中, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 是电磁场的周期。 $\langle S \rangle$ 可以用矢量场的复数表达式表示为 (习题 1-2)

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(E \times H^*) \quad (1-36a)$$

式中, Re 表示取实部。括号内的矢量的每个分量都是用复数表示的, H^* 是 H 的共轭复数表示式。同样地, 对于电磁能量密度 [见式 (1-17)] 的时间平均值有

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \text{Re}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*) \quad (1-36b)$$

2. 单色平面光波的表示式

上面已经给出一般的单色光波的表示式(1-34)。另一方面,对于沿 $\mathbf{k}_0$ 方向传播的平面光波来说,波函数只能是 $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_0 - vt)$ 的函数,或是 $\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_0}{v} - t\right)$ 的函数。因此沿 $\mathbf{k}_0$ 方向传播的单色平面光波的表示式为

$$\psi = A \exp \left\{ -i \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_0}{v} \right) \right] \right\} \quad (1-37)$$

上式也可以写成

$$\psi = A \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (1-38)$$

式中,

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda} n \mathbf{k}_0 \quad (1-39)$$

称为波矢量。这里 n 是媒质的折射率; λ 是光在真空中的波长; $\mathbf{k}_0$ 是波面法向单位矢量。

任何光波都可以分解为许多沿不同方向传播的不同频率的单色平面光波,因此单色平面光波是光波的最基本的形式。

3. 单色球面光波的表示式

用类似的方法可以得到单色球面光波的表示式

$$\psi = \frac{A}{r} \exp[-i(\omega t \mp kr)] \quad (1-40)$$

式中, k 为波数,由式(1-39)的模给出。 k 前面的负号对应于从中心发散的球面波,正号对应于会聚的球面波。单色球面波的复振幅就是 $\frac{A}{r} \exp(\pm ikr)$,正号对应于发散球面波,负号对应于会聚的球面波。

4. 约化的波动方程式——亥姆霍兹(Helmholtz)方程

将式(1-35a)代入波动方程式(1-28)立即得到

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad (1-41)$$

式中, k 是波数。

这就是众所周知的亥姆霍兹方程。对于单色光波来说,其地位与波动方程式(1-28)相当。由于式中已将时间因子消去,故也称为约化的波动方程式。它不仅适用于均匀媒质,在非均匀媒质中,只要在一个波长范围内,媒质的介电常数和磁导率的相对变化率 $\left(\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} \text{ 和 } \frac{\Delta \mu}{\mu}\right)$ 远小于1,亥姆霍兹方程也是成立的(习题1-1)。

五、准单色光波和群速度

实际光源发出的光波都不是理想的单色光波,这样的光波可以看作由一定频率范围 $\Delta\omega$ 内的许多单色光波叠加而成。在一维情形下,设这些波都沿 z 轴方向传播,而且假定与频率 ω 对应的单色波的振幅为 $a(\omega)$,则实际光波的波函数可以表示为

$$\psi(z, t) = \int_{\Delta\omega} a(\omega) \exp[-i(\omega t - kz)] d\omega \quad (1-42)$$

它也是波动方程(1-28)的一个可能的解。对于激光或经单色仪分离出来的某一谱线来说, $a(\omega)$ 只在中心频率 $\bar{\omega}$ 附近的一个狭窄范围内才不等于零。这样的光波叫做准单色光波。将式(1-42)改写成

$$\psi(z, t) = \exp[-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)] \times \int_{\Delta\omega} a(\omega) \exp\left[i(\omega - \bar{\omega})\left(\frac{k - \bar{k}}{\omega - \bar{\omega}}z - t\right)\right] d\omega$$

式中, $\bar{k} = \frac{n}{c}\bar{\omega}$, 是与中心频率 $\bar{\omega}$ 对应的波数。对于准单色光波来说, $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$, $\omega - \bar{\omega} \approx 0$, 上式近似为

$$\psi(z, t) = A \exp[-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)] \quad (1-43)$$

式中

$$A = \int_{\Delta\omega} a(\omega) \exp\left\{i(\omega - \bar{\omega})\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 z - t\right]\right\} d\omega \quad (1-44)$$

这里 $\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0$ 是微商 $\frac{dk}{d\omega}$ 在 $\omega = \bar{\omega}$ 处的值。由于 $\omega - \bar{\omega} \approx 0$, 所以 A 是由一些低频的简谐分量叠加而成的, 它只随 z 和 t 缓慢地变化。因此, 由式(1-43)表示的准单色光波可以解释为频率为 $\bar{\omega}$ 、波数为 $\bar{k}$ 、振幅随时间和空间坐标缓慢改变的“单色”光波。当

$$\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 z - t = \text{常数}$$

时, A 也保持恒定。可见, 振幅保持恒值的面是沿 z 轴移动的, 移动速度称为群速度。从上式求微分即可求得群速度为

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 \quad (1-45)$$

在非色散媒质中, 由式(1-39)得到

$$v_g = v = \frac{c}{n} \quad (1-46)$$

即非色散媒质中群速度等于相速度。

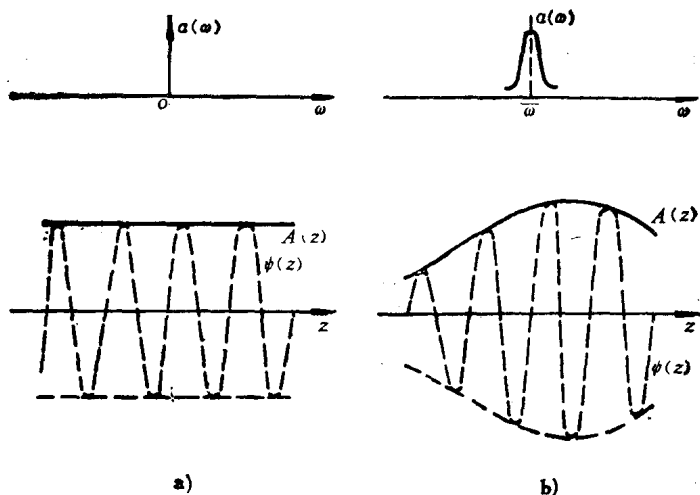
现在来分析某一固定时刻 (例如 $t = 0$) 准单色光波的振幅 A 在空间的分布。在式(1-44)中令 $t = 0$ 即得

$$A(z) \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \exp\left[i(\omega - \bar{\omega})\frac{n}{c}z\right] d\omega$$

式中已用 $\frac{n}{c}$ 近似地代替 $\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0$ 。另外, 由于 $a(\omega)$ 在频率范围 $\Delta\omega$ 之外为零, 所以可将积分上下限扩展到 $\pm\infty$ 。对上式作变量代换后不难得到

$$A(z) \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega + \bar{\omega}) \exp\left(i\frac{n}{c}\omega z\right) d\omega \quad (1-47)$$

式中 $a(\omega + \bar{\omega})$ 就是以中心频率 $\bar{\omega}$ 作为原点的频谱函数。上式表明, 除了一个因子 $\frac{n}{c}$ 外, $A(z) \Big|_{t=0}$ 就是频谱函数的傅里叶变换。图 1-4 给出了两个例子, 图 a 表示严格单色波的情形, $a(\omega)$ 是 δ 函数, 而它的傅里叶变换为常数, 图 b 表示准单色光的情形, $a(\omega)$ 只

图1-4 $A(z)$ 是频谱函数的傅里叶变换

a) 严格单色光 b) 准单色光

在 $\omega = \omega_0$ 的附近不为零, 而 $A(z)|_{z=0}$ 随 z 缓慢地变化。

§ 1-3 高 斯 光 束

平面波和球面波只是波动方程(1-28)的两种特殊形式的解。现在来讨论另一种常见的解——高斯形式的解, 即光波的振幅在光束横截面上呈高斯函数分布。激光器发出的光束就属于这种情形。这种光束也称为高斯光束。

因为激光是准单色光, 可以近似地从亥姆霍兹方程出发来进行分析。引入试探解

$$U = u(x, y, z)e^{ikz} \quad (1-48)$$

它代表沿 z 轴传播的波数为 k 的光波, 但在与 z 轴垂直的平面上, 光波的复振幅不再是常数, 而是依赖于坐标 x 和 y 的函数。对上式进行 ∇^2 运算得

$$\nabla^2 U = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 u \right) e^{ikz}$$

象本书其它部分一样, 我们仅限于讨论振幅缓慢变化的光波, 即在一个波长范围内, $\frac{\partial u}{\partial z}$ 变化不大, 以致 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial u}{\partial z}$, 可以将 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 忽略。于是从上式和式(1-41)得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (1-49)$$

一、基模高斯光束

暂且讨论以 z 轴为对称轴的解, 在这样的场合采用柱面坐标 (ρ, φ, z) 较合适。在柱面坐标系中, 当 u 不依赖于 φ 时, 横向拉普拉斯算符可表示为

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

代入式(1-49)得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (1-50)$$