出版前言

2002年6月，教育部高校学生司和教育部考试中心重新颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，专科起点升本科的大纲将原来师范类和非师范类共8科统考科目调整为不分师范类和非师范类的10科统考科目。

全国各类成人高等学校专科起点本科班招生入学考试(简称专升本考试)，是检验考生是否具备大学专科毕业水平和继续深造能力的水平考试。自1993年开考以来，考生人数已由当年的5万人增加到2002年的近100万人，从而使专升本考试成为发展最快的成人考试项目。为了适应专升本考试的发展，满足考生对优秀教材的需求，我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授和命题研究人员，及时修订和新编了这套专升本入学考试专用教材。

本套教材依据最新考试大纲编写，共有10册，包括《政治》、《英语》、《教育理论》、《大学语文》、《高等数学(一)》、《高等数学(二)》、《艺术概论》、《民法》、《生态学基础》和《医学综合》，即教育部规定的全国统一考试科目。

本套教材充分体现了新大纲精神和考试动态的完美结合，融复习内容与应试内容于一体，讲解深入浅出，有利于考生迅速把握各个学科的重点、难点和考点。此外，书中还精心编制了同步练习和参考答案，以便考生全过程检验复习效果，及时查缺补遗，增强应考信心和能力。

为了使这套教材能早日与读者见面，诸多专家、教授、命题研究人员和责任编辑付出了辛勤劳动，在此一并致谢！

由于编写时间有限，书中不足之处恳请业内人士和读者朋友提出批评指正意见，待再版时进一步完善本套教材，使之为考生复习备考发挥更大作用。

祝愿考生从容应试，顺利过关！

全国专升本命题研究组

2002年8月

目　　录

第一章　函数、极限和连续

第一节　函　数

一、函数概念

1.函数的定义

定义　设 x,y 是某一变化过程中的两个变量，如果对于非空实数集 D 中的每个值 x，变量 y 依照某一对应规则 f 总有惟一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的一个函数，记为

$$y = f(x) \quad (x \in D)$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量或函数. 数集 D 称为函数的定义域，记作 $D(f)$ 或简记为 D，全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称作函数 $y = f(x)$ 的值域，记作 $Z(f)$ 或简记为 Z.

当 x 取定值 x_0 时，$y = f(x)$ 的对应值记作 $f(x_0)$，有时也记为 $y\big|_{x=x_0}$.

函数的定义有两个基本要素：定义域与对应规则. 因此，两个函数相等的充分必要条件是它们的对应规则和定义域都相同.

函数定义域的确定可分两种情况来讨论：对具有实际背景的函数其定义域由问题的实际意义来确定，如汽车以速度 v 作匀速运动，汽车行驶的路程 S 是时间 t 的函数 $S = vt$，t 的定义域是 $[0, +\infty)$ 而不是 $(-\infty, +\infty)$；当函数只由解析表达式给出时，它的定义域就是使表达式有意义的自变量值的集合，这时定义域往往省略不写.

例 1　判别下列函数是否为同一函数：

(1) $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = (\sqrt{x})^2$；

(2) $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$；

(3) $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = |x|$；

(4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ 与 $g(x) = x - 1$.

解　对于(1)，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ 而 $g(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$，由于定义域不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数；

对于(2)，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均是 $(-\infty, +\infty)$，但在 $(-\infty, 0)$ 上 $f(x) \neq g(x)$，也就是说在 $(-\infty, 0)$ 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应规则不一样，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数；

对于(3)，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，对应规则也相同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一函数；

对于(4)，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域也不相同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

例 2　求函数 $y = \sqrt{\dfrac{2x - 1}{x + 1}}$ 的定义域.

解　要使得 y 有意义，x 必须满足下列条件：$\begin{cases} \dfrac{2x - 1}{x + 1} \geqslant 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases}$

等价地有

$$\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\ x+1>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}2x-1\leqslant 0\\ x+1<0\end{cases}$$

解得 $x\geqslant \frac{1}{2}$ 或 $x<-1$,所以 y 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup[\frac{1}{2},+\infty)$.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有三种:解析法(也叫公式法)、列表法和图示法.

(1) 解析法就是用解析表达式(或公式)来表示函数关系,如 $y=\sin x$, $y=x^2+\ln x$ 等等.解析法是函数的主要表示方法,这是因为解析式可以进行各种运算,便于研究函数的性质,高等数学中讨论的函数以解析式为多.

(2) 列表法是以列表的方法来表示函数关系,例如,常用的平方表、平方根表、对数表、三角函数表等,在研究社会经济现象时,常常采用这种列表法.

(3) 图示法是用直角坐标系 xOy 平面上的曲线来表示函数关系,如直线、圆等等.该曲线通常称为函数的图形(或图像),它具有形象直观的特点.

3. 显函数、分段函数、隐函数

(1) 显函数　有明确的解析表示式的函数称作显函数,如 $y=\ln x$, $y=2x^2+1$ 等等.

(2) 分段函数　在定义域的不同部分用不同的公式表示的函数称作分段函数.分段函数不能用统一的公式来表示,而要用两个或两个以上的公式来表示,例如

$$y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

是一个分段函数,其定义域是 $(-\infty,+\infty)$,如图 1-1.

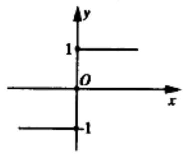

图 1-1

关于分段函数,要注意以下几点:

① 分段函数是用几个公式合起来表司一个函数,而不是表示几个函数;

② 分段函数的定义域是各段定义域的并集;

③ 对分段函数求函数值时,点要代呻到对应范围的公式中去.

例 3　设函数 $f(x)=\begin{cases}-7x+8 & x<0\\ 1 & x=0\\ x^2-4 & x>0\end{cases}$,求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(2)$.

解　$f(x)$ 是一个分段函数,当 x 在不同的范围时,$f(x)$ 的表示式不同,所以对 x 在不同的范围取值时,应代入到不同的表示式中去求值.

$f(-1)=-7\times(-1)+8=15$;　$f(0)=1$;　$f(2)=2^2-4=0$.

(3) 隐函数　若因变量和自变量的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 来表示,该函数称为隐函数.例如 $x^2+y^2=1$, $x+y-e^{xy}=0$ 等是隐函数,对隐函数 $x^2+y^2-1=0$ 而言,可以把它变成两个显函数 $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$ 或 $y=-\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$;对隐函数 $x+y-e^{xy}=1$ 而言,它不能解成显函数,这是真正意义上的隐函数.

二、函数的简单性质

1. 函数的单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于 I 中任意两点 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（单调减少）的；若当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加（严格单调减少）. 如图 1－2，图 1－3 所示.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 单调函数必须指出它的单调区间，例如函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内单增；在区间 $(-\infty,0]$ 内单减；在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $y=x^2$ 不是单调函数，见图 1－4.

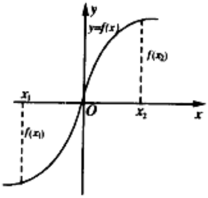

图 1－2

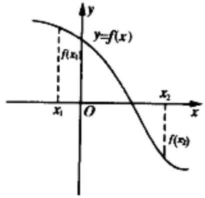

图 1－3

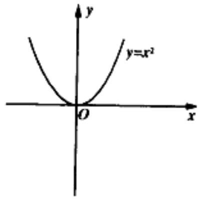

图 1－4

判定函数 $y=f(x)$ 单调性的常用方法.

(1) 直接法

在区间 I 内任取两点 $x_1<x_2$，比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小，再确定函数是单增还是单减. 比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小，一般是计算 $f(x_1)-f(x_2)\geqslant 0$ 或 $\leqslant 0$，但对同号函数（即 $f(x)\geqslant 0$ 或 $f(x)\leqslant 0$），有时比较 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}\geqslant 1$ 或 $\leqslant 1$ 比计算 $f(x_1)-f(x_2)\geqslant 0$ 或 $\leqslant 0$ 要方便.

(2) 用函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的正负来判定

如果 $f(x)$ 可导，且在 I 内恒有 $f'(x)\geqslant 0$（$f'(x)\leqslant 0$），则 $f(x)$ 在该区间内单调增加（单调减少）（该方法留待第二章介绍）.

2. 函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1－5. 奇函数的图像关于原点对称，如图 1－6.

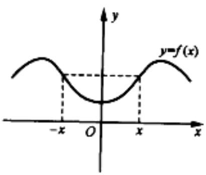

图 1－5

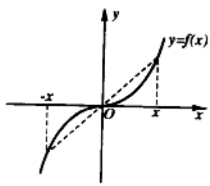

图 1－6

注意

(1) 很多函数既不是偶函数，也不是奇函数，如 $y = \sin x + 1$ 等.

(2) 奇偶函数有下列性质：两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数；两个奇(偶)函数之积必为偶函数；奇函数与偶函数之积必为奇函数.

例 4 砷 $f(x)$ 为奇函数，令 $F(x) = f(x)(\frac{1}{3^x+1} - \frac{1}{2})$，试判断 $F(x)$ 的奇偶性.

解 因潍 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x) = -f(x)$，从而

$$\begin{aligned} F(-x) &= f(-x)(\frac{1}{3^{-x}+1} - \frac{1}{2}) = -f(x)\frac{2-(3^{-x}+1)}{2(3^{-x}+1)} \\ &= -f(x)\frac{(1-3^{-x})3^x}{2(3^{-x}+1)3^x} = -f(x)\frac{3^x-1}{2(3^x+1)} \\ &= f(x)\frac{1-3^x}{2(3^x+1)} = f(x)(\frac{1}{3^x+1} - \frac{1}{2}) = F(x) \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 为偶函数.

3. 函数的周期性

定义 若存在常数 $T > 0$，对于任意 x，总有 $f(x+T) = f(x)$，则称 $y = f(x)$ 为周期函数. 使得上述等式成立的最小正数 T，城作 $f(x)$ 的最小正周期，简称为函数 $f(x)$ 的周期.

例如，函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$ 均为周期函数，它们的周期均为 2π.

4. 函数的有界性

定义 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任何的 $x \in I$，总有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界；如果存在实数 a，使得对任何 $x \in I$，总有 $f(x) \leqslant a$，则称 $f(x)$ 在 I 上有上界；如果存在实数 b，使得对任何 $x \in I$，总有 $f(x) \geqslant b$，则称 $f(x)$ 在 I 上有下界.

显见，$f(x)$ 在 I 上有界的充要条件是 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界，$y = f(x)$ 在 (a, b) 内有界的几何意义是：曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 的部分总是夹在两条平行于 x 轴的直线之间，如图 1－7.

注意

函数的有界性与所讨论的问题的区间有关，例如 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界，但在任何有限区间内有界，$y = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 内无界，而在 $[a, +\infty)$ 内有界($a > 0$ 的常数).

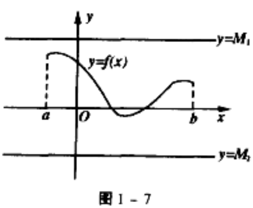

图 1－7

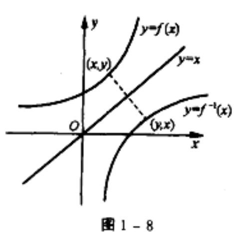

图 1－8

三、反函数

1. 反函数的定义

定义 设已知函数为 $y=f(x)$，如果由此解出的 $x=\varphi(y)$ 是一个函数，则称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，习惯上记作 $y=f^{-1}(x)$，如图 1－8.

需要注意的是：

(1) $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 关于 $y=x$ 对称.

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z，且能解出惟一反函数 $y=\varphi(x)$，则反函数的定义域为 Z，值域为 D.

求反函数的步骤是：

① 在 $y=f(x)$ 中，把 y 看作已知量，解出 x，得到 $x=\varphi(y)$；

② 在 $x=\varphi(y)$ 中，将 x 与 y 互换，则得到 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

一般来说，一个函数不一定存在反函数，下面给出一个反函数存在的充分条件.

定理(反函数存在定理) 如果函数 $y=f(x)$ 在定义区间 (a,b) 内是严格单调增加(或减少)的，其值域为 (c,d)，则它必存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，它的定义域为 (c,d)，值域为 (a,b)，且 $y=f^{-1}(x)$ 在 (c,d) 内也是严格单调增加(或减少)的.

例 5 求 $y=10^x$ 的反函数.

解 $y=10^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格增加，其值域是 $(0,+\infty)$，在 $y=10^x$ 两边取对数得

$$x=\lg y,\ 0<y<+\infty$$

所以 $y=10^x$ 的反函数是 $y=\lg x, 0<x<+\infty$.

2. 反函数的图像

由于函数 $y=f(x)$ 的反函数(如果存在的话)有两种形式：$x=\varphi(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$，所以 $f(x)$ 的反函数的图像可分两种情况讨论. (1) $y=f(x)$ 的图像与它的反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像是同一曲线，如图 1－9.

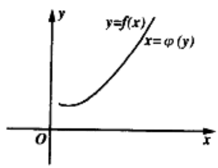

图 1－9

(2) $y=f(x)$ 的图像与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于 $y=x$ 对称，见图 1－8. 要作 $y=f(x)$ 反函数的图形，只须作 $y=f(x)$ 关于直线 $y=x$ 的对称图形.

四、函数的四则运算与复合运算

1. 函数的四则运算

设函数 $f(x), x\in D_1$，函数 $g(x), x\in D_2$ 为两个函数，且 $D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和、差、积、商分别是指函数

和 $f(x)+g(x),\ x\in D_1\cap D_2$；

差 $f(x)-g(x),\ x\in D_1\cap D_2$；

积 $f(x)g(x),\ x\in D_1\cap D_2$；

商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}, x\in D_1\cap D_2\cap\{x\mid g(x)\neq 0\}$.

需要注意的是函数通过四则运算后，其定义域变小了.

例 6 设 $f(x)=x^2, g(x)=\lg x$，试求 $f(x)+g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

解 显然,$f(x)$ 的定义域是 $D_1 = (-\infty, +\infty)$,$g(x)$ 的定义域是 $D_2 = (0, +\infty)$,所以

$$f(x) + g(x) = x^2 + \lg x,\ x \in D_1 \cap D_2 = (0, +\infty)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\lg x},\ x \in D_1 \cap D_2 \cap \{x \mid \lg x \neq 0\} = (0,1) \cup (1, +\infty)$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lg x}{x^2},\ x \in D_1 \cap D_2 \cap \{x \mid x^2 \neq 0\} = (0, +\infty)$$

2. 复合运算

定义 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$,如果 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域中的子集 X 内取值时,$\varphi(x)$ 在 $f(u)$ 的定义域中,则 y 成为 x 的函数,此函数称为 y 关于 x 的复合函数,记作 $y = f(\varphi(x))$.

注意

(1) $y = f(\varphi(x))$ 是由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数,它的定义域是 X,u 称作中间变量.

(2) 我们不仅可以定义两个函数的复合函数,还可以定义更多个函数的复合函数,如 $y = f(u), u = g(v), v = \varphi(x)$ 可复合成 $y = f(g(\varphi(x)))$ 等.

(3) 并不是所有的两个函数都能复合成一个函数,例如,$y = \sqrt{u}, u = -x^2 - 1$ 就不能复合成 $y = \sqrt{-x^2-1}$,这是因为 $u = -x^2 - 1 < 0$,它不能使 $y = \sqrt{u}$ 有定义.

例 7 设 $y = \sqrt{u}, u = \ln v, v = x^2$,试求 y 对 x 的复合函数.

解 $v = x^2$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,值域是 $(0, +\infty)$,而 $u = \ln v$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,所以 u 对 x 的复合函数为 $u = \ln x^2$;又 $y = \sqrt{u}$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,为使 $u \geqslant 0$,必须 $\ln x^2 \geqslant 0$,等价地 $x^2 \geqslant 1$,解得 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,故 y 对 x 的复合函数是 $y = \sqrt{\ln x^2}, x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

五、基本初等函数

1. 常数函数

$y = C, -\infty < x < +\infty$,称作常数函数,它的图像是一条平行于 x 轴的直线,如图 1-10.

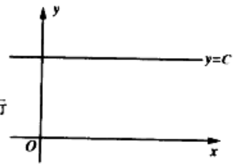

图 1-10

2. 幂函数

函数 $y = x^a$(a 为常数),称作幂函数.常用的幂函数有 $a = 1,2,3,-1,-2$ 等几种情形,$a = 1, y = x$ 为正比例函数;$a = 2, y = x^2$ 为抛物线,$a = -1, y = \frac{1}{x}$ 为反比例函数,其图形是双曲线.

幂函数的定义域同 a 有关,例如,当 a 为自然数时,定义域为 $(-\infty, +\infty)$;当 $a = \frac{1}{2}$ 时,定义域为 $[0, +\infty)$;当 $a = -1$ 时,定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,但无论 a 取何值 $y = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 内总有定义.

当 $a > 0$ 时,它的图形如图 1-11 所示,此时 $y = x^a$ 均通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$,在 $(0, +\infty)$ 内严格单调增加且无界.

当 $a < 0$ 时,它的图形如图 1-12 所示,此时 $y = x^a$ 均通过点 $(1,1)$,在 $(0, +\infty)$ 内严格单调减少且无界,并且以 x 轴和 y 轴为渐近线.

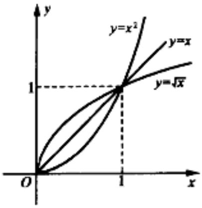

图 1－11

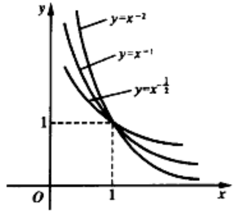

图 1－12

3. 指数函数

函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 称作指数函数. 以无理数 $e=2.7182818\cdots$ 为底的指数函数 $y=e^x$ 是微积分中常用的指数函数.

指数函数 $y=a^x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $(0, +\infty)$，它的图形总在 x 轴的上方，且通过点 $(0,1)$，$y=a^x$ 的图像与 $y=a^{-x}$ 的图像关于 y 轴对称；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 严格单调增加且无界，曲线以 x 轴的负半轴为渐近线；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 严格单调减少且无界，曲线以 x 轴的正半轴为渐近线，如图 1－13 所示.

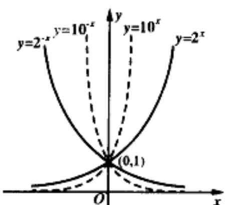

图 1－13

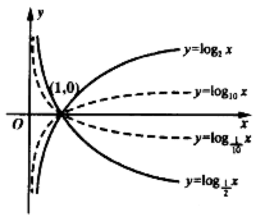

图 1－14

4. 对数函数

函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 称为对数函数. 当 $a=10$ 时，$y=\log_a x$ 称作常用对数，记作 $y=\lg x$；当 $a=e$ 时，$y=\log_a x$ 称作自然对数，记作 $y=\ln x$.

对数函数的定义域是 $(0, +\infty)$，值域是 $(-\infty, +\infty)$，它的图像都在右半平面，都经过点 $(1, 0)$；对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称；当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 严格单调增加且无界，曲线以 y 轴的负半轴为渐近线；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 严格单调减少且无界，曲线以 y 轴的正半轴为渐近线；$y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 关于 x 轴对称，如图 1－14.

5. 三角函数

三角函数有以下 6 个：

正弦函数 $y = \sin x$；余弦函数 $y = \cos x$；

正切函数 $y = \tan x$；余切函数 $y = \cot x$；

正割函数 $y = \sec x$；余割函数 $y = \csc x$.

其中自变量 x 以"弧度"为单位.例如,$x = 1$ 表示 1 弧度（1 弧度 $= 180° \div \pi \approx 57°17'44.8''$）.

正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$,值域是$[-1,1]$,它是奇函数,且是以 2π 为周期的周期函数,其图像如图 1－15 所示.

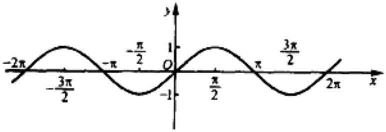

图 1－15

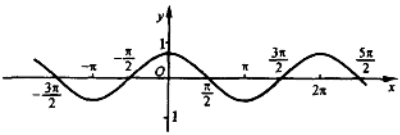

图 1－16

余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$,值域是$[-1,1]$,它是偶函数,且是以 2π 为周期的周期函数,其图像如图 1－16 所示.

正切函数 $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 的定义域是 $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的一切实数,也就是$\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,值域为$(-\infty, +\infty)$,它是奇函数,且是以 π 为周期的周期函数,其图像如图 1－17 所示.

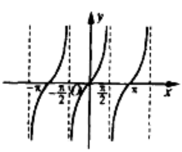

图 1－17

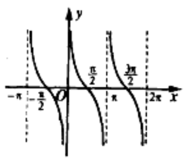

图 1－18

余切函数 $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ 的定义域是 $x \neq k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的一切实数,它是奇函数,且是以 π 为周期的周期函数,其图像如图 1－18 所示.

正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ 与余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ 分别是余弦函数和正弦函数的倒数；它们都是以 2π 为周期的周期函数；$y = \sec x$ 为偶函数,定义域与正切函数的定义域相同,值域为

$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$；$y=\csc x$ 为奇函数，定义域与余切函数的定义域相同，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

6. 反三角函数

常见的反三角函数有如下四个：

反正弦函数 $y=\arcsin x$；反余弦函数 $y=\arccos x$；

反正切函数 $y=\arctan x$；反余切函数 $y=\text{arccot}\,x$.

它们是作为相应的三角函数的反函数定义出来的.

函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，它在 $[-1,1]$ 上是严格单调增加的，它是奇函数，它的图像与 $y=\sin x,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－19.

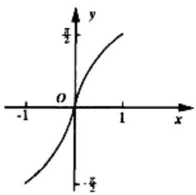

图 1－19

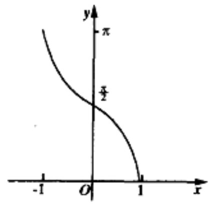

图 1－20

函数 $y=\arccos x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$，$y=\arccos x$ 在区间 $[-1,1]$ 上严格单调减少，它的图像与 $y=\cos x,0\leqslant x\leqslant\pi$ 关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－20 所示.

函数 $y=\arctan x$ 是 $y=\tan x,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 的反函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，它在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加，它是奇函数，其图像与 $y=\tan x,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－21 所示.

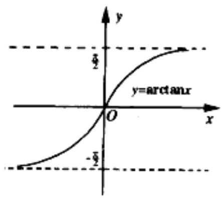

图 1－21

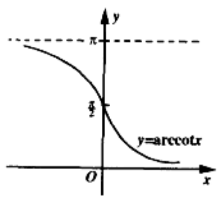

图 1－22

反余切函数 $y=\text{arccot}\,x$ 是 $y=\cot x,0<x<\pi$ 的反函数，它是严格单调减少函数，其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,\pi)$，其图像与 $y=\cot x(0<x<\pi)$ 关于直线 $y=x$ 对称，如图1－22 所示.

六、初等函数

定义　由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所得到的函数统称为初等函数.

初等函数都可以用解析式表示.

例如 $y = \sin(1 + x^2) + \cos x$；$y = \frac{\sin x}{x} = x\ln x$；它们均为初等函数.

七、有关函数知识的应用

1. 函数定义域的求法

函数的定义域是指使函数表达式有意义的自变量的取值范围，所以求函数的定义域必须遵循下列法则：

(1) 分式中的分母不能为零；

(2) 负数不能开偶次方；

(3) 对数 $\log_a x$ 中的 x 必须大于零；

(4) 反三角函数 $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 中的 x 必须满足 $|x| \leqslant 1$；

(5) 上述情况同时出现时，应取交集；

(6) 对实际问题需保证符合题意的条件.

例 8　求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$；　　(2) $y = \sqrt{5 - x} + \lg(x - 1)$；

(3) $y = \lg\frac{x}{x - 2} + \arccos\frac{3x - 1}{5}$；　　(4) $y = \arcsin\frac{2x - 3}{x + 1} + \frac{1}{x + 2}$.

解　(1) 负数不能开偶次方：$x^2 - 5x + 4 \geqslant 0$，解得　$x \leqslant 1$ 或 $x \geqslant 4$

所以 $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ 的定义域是 $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.

(2) 负数不能开偶次方：$5 - x \geqslant 0$，得 $x \leqslant 5$

对数中的算数必须为正：$x - 1 > 0$，得 $x > 1$

两者取交集即得 $y = \sqrt{5 - x} + \lg(x - 1)$ 的定义域为 $(1, 5]$.

(3) 对数中的算数必须正：$\frac{x}{x - 2} > 0$；

分式中的分母不能为零：$x - 2 \neq 0$；

反余弦中的变量的绝对值不能大于 1：$\left|\frac{3x - 1}{5}\right| \leqslant 1$.

综合之得 $\begin{cases} \frac{x}{x - 2} > 0 & ① \\ x - 2 \neq 0 & ② \\ \left|\frac{3x - 1}{5}\right| \leqslant 1 & ③ \end{cases}$

由 ① 可得 $\begin{cases} x > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$ 即解得 $x > 2$ 或 $x < 0$；

由 ② 得 $x \neq 2$；

由 ③ 可得 $|3x - 1| \leqslant 5$，解得 $-\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2$

三者取交集即得 $y=\lg\frac{x}{x-2}+\arccos\frac{3x-1}{5}$ 的定义域为$[-\frac{4}{3},0)$.

(4) 反正弦函数中的变量的绝对值不能大于1：$\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|\leqslant 1$

分式中的分母不能为零：$x+1\neq 0, x+2\neq 0$

综合之得 $\begin{cases}\left|\dfrac{2x-3}{x+1}\right|\leqslant 1 & ①\\ x\neq -1, x\neq -2 & ②\end{cases}$

由 ① 变形得 $\left|2-\frac{5}{x+1}\right|\leqslant 1$，等价地 $-1\leqslant 2-\frac{5}{x+1}\leqslant 1$，解得 $4\geqslant x\geqslant\frac{2}{3}$，结合 ② 即得 $y=\arcsin\frac{2x-3}{x+1}+\frac{1}{x+2}$ 的定义域为$[\frac{2}{3},1)\cup(1,2)\cup(2,4)$.

2. 已知函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的表达式，求复合函数 $f(\varphi(x))$.

例 9 已知 $f(x)=x^2-3x+1$，求 $f(x+1)$，$f(\sin x)$，$f(f(x))$.

解 $f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+1=x^2-x-1$

$f(\sin x)=(\sin x)^2-3\sin x+1$

$$\begin{aligned}f(f(x))&=(f(x))^2-3f(x)+1\\&=(x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1\\&=x^4-6x^3+8x^2+3x-1\end{aligned}$$

例 10 设函数 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f(f(f(x)))$.

解 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，$f(x)$ 的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，也即 $x\neq 1$，于是

当 $f(x)\neq 1$ 且 $x\neq 1$ 即 $x\neq 1, x\neq\frac{1}{2}$ 时，

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}\quad(x\neq 1, x\neq\frac{1}{2})$$

当 $f(f(x))\neq 1$ 且 $x\neq 1, x\neq\frac{1}{2}$ 即 $x\neq 1, x\neq\frac{1}{2}, x\neq\frac{1}{3}$ 时，

$$f(f(f(x)))=\frac{f(f(x))}{1-f(f(x))}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}\quad(x\neq 1, x\neq\frac{1}{2}, x\neq\frac{1}{3})$$

注意定义域的确定.

3. 已知复合函数 $f(\varphi(x))$，求函数 $f(x)$ 的表达式

已知复合函数 $f(\varphi(x))$ 求函数 $f(x)$ 的表达式有两种求法：

(1) 拼凑法　将 $f(\varphi(x))$ 的表达式凑成 $\varphi(x)$ 的函数关系式，然后将 $\varphi(x)$ 换成 x，即得 $f(x)$ 表达式.

(2) 换元法　令 $u=\varphi(x)$，从中解出 $x=g(u)$，求出 $f(u)$ 的表达式，将 u 换成x，即得 $f(x)$ 表达式.

例 11 设 $f(x+2)=x^2-x-1$，求 $f(x)$.

解法一 将右边凑成以 $x+2$ 为变量的形式.

$$f(x+2)=x^2-x-1=(x+2)^2-5x-5=(x+2)^2-5(x+2)+5$$

所以$f(x)=x^2-5x+5$

解法二 换元.为此令 $x+2=u$,即 $x=u-2$,代入 $f(x+2)=x^2-x-1$,得

$$f(u)=(u-2)^2-(u-2)-1=u^2-5u+5$$

所以$f(x)=x^2-5x+5$

例 12 设$f(\frac{1}{\sqrt{x}})=\frac{1}{x}-x+x^2-\sqrt{1+x^2}(x>0)$,求 $f(x)$.

解 令$\frac{1}{\sqrt{x}}=u$,则 $x=\frac{1}{u^2}$,代入 $f(\frac{1}{\sqrt{x}})$,得

$$f(u)=u^2-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}-\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}=u^2+\frac{1}{u^4}-\frac{1+\sqrt{1+u^4}}{u^2}$$

所以 $f(x)=x^2+\frac{1}{x^4}-\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}$

注意

由 $f(\varphi(x))$ 求 $f(x)$ 的方法很重要,请读者熟练掌握.

4.已知函数 $f(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 的表达式,求函数 $\varphi(x)$ 的表达式

已知函数 $f(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 的表达式,求函数 $\varphi(x)$ 的表达式,也就是求中间变量的表达式.

例 13 已知 $f(x)=\mathrm{e}^x$,$f(\varphi(x))=2x+1$,求 $\varphi(x)$.

解 $f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{\varphi(x)}$, $f(\varphi(x))=2x+1$

所以 $\mathrm{e}^{\varphi(x)}=2x+1$

从而 $\varphi(x)=\ln(2x+1)$

例 14 已知 $f(x)=\frac{x}{1+x}$,$f(\varphi(x))=x^2$,求 $\varphi(x)$.

解 因为 $f(x)=\frac{x}{1+x}$,所以 $f(\varphi(x))=\frac{\varphi(x)}{1+\varphi(x)}$ 又 $f(\varphi(x))=x^2$,

故 $\frac{\varphi(x)}{1+\varphi(x)}=x^2$,$1-\frac{1}{1+\varphi(x)}=x^2$

解得 $\varphi(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$

【习题 1.1】

1.函数 $y=\frac{2x-4}{\ln(x+1)}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是________.

2.函数 $y=\frac{1}{|x|-x}$ 的定义域是________.

3.函数 $y=\ln\frac{x}{x-2}+\arccos\frac{x}{4}$ 的定义域是________.

4.已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是[3,6],求:

(1)$f(3x+4)$ 的定义域;

(2)$f(x^2+2)$ 的定义域;

(3)$f(x-1)+f(x+1)$ 的定义域;

(4)$f(7-\frac{1}{2}x)+f(x+1)$ 的定义域.

5. 函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$ 的定义域是________.

6. 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，证明 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，且 $f(x)$ 为奇函数.

7. 判断下列函数哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些函数是非奇非偶函数：

(1) $f(x)=2^x-2^{-x}$；　　(2) $f(x)=2^x+2^{-x}$；

(3) $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>0,a\neq1)$；　　(4) $f(x)=4x-x^2$；

(5) $f(x)=\cos x+x^4$；　　(6) $f(x)=\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

8. 判别函数 $y=\ln x$ 在 $(0,1)$ 内的单调性.

9. 证明函数 $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

10. 求 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数.

11. 求 $y=1+\lg(x-2)$ 的反函数.

12. 设 $f(x)=\sqrt{x}+1$，试求 $f(x^2)$，$f(f(x))$.

13. 设 $f(2x+1)=x^2+x+1$，试求 $f(x)$.

14. 设 $f(x)=x^3$，$g(x)=e^x$，试求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

15. 指出下列复合函数由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=\cos\sqrt{\ln x}$；　　(2) $y=\arctan\sqrt{e^x+1}$；

(3) $y=\ln^3\arccos\sqrt{2^{x-4}}$；　　(4) $y=\sin e^{\sin x^2}$.

16. 已知 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ x & 0\leqslant x<1.\\ \sqrt{x} & 1\leqslant x<8\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 定义域；　　(2) 求 $f(x^2-1)$.

17. 下列 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为相同函数的是　　(　　)

A. $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$　　B. $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$

C. $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$　　D. $f(x)=\lg\sqrt{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{2}\lg|x|$

18. 下列函数中，为偶函数且在 $(-\infty,0)$ 上是减函数的是　　(　　)

A. $y=x^2+2x-2$　　B. $y=1-x^2$

C. $y=(\dfrac{1}{2})^{|x|}$　　D. $y=\log_2|x|$

19. 设 $f(2x)=2^x$，则 $f(x)=$　　(　　)

A. 2^{2x}　　B. $2^{\frac{x}{2}}$　　C. $(\dfrac{1}{2})^x$　　D. 2^x

20. 某化肥厂生产某产品1000吨，每吨定价120元，销售量在700吨以内(包括700吨)，按原价出售，超过700吨的部分打9折出售，试求销售收入与销量之间的数学表达式.

21. 某公共汽车路线全长20公里，票价规定如下：乘坐4公里以下者收费5角，乘坐4公里到10公里之间者收费1元，乘坐10公里以上者收费1元5角，试将票价表成路程之函数.

【习题答案】

1. $(-1,0)\cup(0,4]$

2. $(-\infty,0)$

3. $[-4,0)\cup(2,4]$

4. (1) $3\leqslant 3x+4\leqslant 6$，解得 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$，所以 $f(3x+4)$ 的定义域是$[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$；

(2) $3\leqslant x^2+2\leqslant 6$，得 $1\leqslant x^2\leqslant 4$，解得 $x\in[-2,-1]\cup[1,2]$，所以 $f(x^2+2)$ 的定义域是$[-2,-1]\cup[1,2]$；

(3) $\begin{cases}3\leqslant x-1\leqslant 6\\3\leqslant x+1\leqslant 6\end{cases}$ 解得 $4\leqslant x\leqslant 5$，所以 $f(x-1)+f(x+1)$ 的定义域是$[4,5]$；

(4) $\begin{cases}3\leqslant 7-\frac{1}{2}x\leqslant 6\\3\leqslant x+1\leqslant 6\end{cases}$ 解得 $2\leqslant x\leqslant 5$，所以 $f(7-\frac{1}{2}x)+f(x+1)$ 的定义域是$[2,5]$.

5. $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$

6. 因为 $\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=|x|$，所以 $x+\sqrt{1+x^2}>0$

从而 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=-\ln(-x+\sqrt{1+x^2})^{-1}\\&=-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)=-\ln\left[\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}\right]\\&=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

7. (1) $f(-x)=2^{-x}-2^{-(-x)}=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数；

(2) $f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^x+2^{-x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数；

(3) $f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{a^x(a^{-x}-1)}{a^x(a^{-x}+1)}=-\frac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$

所以 $f(x)$ 为奇函数；

(4) $f(-1)=-4-1=-5$，$f(1)=4-1=3$，因 $f(-1)\neq -f(1)$，$f(-1)\neq f(1)$

故 $f(x)=4x-x^2$ 非奇非偶函数；

(5) $f(-x)=\cos(-x)+(-x)^4=\cos x+x^4=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数；

(6) $f(-x)=\ln\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

8. $0<x_1<x_2$，$\ln x_2-\ln x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}>0$，所以 $y=\ln x$ 在$(0,1)$内严格单调增加.

9. $0\leqslant\frac{2x^2}{1+x^2}=\frac{2x^2+2-2}{1+x^2}=2-\frac{2}{1+x^2}<2$，所以 $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界.

10. $y=\frac{2^x}{2^x+1}=\frac{2^x+1-1}{2^x+1}=1-\frac{1}{2^x+1}$，由此得 $\frac{1}{2^x+1}=1-y\quad(0<y<1)$

从而 $2^x+1=\frac{1}{1-y}$，$2^x=\frac{1}{1-y}-1=\frac{y}{1-y}(0<y<1)$

解得 $x = \log_2 \frac{y}{1-y} = \log_2 y - \log_2(1-y)$

所以 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数是 $y = \log_2 x - \log_2(1-x) \quad (0 < x < 1)$

11. 由 $y = 1 + \lg(x-2)$ 得 $\lg(x-2) = y-1$,解得 $x = 2 + 10^{y-1}$

所以 $y = 1 + \lg(x-2)$ 的反函数是 $y = 2 + 10^{x-1}, x \in (-\infty, +\infty)$.

12. 因为 $f(x) = \sqrt{x} + 1 \quad (x \geqslant 0)$

所以 $f(x^2) = \sqrt{x^2} + 1 = |x| + 1; f(f(x)) = \sqrt{f(x)} + 1 = \sqrt{\sqrt{x}+1} + 1 \quad (x \geqslant 0)$.

13. $f(2x+1) = x^2 + x + 1$,令 $2x+1 = u$,则 $x = \frac{u-1}{2}$,代入 $f(2x+1) = x^2 + x + 1$ 得 $f(u)$ $= (\frac{u-1}{2})^2 + \frac{u-1}{2} + 1 = \frac{u^2}{4} + \frac{3}{4}$, 所以 $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$.

14. $f(g(x)) = (g(x))^3 = (e^x)^3 = e^{3x}$

$g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{x^3}$

15. (1) $y = \cos u, u = \sqrt{v}, v = \ln x$;

(2) $y = \arctan u, u = \sqrt{v}, v = e^x + 1$;

(3) $y = u^3, u = \ln v, v = \arccos w, w = \sqrt{z}, z = 2^{x-4}$;

(4) $y = \sin u, u = e^v, v = \sin w, w = x^2$.

16. (1) 由 $f(x)$ 的定义知 $x \in (-\infty, 8)$

$$(2) f(x^2-1) = \begin{cases} e^{x^2-1} & x^2-1<0 \\ x^2-1 & 0 \leqslant x^2-1<1 \\ \sqrt{x^2-1} & 1 \leqslant x^2-1<8 \end{cases}$$

由 $x^2-1<0$ 解得 $-1<x<1$;

由 $0 \leqslant x^2-1<1$ 解得 $x \in (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$;

由 $1 \leqslant x^2-1<8$ 解得 $x \in (-3, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3)$,

$$故 \quad f(x^2-1) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & -3<x \leqslant -\sqrt{2} \\ x^2-1 & -\sqrt{2}<x \leqslant -1 \\ e^{x^2-1} & -1<x<1 \\ x^2-1 & 1 \leqslant x<\sqrt{2} \\ \sqrt{x^2-1} & \sqrt{2} \leqslant x<3 \end{cases}$$

17. B

对于 A, $f(x)$ 定义域是 $(-\infty, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$;

对于 C, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$;

对于 D, $f(x)$ 定义域是 $(0, +\infty)$, $g(x)$ 定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

18. D

A 不是偶函数;B 虽是偶函数,但在 $(-\infty, 0)$ 内为严格增函数;C 在 $(-\infty, 0)$ 严格增加;D 符合要求.

19. B