

工程力学的计算机方法

孔 祥 飞

光明日报软件出版部

一九八六.二

绪 言

计算机出现以来，对力学的发展有很大的促进作用。人们越来越广泛地利用计算机来解决各种力学问题。

力学计算的计算机化大致可归为三类问题。第一类是计算量很大，以致难以用人工逐步求解。对这一类问题，采用了计算机以后不仅准确、迅速，而且由于运用更加普遍适用的解析方法，使解题方法规范化。

第二类是以往不能够得到解析解的高次方程、超越方程，运用计算机可以得到足够精确的近似解。这样就不必再去用精度、效率都很低的“试凑法”、“图解法”了。

力学发展到今天，人们已不仅仅是对已有的受力体分析其受力，而且开始采用优化方法指导结构的设计，使其更为合理。这些，大概在计算机出现以前是难于办到的。这也许是力学求助于计算机的第三类问题。

工程力学，（包括理论力学、材料力学、结构力学）在利用计算机解题方面同样有广阔的前景。相信不久便会深入到教学、科研的各种领域。

本书作为一种尝试，提出了工程力学中一些问题的计算机求解方法。目前还很不系统，很不成熟，现把它编辑成册首先要想总结提高，更主要的希望是读者能批评、补充，使其日臻完善。

书中的全部程序都是用 BASIC 语言编写，其绘图语言为 PC—1500 机所特有。书中程序说明部分所列出的程序名称和地址是指该程序存放在磁带中所用的名称及录音带中的位置。

目 录

绪 言

第一篇 理论力学 (1)

第一章 静力学 (1)

§1-1 平面汇交力系 (1)

§1-2 空间汇交力系 (4)

§1-3 平面一般力系 (8)

§1-4 静定梁求支座反力 (14)

§1-5 静定桁架求杆内力 (22)

§1-6 平面几何图形的面积、重心 (31)

第二章 运动学 (35)

§2-1 点的运动 (35)

§2-2 点的复合运动 (41)

第三章 动力学 (45)

§3-1 质点的直线振动 (45)

第二篇 材料力学 (55)

第一章 基本变形 (55)

§1-1 密圈弹簧计算 (55)

§1-2 矩形组合截面的扭转 (59)

§1-3 梁的内力图 (64)

§1-4 初参数法求梁挠度、转角 (73)

第二章 平面图形几何性质 (82)

§2-1 单连通域图形的几何性质 (82)

§2-2 带孔板的平面几何性质 (88)

第三章 应力、应变分析 (95)

§3-1 二向应力状态下绘制应力圆程序 (95)

§3-2 应力、应变测试分析 (99)

第四章 曲杆应力分析 (104)

§4-1 矩形组合截面曲杆的弯曲应力 (104)

§4-2 圆、梯形截面曲杆弯曲应力 (109)

第五章 稳定分析 (114)

§5-1 稳定分析的超越方程求解 (114)

§5-2 稳定分析的折减系数法 (117)

第六章 材料力学试验数据处理程序 (120)

§6-1 弹性模量 E 的测定 (120)

§6-2 绘制剪切变形曲线 (123)

§6-3 剪切模量 G 的测定 (126)

§6-4 纯弯梁正应力测试 (130)

§6-5 工字梁应力状态分析 (136)

§6-6 组合变形试验数据处理 (143)

第三篇 结构力学 (149)

第一章 三铰拱内力分析 (149)

第二章 连续梁的内力分析 (164)

第三章 平面桁架内力分析 (177)

第四章 平面刚架内力分析 (188)

参 考 书 目 (201)

第一篇 理論力学

第一章 靜力学

§1-1 平面汇交力系

←→ 力学原理

平面上作用有汇交于某一点的若干个外力 $F_1, F_2 \dots F_n$, 由合力投影定律得

$$\begin{cases} \sum x = \sum_{i=1}^n F_i x \\ \sum y = \sum_{i=1}^n F_i y \end{cases} \quad (1-1)$$

其中 $F_i x, F_i y$ 分别表示第 i 个外力在 x 轴及 y 轴的投影。若以 D 表示外力与 x 轴正向的夹角, 则有 $F_i x = F_i \cdot \cos D$, $F_i y = F_i \cdot \sin D$ (1-2)

平面汇交力系的求解通常分两种类型。一类为求合力大小、方向。这由 (1-1), (1-2) 式即可得到。另一类是已知两个约束力的方向求其大小。其方法如下:

设两力 R_1, R_2 与 x 轴的夹角分别为 A_1, A_2 ,

$$\text{则: } \begin{cases} R_1 \cdot \cos A_1 + R_2 \cdot \cos A_2 = -\sum x \\ R_1 \cdot \sin A_1 + R_2 \cdot \sin A_2 = -\sum y \end{cases} \quad (1-3)$$

$$\text{故: } R_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\sum x & \cos A_2 \\ -\sum y & \sin A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos A_1 & \cos A_2 \\ \sin A_1 & \sin A_2 \end{vmatrix}}; \quad R_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos A_1 & -\sum x \\ \sin A_1 & -\sum y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos A_1 & \cos A_2 \\ \sin A_1 & \sin A_2 \end{vmatrix}} \quad (1-4)$$

当 (1-4) 式分母为零, 即 $\cos A_1 \sin A_2 - \cos A_2 \sin A_1 = \cos(A_1 - A_2) = 0$, 说明两力方向一致, 则此为无解。除非 A_1, A_2 的方向与外力方向一致 (此时两未知力的合力等于外力), 否则在力学上也是没有意义的。

(二) 程序说明 程序名: GING-1, 地址: 0-12

源程序

备 注

```
5: TEXT: CLEAR:
   CSIZE 1
7: COLOR 0

10: INPUT "How many F?"; N
12: LPRINT "
      F
      DIRECTION"
15: FOR I=1 TO N
20: INPUT "Power of F="; F, "Direction of F="; D
25: FX=FX+F*COS(D)
30: FY=FY+F*SIN(D)
32: LPRINT F, D
35: NEXT I
40: INPUT "Direction of R1"; A1,
      "Direction of R2"; A2
45: IF A1=0 AND A2=90 THEN LET
      R1=-FX:R2=-FY: GOTO 76
50: IF A2=0 AND A1=90 THEN LET
      R2=-FX:R1=-FY: GOTO 76
55: C1=COS(A1): C2=COS(A2): S1=
      SIN(A1): S2=SIN(A2)
60: M=C1*S2-S1*C2
65: IF M=0 THEN 110
~ 2 ~
```

5-7 进入 BASIC
文本状态, 清除
计算机内存数据,
用 1 号字, 黑色
笔书写。(以后
这类语句不作说
明)

10 读入外力个数。

15-35 读入各外
力的大小和方向
角, 并按 (1-1)
式累加。

40 读入反力的
两个方向角。

45-50 如果两反
力正好在 0° ,
 90° 方向, 即打
印输出。

55-75 按 (1-4)
式计算两个反力
的大小

```

70: R1 = (-FX * S2 + FY * C2) / M
75: R2 = (-C1 * FY + FX * S1) / M
76: COLOR 3
80: LPRINT " R1 DIRECTION "
85: LPRINT R1, A1
90: LPRINT " R2 DIRECTION "
95: LPRINT R2, A2
100: END
110: LPRINT " ??? "

```

76-95打印输出
两个支座反力的
大小、方向

100停机。

110 (1-4) 式
分母为零，停机。

<三>程序举例。

已知 $F = 400$ ，求两个与X轴正方向成 30° 、 -30° 的支
反力 R_1 、 R_2 的大小。

序号	显 示 屏 显 示	键盘操作
1	RUN	RUN
2	How many F ?	1 2
3	Power of F =	400 2
4	Direction of F =	-90 2
5	(打印机打出外力大小、方向)	
6	Direction of R ₁	30 2
7	Direction of R ₂	-30 2
8	打印机打出反力大小、方向	

R	DIRECTION
100	-30
R1	DIRECTION
428.7187879	30
R2	DIRECTION
-371.2812921	-30

~ 3 ~

§1-2 空间汇交力系

空间汇交力系的求解原理与平面汇交力系大致相同。

若已知主动力 $F_1, F_2, \dots, F_n$, 且已知每个力与 z 轴正向夹角为 $D1$, 力在 $x-y$ 平面的投影与 x 轴正向夹角为 $D2$. 则主动力合力在三个坐标轴上的投影分别为:

$$\begin{cases} \sum F_x = \sum F_i \cdot \sin D1_i \cdot \cos D2_i \\ \sum F_y = \sum F_i \cdot \sin D1_i \cdot \sin D2_i \\ \sum F_z = \sum F_i \cdot \cos D1_i \end{cases} \quad (1-5)$$

若前三个支座分别提供三个方向的约束。其中 R_j 与 z 轴夹角为 $A1_j$, R_j 在 $x-y$ 平面上的投影与 x 轴夹角为 $A2_j$. 其平衡方程为:

$$\begin{cases} R_1 \sin A1_1 \cdot \cos A2_1 + R_2 \sin A1_2 \cdot \cos A2_2 + R_3 \sin A1_3 \cdot \cos A2_3 = -\sum F_x \\ R_1 \sin A1_1 \cdot \sin A2_1 + R_2 \sin A1_2 \cdot \sin A2_2 + R_3 \sin A1_3 \cdot \sin A2_3 = -\sum F_y \\ R_1 \cos A1_1 + R_2 \cos A1_2 + R_3 \cos A1_3 = -\sum F_z \end{cases} \quad (1-6)$$

$$\text{则 } R_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\sum F_x & \sin A1_2 \cos A2_2 & \sin A1_3 \cos A2_3 \\ -\sum F_y & \sin A1_2 \sin A2_2 & \sin A1_3 \sin A2_3 \\ -\sum F_z & \cos A1_2 & \cos A1_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin A1_1 \cos A2_1 & \sin A1_2 \cos A2_2 & \sin A1_3 \cos A2_3 \\ \sin A1_1 \sin A2_1 & \sin A1_2 \sin A2_2 & \sin A1_3 \sin A2_3 \\ \cos A1_1 & \cos A1_2 & \cos A1_3 \end{vmatrix}} \quad (1-7)$$

同样可以得到 R_2, R_3 的表达式。

<二>程序说明 程序名: GING-2, 地址: 15-34

源程序

备注

5: TEXT: CLEAR: CSIZE 1

8: COLOR 0

10: INPUT "How many: F?"; N

10读入主动力的个数

~ 4 ~

```

15: LPRINT "F  F-z  F-x "
20: FOR I=1 TO N
25: INPUT "Power of F"; F, "Direction of F-z", D1, "DIRECTION of F-x"; D2
30: FX=FX+F*SIN(D1)*COS(D2)
35: FY=FY+F*SIN(D1)*COS(D2)
40: FZ=FZ+F*COS(D1)
43: LPRINT TAB(0); F; TAB(12); D1; TAB(24); D2
45: NEXT I
46: LPRINT : LPRINT
50: INPUT "Need evaluating? Y or N"; A$
55: IF A$="Y" THEN 70
60: LPRINT "Fx  Fy  Fz "
65: LPRINT TAB(0), -FX, TAB(12); -FY; TAB(24); -FZ; END
70: LPRINT "Dir. (R1-z), Dir. (R1-x)"
75: INPUT "Direction of R1-z", A1, "Direction of R1-x", A2
77: LPRINT TAB(0); A1; TAB(12); A2
80: LPRINT "Dir. (R2-z) Dir. (R2-x)"
85: INPUT "Direction of R2-z", B1, "Direction of R2-x"; B2

```

25依次输入每个主动力的大小、方向角。

30-40根据(1-5)式计算各主动力的投影合力

50 确定是否需求解合力

60 如不需求解则直接打印出三个方向主动力的合力即结束。

70-74输入并打印三个反力

75 输入两个方向角。

```

87: LPRINT TAB(0); B1; TAB(12);
    B2
90: LPRINT "Dir. (R3-z) Dir. (R
    3-x)"
93: INPUT "Direction of R3-z ";
    C1, "Direction of R3-x"; C2
94: LPRINT TAB(0); C1; TAB(12); C2
95: L1 = COS(A1); L2 = COS(A2); L3 =
    COS(B1); L4 = COS(B2); L5 = COS
    (C1); L6 = COS(C2)
100: M1 = SIN(A1); M2 = SIN(A2); M3 =
    SIN(B1); M4 = SIN(B2); M5 = SIN
    (C1); M6 = SIN(C2)
105: X1 = M1 * L2; X2 = M3 * L4; X3 = M5
    * L6
110: Y1 = M1 * M2; Y2 = M3 * M4; Y3 = M5
    * M6
115: M = X1 * Y2 * L5 + Y1 * L3 * X3 + L1 *
    X2 * Y3 - X1 * L3 * Y2 - X2 * Y1 * L5 -
    X3 * Y2 * L1
116: IF ABS(M) < 10E-10 THEN 150
120: R1 = (-FX * Y2 * L5 - FY * L3 * X3 -
    FZ * X2 * Y3 + FX * L3 * Y3 + X2 * FY
    * L5 + X3 * Y2 * FZ) / M
125: R2 = (-X1 * FY * L5 - Y1 * FZ * X3 -
    L1 * FX * Y3 + X1 * Y3 * FZ + FX * Y1 *
    L5 + X3 * FY * L1) / M
130: R3 = (-X1 * Y2 * FZ - Y1 * L3 * FX - L1
    * X2 * FY + X1 * L3 * FY + X2 * Y1 * FZ
    + FX * Y2 * L1) / M

```

95-140行(1-7)

式计算三个变向

力的大小，并打

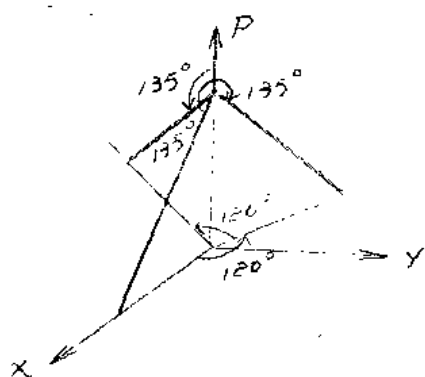
印输出。

```

132: COLOR 3
135: LPRINT " R1 R2 R3 "
140: LPRINT TAB(0); R1; TAB(12);
      R2; TAB(24); R3
145: END
150: LPRINT " ??? "

```

<三>程序举例



三根均匀分布的拉杆，沿Z轴
 夹角都是 135° ，在 $X-Y$ 平面上的
 投影夹角为 120° ，主动力为 100，
 方向沿 Z 轴向上。求三杆的内力大
 小。

序号	显示器显示	键盘输入
1	RUN	RUN
2	How many F ?	1
3	Power of F	100
4	Direction of F-Z	0
5	Direction of F-X	0
6	Need evaluating? Y or N	Y
7	Direction of R1-Z	135
8	Direction of R1-X	0
9	Direction of R2-Z	135
10	Direction of R2-X	120
11	Direction of R3-Z	135
12	Direction of R3-X	240
(打印机打印输出结果)		

~ 7 ~

F	F-Z	F-X	
100	0	0	
Dir. (R1-Z)	Dir. (R1-X)		
135	0		
Dir. (R2-Z)	Dir. (R2-X)		
135	120		
Dir. (R3-Z)	Dir. (R3-X)		
135	240		
R1	R2	R3	
141.4213562	141.4213562	141.4213562	

§ 1-3 平面一般力系

←→ 力学原理:

平面一般力系平衡方程的基本形式是:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0 \quad (1-8)$$

由上述三个方程便可确定平面图形三个约束反力。三个约束反力有三种可能的形式:

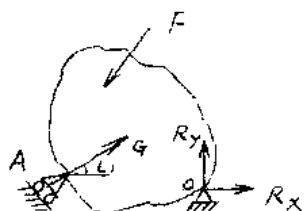
<1> 固端约束, 即某一点同时约束 X、Y 两个方向移动的自由度及绕此点的转动自由度, 其约束反力有 R_x , R_y , M , 由 (1-8) 平衡式知:

$$\begin{cases} R_x = -\sum_{i=1}^n F_{xi} \\ R_y = -\sum_{i=1}^n F_{yi} \\ M = -\sum M_{oi} \end{cases} \quad (1-9)$$

其中 F_{xi} , F_{yi} 和 M_{oi} 分别表示第 i 个主动力在 X, Y 方向的分量以及对约束点取矩值。

<2> 一点为可动铰支, 另一点为不动铰支。

对可动铰支点来说, 只约束了与铰支平面垂直方向的运动,
~ 8 ~



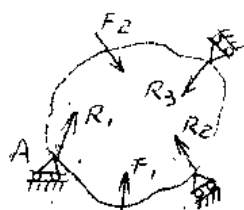
因而也只有这个方向的约束力 G ，而对于不可动铰支点则有 x, y 两个方向的约束力 R_x, R_y 。

由平衡方程：

$$\begin{cases} G \cdot \cos L_1 \cdot x (Y_A - Y_O) + G \cdot \sin L_1 \cdot (X_A - X_O) = -\sum M_O(F_i) \\ R_x = -\sum_{i=1}^n F_{ix} - G \cdot \cos L_1 \\ R_y = -\sum_{i=1}^n F_{iy} - G \cdot \sin L_1 \end{cases} \quad (1-10)$$

从而可以确定 G, R_x, R_y 的值。

(3) 三个可动铰支



当三个约束均为可动铰支时，求三反力 R_1, R_2, R_3 的方向均垂直，对其中一个点取矩平衡得：

$$\sum M_A(F_i) + R_2 \cdot \cos L_2 \cdot (Y_B - Y_A) +$$

$$R_2 \sin L_2 (X_B - X_A) + R_3 \cos L_3 \cdot (Y_C - Y_A) + R_3 \sin L_3 \cdot$$

$$(X_C - X_A) = 0 \quad (1-11)$$

又由合力为0得：

$$R_1 \cdot \cos L_1 + R_2 \cos L_2 + R_3 \cos L_3 = -\sum_{i=1}^n F_{ix} \quad (1-12)$$

$$R_1 \sin L_1 + R_2 \sin L_2 + R_3 \sin L_3 = -\sum_{i=1}^n F_{iy}$$

(1-11)、(1-12) 联立，即可求出 $R_1, R_2,$

R_3 的大小。

<=>程序说明 程序名: GING-3. 地址: 40-63

流 程 序

备 注

```
5: TEXT: CLEAR: COLZE 1
10: WAIT 1: GPRINT "7F7F0808 10-25 输入约
    08080808080000000000000000000000 束类型。
    00000000000000000000000000000000 40605048
    44424142";
15: WAIT 1: GPRINT "44485000
    40000000000000000000000000000000 43314947000
    00000000000000000000000000000000 12264283000
    0000";
20: WAIT 100: GPRINT "6341494D
    4B51";
25: INPUT "What is fix?"; E
30: INPUT "Coordinate X(fix1)"; X1, 30-190 对于不
    "Coordinate Y(fix1)"; Y1 同类型约束输入
35: IF E < 3 THEN 45 约束地址及约束
40: INPUT "Direction of fix"; L1 方向。
45: IF E = 1 THEN 100
50: INPUT "Coordinate X(fix2)"; X2
    "Coordinate Y(fix2)"; Y2
60: INPUT "Direction of fix"; L2
70: IF E = 2 THEN 100
80: INPUT "Coordinate X(fix3)"; X3
    "Coordinate Y(fix3)"; Y3
90: INPUT "Direction of fix3"; L3
100: INPUT "How many F?"; N 100 输入主动力
110: FOR I = 1 TO N 个数
120: INPUT "Coordinate X(G)"; X, 120-130 输入各
    "Coordinate Y(G)"; Y 主动力的大小
~10~
```

130: INPUT "POWER OF F=" ; F, "DIR	方向、作用点。
ECTION OF F" ; A	
135: FC=F * COS (A); FS=F * SIN (A)	135-145求主动
140: FX=FX+FC; FY=FY+FS	力合力在 X、Y
145: M=M+FC * (X-X1)+FS * (Y-Y1)	方向的投影之和
	以及对另一约束
	点取矩之和。
150: NEXT I	
155: COLOR 3	
160: IF E < > 1 THEN 200	
170: LPRINT "RX RY M"	170-180对于第
180: LPRINT TAB (0); -FX; TAB (12);	一类约束打印输
-FY; TAB (24); -M	出约束反力 F_x ,
	F_y , M 。
190: END	
200: C2=COS (L2); S2=SIN (L2)	200-260对于第
210: IF E=3 THEN 270	二类约束计算并
220: G=-M/((Y2-Y1) * C2+(X2-X1)	打印输出约束反
* S2)	力 R_x , R_y 和
230: RX=-G * C2-FX; RY=-G * S2-FY	G。
240: LPRINT "R-X R-Y G"	
250: LPRINT TAB (0); RX; TAB (12);	
RY; TAB (24); G	
260: END	
270: C1=COS (L1); C3=COS (L3); S1=	270-340对于第
SIN (L1); S3=SIN (L3)	三类约束, 并求
280: Z2=C2 * (Y2-Y1)+S2 * (X2-X1)	并打印约束反力
: Z3=C3 * (Y3-Y1)+S3 * (X3-X1)	R_1 , R_2 , R_3
290: M1=C1 * S2 * Z3+S1 * Z2 * C3-C1 *	
Z2 * S3-S1 * C2 * Z3	

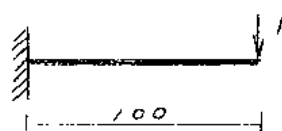
```

300: R1 = (-FX * S2 * Z3 - FY * Z2 * C3 -
          M1 * C2 * S3 + M * S2 * C3 + FX * Z2 *
          S3 + C2 * FY * Z3) / M1
310: R2 = (-C1 * FY * Z3 - S1 * M * C3 + S3
          * M * C1 + Z3 * FX * S1) / M1
320: R3 = (-C1 * S2 * M - S1 * Z2 * FX + FY
          * Z2 * C1 + M * S1 * C2) / M1
330: LPRINT " R1  R2  R3 "
340: LPRINT TAB(0); R1; TAB(12);
      R2; TAB(24); R3
350: END

```

<三>应用举例。

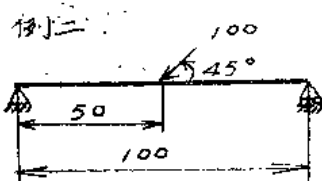
例一： 一悬臂梁，外端作用一单位力，长为100，



求约束反力。

序号	显示屏显示	键盘操作
1.		RUN 2
2	—1 Δ2 命 3	
3	what is fix ?	1 2
4	Coordinate X (fix 1)	0 2
5	Coordinate Y (fix 1)	0 2
6	How many F ?	1 2
7	P... 1... 4... X...	100 2
8	Coordinate Y (4)	0 2
9	POWER OF F =	-1 2
10	DIRECTION OF F	90 2
11	(打印输出固端的约束反力)	

Rx	Ry	M
0	1	0

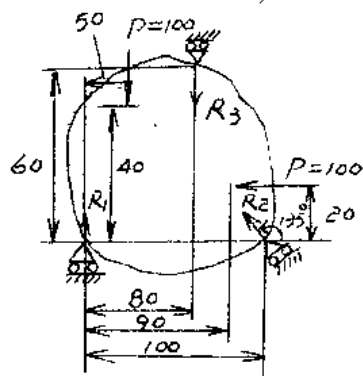


如图，一简支梁作用一斜向的力，求支座反力。

序号	显示屏显示	键盘操作
1		RUN ↵
2	— 1, Δ 2 △ 3	
3	what is fix ?	2 ↵
4	Coordinate X (fix 1)	0 ↵
5	Coordinate Y (fix -2)	0 ↵
6	Coordinate X (fix 2)	100 ↵
7	Coordinate Y (fix 2)	0 ↵
8	Direction of fix	90 ↵
9	How many F?	1 ↵
10	Coordinate X (G)	50 ↵
11	Coordinate Y (G)	0 ↵
12	POWER OF F =	-100
13	DIRECTION OF F	45 ↵
14	(打印输出两支座反力大小)	

R-X	R-Y	G
70.71067012	35.35533906	35.35533906

例三



如图，求三个可动铰支座的约束反力。

~13~