彭高华　王国丽　编

弹性力学基础

石 油 工 业 出 版 社

前　言

本书是为高等学校工程专业编写的弹性力学教材。

本书编写过程中，我们注意了抽象思维与物理概念结合，以及与先修课程的衔接；既注意避免繁琐的力学推导，又注意由浅入深，由易到难，循序渐近，便于自学的原则。为使学生巩固所学内容，本书在各章末尾均附有习题，并在有关章节中结合机械及土建专业列举了实例。

本书的第一章至第五章，第九章，第十章由彭高华教授编写；第六章至第八章，第十一章由王国丽副教授编写。全书经陈抡元教授主审，提出了不少修改意见。在本书编写过程中曾得到大庆石油学院力学教研室、化机教研室等单位的大力支持和协助，特此表示衷心的感谢。

限于编者的水平，书中一定存在不少缺点和欠妥之处，敬请读者提出批评和指正。

编者　于大庆石油学院

1992 年 6 月

目　　录

第一章 绪　　论

§1—1 弹性力学的任务及其与专业的关系

弹性力学的基本任务是研究弹性体由于外部因素（外力或温度改变等）的作用而发生的应力、应变和位移的规律，为工程结构和机械零件的设计提供理论基础。

弹性力学与材料力学的任务基本相同，但弹性力学研究的对象比材料力学更为广泛。材料力学的研究对象基本上是杆件，而弹性力学的研究对象包括杆、板、壳、块体以及由它们所组成的结构，如石油化工设备中的塔、罐，石油钻机中的板块式自升式底座，土建中的挡土墙、基础和地基等。

弹性力学和材料力学都研究杆件，但研究方法却不完全相同，因而得到的结果，也有所不同。材料力学在研究梁的弯曲问题时，假设变形前的平面截面变形后仍为平面，得出正应力沿梁高度按直线规律变化。在弹性力学中不再用平面截面假设的分析表明：只有当梁横截面尺寸远小于跨度的情况下，梁的正应力才沿其高度按直线规律变化。如果梁的高度与跨度是同阶的，应力并不按直线规律变化。又如，材料力学中讨论带孔的拉杆时，通常假设拉应力在净截面上均匀分布。在弹性力学中就不需作这个假设，得出的结论是带孔杆件的拉应力在净截面上不是均匀分布的，在孔边将发生应力集中，最大拉应力比平均应力高出几倍。

用弹性力学经典解法解决实际问题的主要困难在于解偏微分方程的复杂性。因此人们早就寻求各种近似解法，直到近二十年来发展起来的有限单元法，把连续弹性体划分成有限个有限大小的单元构件，利用结构力学的位移法、力法或混合法求解，更加显示出弹性力学和结构力学综合应用的良好效果。

计算技术和设计程序的现代化，为用弹性力学解决工程中的问题开辟了更为广阔的前景。

§1—2 基本假设

实际物体的力学性质是多方面的，从不同角度研究问题，侧重面就不一样。研究物体在外加因素（外力，温度变化等）的作用下，而发生应力、应变和位移的规律时，常根据与其有关的一些主要因素，忽略一些关系不大的次要因素，对物体作某些假设，把它抽象成理想模型。弹性力学的基本假设如下：

1. 连续性假设　认为组成物体的整个空间由这个物体的连续介质所组成。这样，物体内的应力、应变、位移等物理量是连续的，可以用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。就物质构造而言，组成物体的各个粒子之间实际上并不连续，但它们之间所存在的空隙与物体的尺寸相比极其微小，故可以忽略不计。

2. 完全弹性假设　认为物体在外加因素（外力，温度变化等）作用下引起的变形，在外

加因素撤除后，物体立即恢复原来形状而没有任何残留变形，同时认为物体服从虎克定律——应力与应变成正比。

3. 均匀性假设　认为物体内部各点的力学性质完全相同。这样，物体的弹性常数（弹性模量，泊松系数等）就不随位置坐标的变化而变化，就可以取出该物体任意一小部分来加以分析研究，然后将其结果应用于整个物体。

4. 各向同性假设　认为物体内部各点的力学性质在所有各个方向都相同。这样，物体的弹性常数就不随方向的变化而变化。对大多数的金属和稳定的沉积岩（如砂岩，页岩和灰岩等），虽然它们含有各向异性的晶粒，但由于这些晶粒的尺寸与物体的尺寸相比极其微小，而且是随机排列的，所以可认为它们是各向同性的。对于木材和竹材等物体，在顺纹与横纹方向有不同的力学性质，就不能把它们当作各向同性物体。

凡是符合以上四个假设的物体，就称为理想弹性体。

5. 小变形假设　认为物体在外加因素作用下，物体变形产生的位移与物体尺寸相比极其微小。这样，在建立物体变形后的平衡方程时，就可以用变形前的尺寸代替变形后的尺寸，而不致引起显著的误差，并且微分方程将是线性的。

6. 无初应力假设　认为物体在外加因素作用前内部无初应力，也就是说由弹性力学所求得的应力仅仅是由于外加因素引起的。若物体中有初应力存在，则由弹性力学所求得的应力加上初应力才是物体中的实际应力。

根据上述假设所建立起来的弹性力学，称为线性弹性力学，也就是本书所要阐述的内容。

§1—3　几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、内力、应力、应变和位移等。

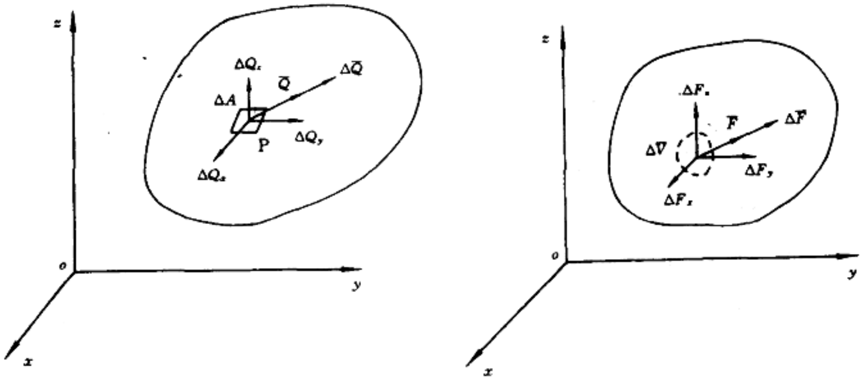
作用在物体上的力可以分为外力与内力。

外力是指其它物体作用在研究对象上的力。按其作用的方式，外力又可分为表面力和体积力。表面力是作用于物体表面上的力，它又可分为分布力和集中力。分布力是连续作用于物体表面面积上的力，例如作用于水坝上的水压力、作用于结构物上的风压力等。物体表面上所受的力不一定是均匀分布的。为了描述物体表面各点受力大小的程度，用到集度的概念。例如，要描述物体表面上某一点P所受面力的大小和方向。在物体表面上取含P点的微面积ΔA（图1—1a），设作用于ΔA的面力为ΔQ，则面力的平均集度为$\Delta Q/\Delta A$，令ΔA无限减小而趋于P点，若面力连续分布，则$\Delta Q/\Delta A$将趋于一定的极限$\overline{Q}$，即

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\overline{Q}}{\Delta A}=\overline{Q}$$

这个极限矢量$\overline{Q}$就是该物体在P点所受面力的集度。因为ΔA是标量，所以$\overline{Q}$的方向就是$\Delta\overline{Q}$的极限方向。$\overline{Q}$在坐标轴上的三个分量为Q_X，Q_Y，Q_Z，并规定指向坐标轴正向为正，反之为负。面力的因次为〔力〕〔长度〕$^{-2}$。

体积力是连续分布于物体内部各点上的力，　例如物体自重、由于加速度而引起的惯性力等。物体内各点受体力的情况，一般是不相同的。为了描述物体内各点受力的程度，仍用集度的概念。例如要描述物体内某一点P所受体力的大小和方向。在物体内取含P点的微体积ΔV（图1—1b），设作用于ΔV的体力为ΔF，则体力的平均集度为$\Delta F/\Delta V$，令ΔV无限减



(a) (b)

图 1－1

小而趋于 P 点，若体力连续分布，则 $\Delta\overline{F}/\Delta V$ 将趋于一定的极限 $\overline{F}$，即

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\overline{F}}{\Delta V}=\overline{F}$$

这个极限矢量 $\overline{F}$，就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是标量，所以 $\overline{F}$ 的方向就是 $\Delta\overline{F}$ 的极限方向，$\overline{F}$ 在坐标轴 x，y，z 上的投影 X，Y，Z，称为该物体在 P 点的体力分量，并规定指向坐标轴正向为正，反之为负。体力的因次为〔力〕〔长度〕$^{-3}$。

物体受外力以后，其内部相互作用力发生改变，此改变量称为内力。为了显示并确定在外力作用下物体上某点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 m－m 把该物体切分为 M_1 和 M_1 两部分（图 1－2）。任取其中一部分，例如 M_1 作为研究对象。在部分 M_1 上作用有外力 $\overline{F}_1$、$\overline{F}_2$，欲使部分 M_1 保持平衡，则部分 M_1 必然有内力作用于部分 M_1 的 m－m 截面上，以便与部分 M_1 所受的外力平衡。取包含 P 点截面m－m的一小部分面积 ΔA。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔT，则内力的平均集度，即平均应力为$\Delta T/\Delta A$，令 ΔA 无限减小而趋于 P 点，若内力连续分布，则 $\Delta T/\Delta A$ 将趋于一定极限 s，即

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta A}=s$$

这个极限矢量 s 就是该物体在截面 m－m 上的，在 P 点的总应力。因为 ΔA 是标量，所以总应力 s 的方向就是 ΔT 的极限方向。通常把总应力 s 分解为沿截面 m－m 的法线方向的应力，叫正应力，记作 σ；沿截面 m－m 切线方向的应力叫剪应力，记作 τ（图 1－2）。总应力及其分量的因次是〔力〕〔长度〕$^{-2}$。

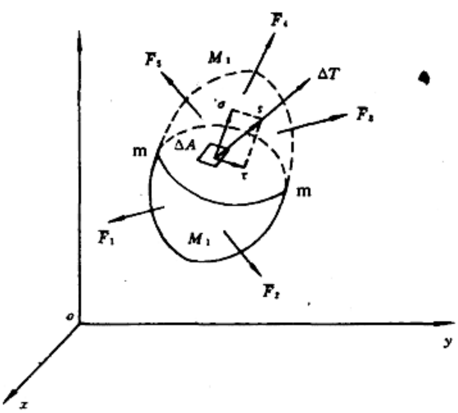


图 1－2

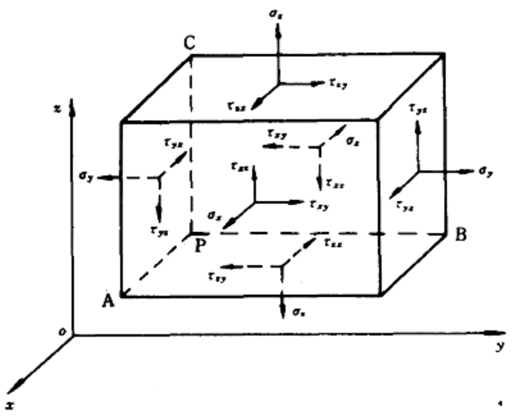


图 1－3

应力不但与点的位置有关，而且还与截面的方位有关。为了描述受力物体内某一点处的应力状态，一般都从物体内过这一点取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴，而其长度为 PA＝dx，PB＝dy，PC＝dz（图 1－3）。将此平行六面体每个面上的总应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行。为了表明应力分量的作用面与作用方向，采用下列符号：正应力加上一个坐标角码。例如 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上，同时也是沿着 x 轴方向作用的。剪应力加上两个坐标角码，前一个角码表示作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表示作用方向沿哪一个坐标轴。例如 τ_{xy}是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向的。为了规定应力分量的正负号，认为图 1－3 的平行六面体上的外法线沿坐标轴正向的截面为正面，反之则称为负面。正面上的应力分量同坐标轴正向一致（负面上的应力分量同坐标轴负向一致）的为正，反之为负。图 1－3 所示的应力分量全部都是正的。

可以证明，六个剪应力分量之间有一定的互等关系，即

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}, \qquad \tau_{yz}=\tau_{zy}, \qquad \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

以后可见，在物体中的任意一点，如果已知该点的 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面的正应力和剪应力。因此，这六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

物体受外部因素作用时，其每个质点将发生位移，此位移在 x、y、z 三个方向的投影，分别用 u、v、w 表示，称为位移分量，其因次为〔长度〕。

一个物体的整体变形可能是很复杂的，但就其中的每个微小的单元体而言，无非是两类变形，即棱边（图 1－3 中的 PA、PB、PC）的改变以及它们之间的夹角的改变。棱边的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩称为正应变；棱边之间的夹角的改变（用弧度表示），称为剪应变。正应变用 ε 表示：ε_x 表示 x 方向的棱边 PA 的正应变，余类推。正应变以伸长时为正，缩短时为负。剪应变用 γ 表示：γ_{yz}表示 y 与 z 两方向的棱边（即 PB 与 PC）之间的夹角改变，余类推。剪应变以夹角减小为正，反之为负。

以后可见，在物体的任意一点，若已知 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}这六个应变，就可以求得该点的任一线段的正应变，也可以求得该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此，这六个应变分量可以完全确定该点的应变状态。

一般而言，受力弹性体内任意一点处的面力分量、体力分量、应力分量、位移分量和应变分量都随点的位置而改变，因而它们都是点的坐标的函数。

第二章　平面问题的基本理论

在实际问题中，任何一个弹性体都是空间物体，它所受的外力一般都是空间力系。因此，弹性力学问题本质上都是空间问题。但是当研究的弹性体的形状和受力情况具有一定的特点时，就可以把空间问题简化成平面问题，从而大大减少分析和计算工作量。本章将导出平面问题的基本方程和定解条件。

§2—1　广义平面应力问题和平面应变问题

平面问题包括平面应力问题和平面应变问题。

如果面力平行地作用于等厚度薄板，且不沿厚度变化，体力也平行于板面且不沿厚度变化（图 2—1），则可认为板中应力沿厚度不可能有较大的变化。这时，任一点 P（x，y，z）处

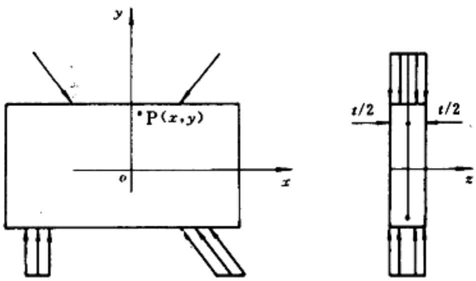


图 2—1

的应力与坐标 z 无关，而只是 x、y 的函数。如薄板两侧面为自由面，则可假定薄板中各点均存在

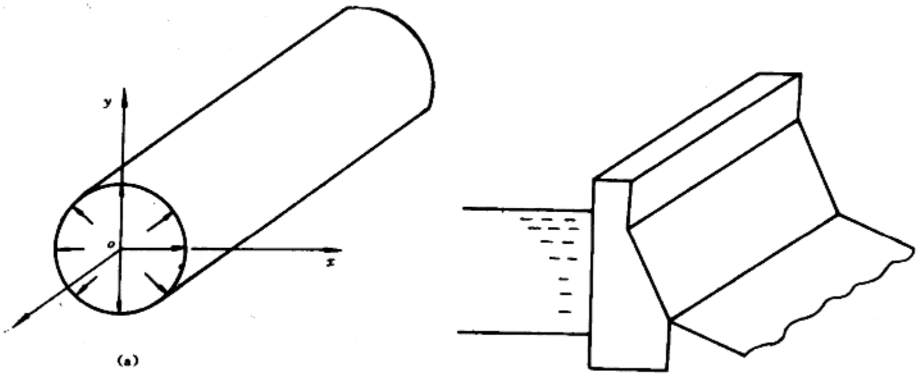
$$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$$

这样，待定的应力分量只剩下同一平面内的 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}，这就是平面应力问题。

如果作用在板周边的面力沿厚度方向不是均匀分布的，而是与中面成对称分布，这时不能认为应力只是 x、y 的函数。但考虑到应力对板中面的对称性，同时板面不受力，这些垂直板中面方向的应力分量沿厚度合力必等于零。对于这类问题，如果我们不去寻求应力和变形的精确解，而只需求出它们沿厚度的平均值，则仍然可以看成平面应力问题。显然，板越薄，平均值越接近于精确值。按照这种方法处理的问题称为“广义平面应力问题”。

平面应变问题为很长的柱形体，例如锅炉汽包、高压管道、化工反应塔（图 2—2a），拦水坝、挡土墙（图 2—2b）等，在柱面上承受平行于横截面且不沿轴线方向变化的面力，体力

也平行于横截面而不沿轴线方向变化。如果假想用相邻的横截面把柱体切成许多薄片，则可以认为：每个薄片所受的外力以及由它引起的应力和变形都相同。应力分量、应变分量、位移分量只是 x、y 的函数。特别是两端固定的柱体，则可以认为柱体内每点都没有轴向位移，从而 σ_z 一般不为零。这样，每个横截面的变形都只发生在本身平面内，这类问题称为平面应变问题。如果柱体两端可以自由伸缩，或承受相等相反的轴向分布载荷，则可以认为变形过程中每个横截面仍然保持为平面，但位置可能发生变化，这类问题称为广义平面应变问题。



(a) (b)

图 2－2

§2－2 平衡微分方程

在弹性力学中，分析问题必须以静力、几何、物理等三方面考虑。现根据平面问题的静力条件，导出应力分量与体力分量之间的关系式，即平面问题的平衡微分方程。

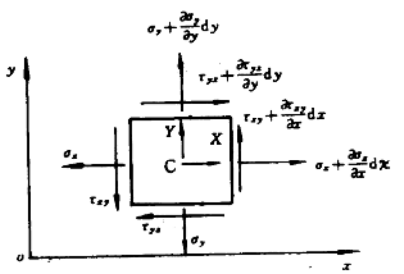


图 2－3

从平面问题的物体中，取一单位厚度的平行微小六面体（图 2－3），它在 x 和 y 方向的尺寸分别为 dx、dy。根据应力分量是位置坐标 x、y 的函数，左面的正应力为 σ_x，按泰勒级数展开，且忽略二阶以上微量得右面的正应力为 $\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$。同样，若左面的剪应力为 τ_{xy}，右面的剪应力则为 $\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$。下面的正应力和剪应力分别为 σ_y、τ_{yx}，则上面的正应力和剪应力分别为 $\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$ 和 $\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$。微六面体所受体力，可认为均匀分布，且作用在它的体积中心。

由微六面体的力平衡条件，$\Sigma F_x=0$，得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy\times1-\sigma_x dy\times1+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\right)dx\times1-\tau_{yx}dx\times1+Xdxdy\times1=0$$

化简后，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0\end{aligned}\right\}\qquad(2-1)$$

由 $\Sigma F_y=0$，得

这两个微分方程中包含三个未知函数 σ_x，σ_y，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，因此决定应力分量的问题是超静定的。

还可以由通过中心 C 并平行于 z 轴的直线为矩轴，列出力矩平衡方程证明剪应力的互等性：$\tau_{xy}=\tau_{yx}$。

对于平面应变问题，在图 2－2 所示的六面体上，通常还有作用于前后两面的正应力 σ_z，但由于它们自成平衡，完全不影响方程（2－1），所以它同样适用于两种平面问题。

§2－3　几何方程——位移与应变的关系

现考虑几何方面，导出平面问题的应变与位移间的关系式，称为几何方程。

从平面问题的弹性体内任一点 P 取单元体。图 2－4 中的 Pabc 是单元体变形前在 xoy 坐标面内的投影，P′a′b′c′ 是单元体在变形后的投影。P、a、b 三点的坐标分别为 $P(x,y)$、$a(x+dx,y)$、$b(x,y+dy)$。而 P′、a′、b′ 三点的坐标分别为 $P'[x+u(x,y),y+v(x,y)]$、$a'[x+dx+u(x+dx,y),y+v(x+dx,y)]$、$b'[x+u(x,y+dy),y+dy+v(x,y+dy)]$。因为位移是坐标的连续函数，P 点的位移在 x、y 轴方向的分量分别为 $u(x,y)$、$v(x,y)$，而 a 点、b 点的位移分量为：

$$a\text{ 点}: u(x+dx,y),\ v(x+dx,y)$$

$$b\text{ 点}: u(x,y+dy),\ v(x,y+dy)$$

a、b 两点位移分量按泰勒级数展开，并利用小变形假设，略去二级以上微量，则得展开后的 a 点、b 点的位移分量为

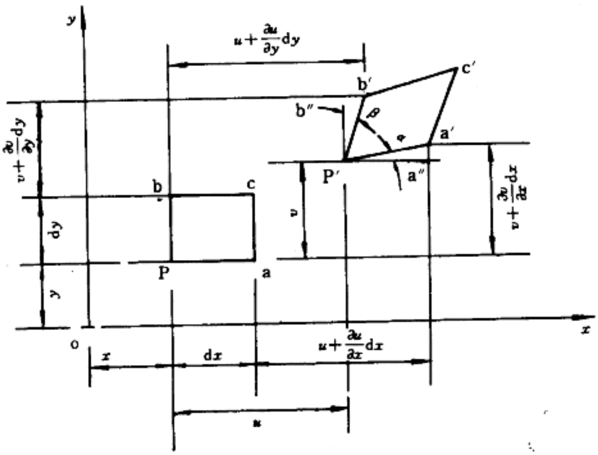


图 2－4

$$\text{a 点：}u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x,\qquad v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$\text{b 点：}u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,\qquad v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$$

根据线应变的定义，P 点在 x 和 y 方向的线应变 ε_x、ε_y 分别为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\mathrm{P'a'-Pa}}{\mathrm{Pa}}\approx\frac{\mathrm{P'a''-Pa}}{\mathrm{Pa}}=\frac{\left(\mathrm{d}x+u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x-u\right)-\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x},\\ \varepsilon_y&=\frac{\mathrm{P'b'-Pb}}{\mathrm{Pb}}\approx\frac{\mathrm{P'b''-Pb}}{\mathrm{Pb}}=\frac{\left(\mathrm{d}y+v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y-v\right)-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial v}{\partial y}。\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

以 α 表示由 P 点指向 x 轴正向的线素 Pa 向 y 轴正向转过的角度，而 β 则表示由 P 点指向 y 轴正向的线素 Pb 向 x 轴正向转过的角度(图 2－4)。根据剪应变定义，P 点在 x 和 y 轴方向的剪应变为

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\alpha+\beta\tag{b}$$

由图 2－4 中的直角三角形 a′a″P′可得

$$\alpha\approx\frac{\mathrm{a'a''}}{\mathrm{P'a''}}=\frac{v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x-v}{\mathrm{d}x+u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x-u}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x}\approx\frac{\partial v}{\partial x}\tag{c}$$

因为小变形时，$\frac{\partial u}{\partial x}$与 1 相比是一微量，故可以略去不计。

类似亦可推得

$$\beta=\frac{\partial u}{\partial y}。\tag{d}$$

将式（c）和（d）代入（b），得

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}。\tag{e}$$

综合式（a）、(e）可得平面问题的应变与位移分量间的关系式——几何方程

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{2-2}$$

由几何方程（2－2）可见，已知一点位移分量之后，很容易求出一点的应变分量。反之，已知一点的应变分量，求该点的位移分量时，则要解微分方程，就要给出相应的边界条件，问题就比较复杂了。另外，当物体的位移分量完全确定时，应变分量亦完全确定。反之，当应变分量完全确定时，位移分量却不能完全确定。为了说明后一点，试令应变分量等于零，即

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=0 \tag{f}$$

而求出相应的位移分量。

将式（f）代入几何方程（2—2），得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{g}$$

将前两式分别对 x 和 y 积分，得

$$u=f_1(y),\quad v=f_2(x) \tag{h}$$

其中 f_1 及 f_2 为任意函数。代入（g）中第 3 式，得

$$-\frac{\mathrm{d}f_1(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}f_2(x)}{\mathrm{d}x}$$

这一方程左边是 y 的函数，右边是 x 的函数，就只能是两边都等于同一常数 ω，于是得

$$\frac{\mathrm{d}f_1(y)}{\mathrm{d}y}=-\omega,\quad \frac{\mathrm{d}f_2(x)}{\mathrm{d}x}=\omega$$

积分以后，得

$$f_1(y)=u_0-\omega y,\quad f_2(x)=v_0+\omega x \tag{i}$$

其中的 u_0 和 v_0 为任意常数。将式（i）代入式（h），得位移分量

$$u=u_0-\omega y,\quad v=v_0+\omega x \tag{2—3}$$

式（2—3）所示的位移，是“应变为零”时的位移，也就是所谓“与应变无关的位移”，因此必然是刚体位移。实际上，u_0 及 v_0 分别为物体沿 x 轴及 y 轴方向的刚体位移，而 ω 为物体绕 z 轴的刚体转动。下面根据平面运动的原理加以证明。

当三个常数中只有 u_0 不为零时，由式（2—3）可见，物体中任意点的位移分量为 $u=u_0$，$v=0$。这就是说，物体的所有各点只沿 x 方向移动同样距离 u_0。由此可知，u_0 代表沿 x 方向的刚体平移。同样可知，v_0 代表物体沿 y 方向的刚体平移。当只有 ω 不为零时，由式（2—3）可见，物体中任一点的位移分量为 $u=-\omega y$，$v=\omega x$。据此，坐标为 $(x,\ y)$ 的任意一点 P 沿着 y 方向移动 ωx，并沿着负 x 方向移动 ωy（图 2—5），而合成位移为

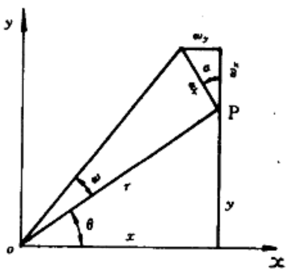


图 2—5

$$\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{(-\omega y)^2+(\omega x)^2}=\omega\sqrt{x^2+y^2}=\omega r$$

其中 r 为 P 点至 z 轴的距离。令合成位移的方向与 y 轴的夹角为 α，则

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\omega y}{\omega x}=\frac{y}{x}=\mathrm{tg}\theta$$

可见合成位移的方向与径向线段 oP 垂直，也就是沿着切向。既然物体的所有各点移动的方向

都沿着切向，而且移动的距离等于径向位移 r 乘以 ω，可见（注意：位移是微小的）ω 代表物体绕 z 轴的刚体转动。

既然物体在应变为零时，可以有刚体位移，那么物体发生一定的应变时，由于约束条件的不同，就可能具有不同的刚体位移，因而它的位移并不是完全确定的。在平面问题中，常数 u_0、v_0、ω 的任意性就反映位移的不确定性，而为了完全确定位移，就必须有三个适当的约束条件来确定这三个常数。

§2—4 物理方程——应力与应变的关系

对于各向同性的线弹性体，表示应变与应力之间关系的广义虎克定律，在《材料力学》中已经熟悉了，其表达式为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu\left(\sigma_z+\sigma_x\right)\right]\\
\varepsilon_z&=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]\\
\gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy},\quad \gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz},\quad \gamma_{zx}=\frac{1}{G}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\}\tag{2—4}$$

式中的 E 是拉、压弹性模量，简称弹性模量；G 是剪切弹性模量；μ 是波松比，即横向变形系数。在《材料力学》中已经证明，这三个弹性常数之间的关系为

$$G=\frac{E}{2\left(1+\mu\right)}\tag{2—5}$$

在平面应力问题中，$\sigma_z=0$，删去式（2—4）中第 1 式和第 2 式中的 σ_z，且用式（2—5）代入式（2—4）的第 4 式，得

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\mu\sigma_y\right)\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\mu\sigma_x\right)\\
\gamma_{xy}&=\frac{2\left(1+\mu\right)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}\tag{2—6}$$

这就是平面应力问题中的物理方程。此外，式（2—4）中的第 3 式成为

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)$$

可以用来求薄板厚度的改变，又由式（2—4）中第 5 式和第 6 式可见，因为在平面应力问题中有 $\tau_{yz}=0$ 和 $\tau_{zx}=0$，所以有 $\gamma_{yz}=0$，$\gamma_{zx}=0$。

在平面应变问题中，由于物体的所有各点都不沿 z 方向移动，即 $w=0$，所以 z 方向的线段都没有伸缩，即 $\varepsilon_z=0$。于是由式（2—4）中第 3 式得

$$\sigma_z=\mu\ (\sigma_x+\sigma_y)$$

代入式（2—4）中第 1 式及第 2 式，并注意第 4 式仍然适用，得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right)\\\varepsilon_y&=\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right)\\\gamma_{xy}&=\frac{2\ (1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{2—7}$$

这就是平面应变问题的物理方程。因为在平面应变问题中存在 $\tau_{yz}=0$，$\tau_{zx}=0$，所以也有 $\gamma_{yz}=0$，$\gamma_{zx}=0$。

从式（2—6）和（2—7）可见，两种平面问题的物理方程是不相同的。但若将平面应力问题的物理方程（2—6）中的 E 用 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 替换，μ 用 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 替换，就得到平面应变的物理方程（2—7），其中的第 3 式也不例外。

§2—5　边 界 条 件

弹性力学的边界条件分为应力边界条件、位移边界条件及混合边界条件。

在应力边界问题中，已知物体在全部边界上所受面力分量 X_s、Y_s。根据应力状态的概念可以把面力已知条件转换成应力已知条件，这就是所谓的应力边界条件。导出如下：取如图 2—6 所示的三角板。用 N 代表界面 AB 外法线方向，并令 N 的方向余弦为

$$\cos\ (N,\ x)\ =l$$

$$\cos\ (N,\ y)\ =m$$

设边界面 AB 的长度为 $\mathrm{d}S$，则截面 PA 及 PB 的长度分别为 $l\mathrm{d}S$ 及 $m\mathrm{d}S$。垂直于图形平面的尺寸仍然取为一个单位。

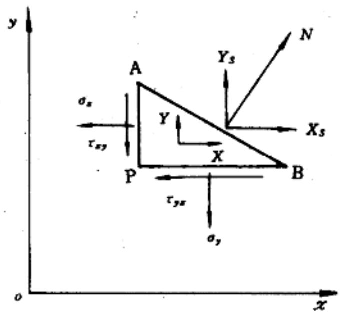


图 2—6

由平衡条件 $\Sigma F_x=0$，得

$$X_s\mathrm{d}s\times1-\sigma_x l\mathrm{d}s\times1-\tau_{yx}m\mathrm{d}s\times1+X\,\frac{l\mathrm{d}s m\mathrm{d}s}{2}\times1=0$$

除以 $\mathrm{d}s$ 以后，令 $\mathrm{d}s$ 趋于零，得

$$l\sigma_x+m\tau_{yx}=X_s$$

再由平衡条件 $\Sigma F_y=0$，导出一个与此相似的方程。于是得出物体边界上各点的应力分量与面

力分量之间的关系式

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x+m\tau_{yx}=X_s \\ l\tau_{xy}+m\sigma_y=Y_s \end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

这就是平面问题的应力边界条件。

在位移边界问题中，已知物体在全部边界上的位移分量，即

$$\left.\begin{aligned} u_s=\bar{u} \\ v_s=\bar{v} \end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

式中的 u_s 和 v_s 是位移的边界值，是待求的；而 $\bar{u}$、$\bar{v}$ 是边界上的坐标 x、y 的函数，是已知的。

在混合边界问题中分两种情况，一是整个边界分为两部分：一部分边界上面力已知，另一部分边界上位移已知，这时各部分边界相应地用前面研究的应力边界条件式（2－8）和位移边界条件式（2－9）。另一种情况是同一部分边界上已知部分位移和部分面力，即给定位移与面力混合边界条件。

§2－6　用应力表示的相容方程

在弹性力学里求解问题，根据所选基本未知量不同，可分为按应力求解，按位移求解和混合求解等三种基本方法。按应力求解时，以应力分量为基本未知函数，由一些只包含应力分量的微分方程和边界条件求出应力分量以后，用物理方程求出应变分量，再用几何方程求出位移分量。按位移求解时，以位移分量为基本未知函数，由一些只包含位移分量的微分方程和边界条件求出位移分量以后，用几何方程求出应变分量，再用物理方程求出应力分量。在混合求解时，同时以某些应力分量和位移分量为基本函数，由一些只包含这些基本未知函数的微分方程和边界条件求出这些基本未知函数以后，再用适当的方程求出其它的未知函数。

现在来导出按应力求解平面问题时所需用的微分方程。平衡微分方程（2－1）本来就不包含应变分量和位移分量，应当保留。于是，只需从三个几何方程中消去位移分量，得出三个应变分量之间的关系式，再将三个物理方程代入这个关系式，使它只包含应力分量。

先将几何方程（2－2）中 ϵ_x 对 y 的二阶导数和 ϵ_y 对 x 的二阶导数相加，得

$$\frac{\partial^2\epsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\epsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

将几何方程（2－2）中的第 3 式代入，得

$$\frac{\partial^2\epsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\epsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{2-10}$$

这个关系式称为应变协调方程或相容方程。应变分量 ϵ_x、ϵ_y、γ_{xy}必须满足这个方程，才能保证位移分量的单值、连续，否则由三个几何方程中的任何两个求出的位移分量，将与第 3 个几何方程不能相容，变形以后的物体不再是连续的，而将发生某些部分互相脱离或互相嵌入的情况。

现将物理方程代入相容方程消去应变分量，使相容方程中只包含应力分量（基本未知函