新题在线

XINTI ZAIXIAN

初中数学新题

总主编：张奠宙　国家高中数学课程标准研制组组长
欧亚科学院院士
华东师范大学数学系教授
阎金铎　中国教育学会物理教学专业委员会理事长
全国中小学教材审查委员会物理教材审查委员
北京师范大学教育科学研究所教授
吴国庆　全国中学化学竞赛指导小组组长
北京师范大学化学系教授
主　编：马岷兴　李世强

课标精神的新体现
中高考题的新走向
中学新题的新解法

NEW

广西教育出版社

序 言

《新题在线》数学部分终于完稿了，很觉欣慰. 一年前，广西教育出版社的黄力平副总编来沪访问，谈起数学教育出版物的选题，我建议编新问题集. 理由很简单：数学问题是数学教学改革的风向标.

各个时代都有自己的数学问题. 中国古代数学的经典著作《九章算术》，是246个数学问题的集锦，内容涉及土地丈量，劳役分配，运输安排，以及距离、面积、体积的计算等，大多和政府的管理有关. 这是典型的“数学问题”解决的模式. 它崇尚实用和计算，讲究“如何 (How)”解决实际问题.

古希腊的数学问题则以抽象的公理化的几何体系为特征，闪耀着人类理性思维的光芒. 欧几里得的《几何原本》采用“公理—定义—定理—证明”的模式，崇尚演绎推理，讲究“为什么 (Why)”要这样做. 诸如“对顶角相等”、“等腰三角形底角相等”等直观的命题，都需要证明. 著名的“用圆规、直尺三等分任意角”问题和实际应用没有什么关系，但是，它的科学价值却是不朽的.

牛顿时代的数学问题，以处理无穷小量为特征. 他用独创的微积分方法，处理了大量的实际问题，包括极大极小、变力做功、酒桶体积等一系列理论和实际并重的数学问题. 他们大踏步前进，而暂时不管理论是否严谨. 博大精深的微积分思想体系，紧密联系科学实践的数学问题，为工业革命开辟了道路.

19世纪的数学问题呈现严密化的趋势. 群论、非欧几何、复数、微积分的严密化，构成了数学的新篇章. 数学家以追求数学

的纯粹、抽象、形式化为时尚. 一切数学问题都在沿着“绝对严格”的道路前进. 这一趋势一直延续到20世纪上半叶.

第二次世界大战把所有的数学家，无论是纯粹的、应用的，都引向为战争服务的道路. 密码破译用数论方法，喷气式飞机用偏微分方程计算，运筹学诞生在战场，火炮自动控制为控制论催生. 更为重要的是，电子计算机开辟了人类的信息时代，再次使数学走进实际应用的广阔天地，影响社会生活的方方面面. 以发表论文为目标的数学家渐成少数，多数的数学家将在各行各业用数学技术进行服务. 联系科学和生产实践的数学问题再次成为时代的特征.

但是，应当看到，纯粹数学和应用数学的问题在任何时候都是互相交织在一起的. 纯粹数学有意想不到的用处，应用数学又可以抽象为非常纯粹的数学问题. 但是，宏观地看，数学的历史有“实用—纯粹—实用—纯粹—实用”五个轮回的大趋势. 我们正处在计算机技术大显威风、数学随之发生重大变化的时代. 数学应用，正如水银泻地，无所不在地改变着数学本身.

让我们回到数学教育.

中国数学教育是从西方传入的. 因此没有《九章算术》的实用主义传统. 西方数学中的古希腊传统立刻征服了中国的思想界和数学界. 直至20世纪40年代的教科书，一定包括“九点圆”、“西摩松线”等平面几何的精品，而且往往是“考高中”的试题. 代数方面：因子分解难煞人，三角恒等式满天飞. 数学教师的声誉，或者在于善解几何难题，或者在于能够兜出三角恒等变换的迷宫. 1949年之后，苏联数学教育观念进入中国. 几何内容严密而较浅显，代数内容则以函数观和方程思想并重. 矫揉造作的数学题废止不用. 但是，苏联学派的数学教育思想是把数学作为“思想的体操”（苏联加里宁语）. 数学问题的呈现，多以纯粹数学问题的严密证明为重. 这一趋势，其实是19世纪数学追求纯粹、严密、形式化倾向的反映. 以计算机技术为代表的信息时代数学观，则还来不及反映到数学教育中来.

20世纪80年代的“拨乱反正”，数学教育回到20世纪60年代．由于高考的社会压力增加，数学问题以考试题目的类型为依归．奥林匹克数学竞赛脱离实用的趋势也影响到一般数学教育．于是一种单一的、逻辑的、纯粹的中学数学问题模式终于形成了．这就是“化归”．数学确实要用逻辑链条把未知和已知联系起来，但是这毕竟只是数学思维的一种重要形式，绝不是全部．认为数学问题都是“化归式数学题”，显示出中国数学教育的贫困．

20世纪90年代开始了数学教育的改革．先是素质教育的口号，后是创新教育的提倡．对数学问题的要求也随之发生变化．例如：

- 数学应用题重新受到重视．1995年高考数学试卷出现了大型数学应用题，此前的数学考试已经多年没有应用题．
- 数学开放题从无到有，进入课堂，出现于考卷，现已成为一种教学模式，形成共识．
- 国外的新型数学题影响国内．情境题首当其冲．一道向玻璃瓶注水的高考题，不用算、不必证，只凭理解与思考作出判断．数学建模题，无非是把实际情境数学化．
- 数学创新的口号，使得数学题更加丰富多彩．阅读题，思想实验题，一种特定的思维题，以及数学作文题，呈现出百花齐放的局面．

以上的变化,仅仅是开始．当新的数学课程标准在全国实行之后，数学题型还会进一步地丰富和变化．比如，概率统计一旦进入课程，其问题的呈现方式具有不同的形态．科学型计算器进入课堂和考场之后，许多老式问题不能用了，新的问题又会出现．

总而言之，数学题型也要“与时俱进”，不能例外．

编习题集，不是什么新鲜事．但是编新问题集，则并非多见．记得1993年，受当时国家教委课程研究中心游铭钧同志的委托，我和几位研究生合编过《中学数学问题集》，除了自编一些题目之外，主要到国外的资料中去寻找．这大概是这一轮编写数学新问题的开始．近年来，戴再平先生又编写了5本一套的《中小学数学开放题》丛书，也是这方面的新收获．此后若干年，全国的高考

和地方的中考，出现了许多精彩的数学问题，凝聚了我国广大数学教育工作者的心血．因此，现在编写数学新问题，更多地立足于国内，比1993年的情况要好得多了．这是值得高兴的事．

我和广西教育出版社订立协议之后，即将本书的编写工作交给当时在华东师范大学访问的马岷兴、高建新、木振武等5位老师合作完成．他们收集了一些现成的材料，然后统由四川师范大学的马岷兴老师处理．但是，把各种类型的数学问题整合起来，谈何容易．至于要增加几个新编的数学问题，更是要花大力气．马老师和她的合作者下了许多功夫．我想，此书的出版，是时代的产物．它记录了20世纪90年代以来数学教育改革的脚步，应该有一定的意义．

上面的话，从古代数学讲到当代数学，又叙述了20世纪中国数学教育的一些变迁，不免有点啰唆．依我的本意，是想把编写数学新问题集的意义说得充分些，于是把一些自我感受写了下来，以求教于大方之家，并权作为本书之序．

张奠宙

2002年3月21日

目录 CONTENTS

新题空间

新题点评

新题索引

新题空间

第一章 数学应用题

综述

数学应用题是理论联系实际的一种数学题. 1993年以后，数学应用题在高考试卷中成为必考内容，体现出注意中学数学知识的应用，加强数学知识应用的教学的数学教育改革方向.

数学应用题，按知识内容分类，包括初等代数、平面几何、立体几何、三角、平面解析几何、概率统计等数学知识内容的应

用；就现实生产和生活中的应用进行分类，有成本、价格、利润，存款与贷款，运输、航行、行程，管理与决策，最佳位置，农业生产规模，生物繁殖等诸类.

从应用角度来看，数学应用问题有四个层次．即直接导用公式计算；利用现成的数学模型对应用问题进行定量分析；对于已经经过加工提炼，忽略了次要因素，保留下来的诸因素关系比较清楚的实际问题建立模型；对原始的实际问题进行加工，提炼数学模型．其中第四个层次属于典型的数学建模型问题．近年来我国高考试卷中出现的数学应用问题常定位在二、三两个层次．我们称前三个层次为数学知识应用问题.

一个应用问题，无论内容繁简，都必须包括已知条件和问题两部分．一般来说，应用题中的已知条件是解答问题的依据，问题是分析已知与未知找出解题途径的思考方向.

解应用题应遵循的一般程序是：

1. 阅读理解

阅读题目，理解题意，能用自己的语言，将题目的含义准确地表达出来，要弄清每一个词语，特别是以前从未见过的概念，要认真琢磨其解释，对于一些常见的关键性语句，要领会其数学意义.

2. 联想关系

沟通题目中各种数量之间的关系，联想归结为自己所熟悉的某种基本数学关系．如，单价×件数=总价；利润=售价-成本，等等.

3. 构造模型并解答

数学应用问题中构造出的模型，大都为一种符号模型，一般是指反映特定的问题和具体事物系统内在规律性的数学结构，通常是方程和不等式的综合组，也就是把题目中的已知量、未知量、常量、变量等分门别类地列出，再摆够题目中各种制约条件．形成数学框架、构造模型是解答应用题的关键所在，模型构造得准确、巧妙，是正确解答应用题的基础.

应用的广泛性是数学科学的基本特征之一. 当代应用数学正迅猛发展，以至有一切高技术都可归结为“数学技术”及“海湾战争乃是一场数学实习”等说法. 在数学教学中，加强数学知识应用，培养学生的应用意识，已成为当前数学教育中一道风景和基本要求.

我们一般强调的在日常教学中“加强应用”，是希望教师在教学中注意表现数学概念如何在生活中发生，给学生介绍更多数学知识的实际背景和它们在实际生活中的可用之处. 与教材配套的练习中应设计一定数量的将数学知识直接应用的小问题. 这对学生理解数学和下一步逐渐发展到独立应用所学的数学知识解决数学建模型问题都是很重要的过程.

新题例解

例 1 **加工资问题（美国）** 某人在一公司工作，目前年薪为1万元. 老板说，这里有两种方案供你选择. 第一种：每年加1000元；第二种：每半年加300元. 试问，如果你在该公司工作5年，究竟用哪种方案得到的收入多？

数学过程分析 这是一个极好的等差级数的探究性问题. 初看起来，一年加1000元，总比半年加300元即一年加600元要好. 其实，加薪后是不会减下来的. 所以，我们按两种方案得到的各时段的薪水数数列［指前5年（即10个半年）的实际加薪数，底薪1万元未计在内］见下表.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
方案一		1000		2000		3000		4000		5000
方案二	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700	3000

由此看出，除了第一年，按方案一得1000元，多于方案二900元之外，第二年按方案一可得到3000元，依方案二也可得

$300+600+900+1200=3000$（元）.

到了第三年，收入总数为

方案一：$1000+2000+3000=6000$（元）.

方案二：$300+600+900+1200+1500+1800=6300$（元）.

以后再算下去，方案二明显占优势. 到第五年加薪的总收入为

方案一：$\frac{5\times6}{2}\times1000=15000$（元）.

方案二：$\frac{10\times11}{2}\times300=16500$（元）.

所以方案二为好.

但是如果方案二是每半年加200元呢？10年后的总加薪数为（用等差级数求和）：

方案一：$\frac{10\times11}{2}\times1000=55000$（元）.

方案二：$\frac{20\times21}{2}\times200=42000$（元）.

因此方案二不好.

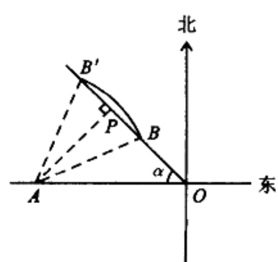
那么每半年加薪多少会使n年后用方案二有利呢？由

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot1000=2n\cdot\frac{2n+1}{2}\cdot d$$

可知，当$n=10$时，d应当大于$\frac{11}{42}\times1000\approx262$（元）.

点评 这一问题的变化还很多. 用这一问题作为“等差级数”单元的核心题或数学作文是很好的.

例 2 某号台风中心位于O地，台风中心以25千米/时的速度向西北方向移动，在半径为240千米的范围内将受到影响. 城市A在O地正西方向与O地相距320千米处，试问A市是否会遭受此台风的影响？若受影响，将有多少小时？



教学过程分析　在O点建立方位图，如图所示．由题意知$\alpha=45°$，$OA=320$（千米）．作$AP\perp OP$于P．由$AP^2+OP^2=OA^2$，$2AP^2=OA^2$，得$OA=\sqrt{2}AP$，$AP=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot OA=160\sqrt{2}<240$.

∴ A市将遭受台风影响.

以A为圆心、240千米为半径画弧与射线OP交于B、B'，则台风到B处开始影响A市，到B'处结束对A市的影响，即$AB=AB'=240$．故

$$BB'=2BP=2\sqrt{AB^2-AP^2}=2\sqrt{240^2-(160\sqrt{2})^2}=160\text{（千米）}.$$

∴台风影响A市的时间为

$$t=\frac{BB'}{v_{台}}=\frac{160}{25}=6.4\text{（小时）}.$$

点评　本题为2000年内蒙古中考试题，2000年上海市中考数学题中也出现了类似题目.

例 3　**“公说公有理，婆说婆有理”（中国香港）**　某企业有5个股东，100名工人．年底公布经营业绩，如下表所示：

	1990年	1991年	1992年
股东红利	5万美元	7.5万美元	10万美元
工资总额	10万美元	12.5万美元	15万美元

现在请大家分析根据此表的数据所画的三种图.

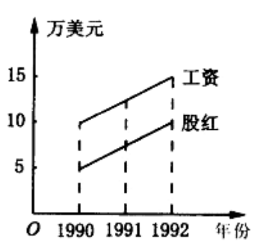


图1（老板所画）

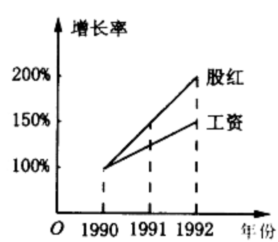


图2（工会主席所画）

数学过程分析 图1表示：股东红利总额、工人工资总额与时间的函数关系.

图2表示：股东红利增长率、工人工资增长率与时间的函数关系.

图3表示：股东人均红利、工人人均工资与时间的函数关系.

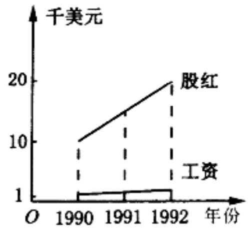


图3（工人所画）

这是取自我国香港数学教材中的一个例题. 书中说明，图1是老板所画，“有福共享，有难同当，股红工资平行增长”. 图2是工会主席所画，“股红翻了一番，工资只增加150%，所以工资应该增长得快些”. 图3是一工人所画，股东的红利从1万美元增至2万美元，工人的工资从1000美元增到1500美元，工资太低了.

以上的三种说法，都是根据数据的“实话实说”，没有造假，因此都有理. 没有好坏之分，只有角度不同. 何者合适，全凭自己的立场而异. 我们常说，数学对任何人都一样，其实数学的结果确实对任何人都相同，但是运用数学方法的出发点，解释数据的角度是可以不同的. 因此，我国香港数学界的同行说，我们应该把数学的这一情形告诉学生，使他们能用数学保护自己的合法权益.

当然，我国在香港实行“一国两制”，目前香港仍然是资本主义制度，这里没有说工人所画的图3才是正确的. 教材的原标题“公说公有理，婆说婆有理”，表明了教材作者的观点.

如果按我国目前的“函数”单元教学，学生按表格画函数图像，结果画出来的都是“老板”的图1（我们有实验为证）. 千千万万的打工者都是初中毕业生，他们都获得了必要的数学来保护自己吗？如果不是，我们应当感到惭愧才是.

总之，数学是客观的真理，但使用数学的角度是可以因人而异的.

例 4　人尽其才　某人才中心招聘电子工、图书员、木工三人，甲、乙、丙三人应聘，考试结果为：

	电子	语文	制图	总分	
甲	8	7	5	20	（木工）
乙	8	6	7	21	（图书员）
丙	5	10	7	22	（电子工）

请分析上述录取的弊端.

教学过程分析　若甲录取为木工，乙录取为图书员，丙录取为电子工，则能力利用指标为5+6+5=16.

若甲录取为电子工，乙录取为木工，丙录取为图书员，则能力利用指标为8+7+10=25.

本题属人力资源配置问题. 人员的工作分配不应按测验总成绩分，而应突出每个人的优点特长. 人才中心在人才招聘中没有充分认识到木工、电子工、图书员在实际工作中所需知识的侧重点，而是认为木工头脑简单，只要会画线锯木头就可以了，因此总分低者招为木工. 图书员只需认识字，会使用四角号码词典，会使用文献检索书即可，不需要太多知识，多数人都会干，因此不需要总分较高的人. 电子工要会看电路图，要求要高些，因此选择总分最高的. 其实这种做法没达到人尽其才、物尽其用的目的，人力资源没做到优化配置. 那么应怎样分配甲、乙、丙三人的工作呢？

电子工要对电子技术比较熟，同时要能看懂操作说明，对电子和语文知识要求较高，因此甲做电子工较合理. 木工应突出其制图的特长，其他要求不需要太高，故乙做木工较合适. 图书员需要与大量的文献接触，语文知识应要求高一些，因此丙做图书员较合理.

人力资源配置是一门学问，真正要在招聘中做到人尽其才、物尽其用，需要管理者懂得统计中的相关知识，更需懂得各专业所需知识的侧重点和人才的专业特长.

1-1 一天，甲、乙、丙三人合乘一辆出租车，讲好大家分摊车费，甲在全程的$\frac{1}{3}$处下车，乙在全程的$\frac{1}{2}$处下车，丙在终点下车. 当时他们乘坐的出租车的收费标准是：起价5元，7千米以内单价1.40元，7千米后单价2.10元. 全程长18千米.

（1）三人共付出租车费多少元？

（2）请问三人各出多少钱最合理？

思路与点拨 三人分摊车费，应考虑每个人所乘路程及在每一段上乘车的人数.

解答 （1）$5+7\times1.4+11\times2.1=37.9$（元）.

（2）三人平均分摊37.9元显然不合理，因为他们乘坐的路程不同. 若按乘车的距离付车费，则

甲付：$2\times\frac{37.9}{2+3+6}\approx6.89$（元），

乙付：$3\times\frac{37.9}{2+3+6}\approx10.34$（元），

丙付：$6\times\frac{37.9}{2+3+6}\approx20.67$（元）.

这种分摊方法没有考虑每段路程上乘坐的人数，还是不尽合理，合理的方法是：刚开始$\frac{1}{3}$路程需付$5+6\times1.4=13.4$（元），甲、乙、丙各出$13.4\div3\approx4.47$（元）；中间段距离3千米应付$1.4+2.1\times2=5.6$（元），乙、丙各付$5.6\div2=2.8$（元）；最后9千米应由丙付，$9\times2.1=18.9$（元）.

故甲应付4.47元，乙应付$4.47+2.8=7.26$（元），丙付$4.47+2.8+$

18.9=26.16（元）.

1—2 某校办工厂生产了一批新产品，现有两种销售方案. 方案一：在这学期开学时售出该批产品，可获利30000元，然后将该批产品的成本（生产该批产品支出的总费用）和已获利30000元进行再投资，到这学期结束时再投资又可获利4.8%；方案二：在这学期结束时售出该批产品，可获利35940元，但要付成本的0.2%作保管费.

（1）设该批产品的成本为x元，方案一的获利为y_1元，方案二的获利为y_2元，分别求出y_1、y_2与x的函数关系式.

（2）当该批产品的成本是多少元时，方案一与方案二的获利是一样的？

（3）就成本x元讨论方案一好，还是方案二好.

思路与点拨　（1）可利用“利润=销售收入-成本”建立函数模型，而（2）、（3）把y_1、y_2作差比较即可.

解答　（1）$y_1=(30000+x)(1+4.8\%)-x=0.048x+31440$，$y_2=35940-x\cdot 0.2\%=35940-0.002x$.

（2）$y_1=y_2$，即$y_1-y_2=0.048x+31440-35940+0.002x=0.05x-4500=0.05(x-90000)=0$. $\therefore x=90000$（元）. 因此，当该批产品的成本是90000元时，方案一与方案二的获利是一样的.

（3）根据题意，当$x>90000$时，$y_1>y_2$，即成本大于90000元时，方案一好；当$x<90000$时，$y_1<y_2$，即成本小于90000元时，方案二好.

1—3 据《新华月报》消息，巴西医生马廷恩经过10年研究后得出结论：卷入腐败行为的人容易得癌症、心血管病，如果将犯有贪污、受贿罪的580名官员与600名廉洁官员进行比较，可发现，后者的健康人数比前者的健康人数多272人，两者患病（包含致死）者共444人. 试问：犯有贪污、受贿罪的官员的健康人数占580名官员的百分之几？廉洁官员的健康人

数占600名官员的百分之几？

思路与点拨 抓住“廉洁官员的健康人数比腐败官员的健康人数多272人”和“两者患病（包括致死）者共444人”这两个等量关系列方程组.

解答 设犯有贪污、受贿罪的官员中健康人数占580名官员的$x\%$，廉洁官员的健康人数占600名官员的$y\%$，根据题意，得

$$\begin{cases} 600\times y\%-580\times x\%=272, \\ 600\ (1-y\%)+580\ (1-x\%)\ =444. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=40, \\ y=84. \end{cases}$$

因此，犯贪污、受贿罪的官员中的健康人数仅占40%，而廉洁官员中的健康人数可占84%.

1-4 目前，世界上名气最响的闪烁MX史波特超小型飞机重115千克，机身长5.5米，翼长8.5米，高2.47米. 但俄罗斯人狄米芮耶夫设计的X14手提式组合小飞机重仅50千克，机身长3.32米，其翼长与高之和比前者的翼长与高之和少4.75米. 如果将X14型小飞机的翼长扩大1倍，其与高之和仅比闪烁MX史波特超小型飞机的翼长与高之和多0.25米. 问X14型小飞机的翼长和高各是多少？

思路与点拨 设X14型小飞机的翼长和高分别是x米、y米，抓住“X14型小飞机翼长与高之和比闪烁MX史波特超小型飞机的翼长与高之和少4.75米”和“将X14型小飞机的翼长扩大1倍，其与高之和仅比闪烁MX史波特超小型飞机的翼长与高之和多0.25米”这两个等量关系建立方程组.

解答 设X14型小飞机的翼长为x米，高为y米，据所给信息知：

$$\begin{cases} x+y+4.75=8.5+2.47, \\ 2x+y-0.25=8.5+2.47. \end{cases}$$