线性控制系统教程

张志方　孙常胜　编著

科学出版社

科学出版社

线性控制系统教程

张志方　孙常胜 编著

科 学 出 版 社

1 9 9 3

(京)新登字092号

内 容 简 介

本书是一本密切结合国内工科研究生和高年级大学生实际情况而写的线性系统课程的教材。本书反映了近20年来线性系统理论的主要内容和最新研究成果。书中深入系统地介绍了状态空间法和多变量传递函数法以及两者之间的关系。内容包括：线性系统理论基础；状态空间实现的四种规范型；状态空间一般分解定理证明的几何方法；能控、能观测性的PBH检验；状态反馈和观测器的状态空间设计、传递函数设计和多项式设计；系统代数理论的初步知识；用不变量确定多变量系统实现的规范型；广义微分系统以及描述系统的普遍方法——微分算子多项式矩阵法；第二章中完整系统地介绍了李雅普诺夫稳定性基本理论。

本书的特点是：取材精炼，结构严谨，层次分明，内容叙述深入浅出，并把数学方法与工程概念有机地融为一体，深受广大工科学生的欢迎。

本书可供自动控制、无线电技术、信息处理、计算机科学与应用、航天航空技术、系统工程等专业的研究生和大学高年级学生作为现代控制理论基础课的教材，也可供从事上述领域工作的科技人员参考。

线性控制系统教程

张志方　孙常胜 编著

责任编辑　李淑兰　鞠丽娜

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1993年10月第一版　开本：787×1092 1/16

1993年10月第一次印刷　印张：22 3/4

印数：1—1 800　字数：519 000

ISBN 7-03-003474-0/TP·256

定价：21.00 元

前　　言

“线性系统”是现代控制理论中发展较为成熟和应用最为广泛的内容．60年代以来，对线性系统的研究已取得了相当丰富的成果，至今对它的研究仍方兴未艾．更为重要的是，它的基本概念、方法和结果已成为现代控制理论和工程众多分支领域的基础．无论在信号处理领域（信号检测与估计、系统辨识、过程控制、数字滤波与通讯系统）还是无线电技术、计算机科学与系统工程（包括生态、经济等社会动态系统的分析与控制）领域，线性系统的知识都是必不可少的．线性系统的主要研究对象是有限维系统，它用的主要工具是常微分方程和线性代数．但在无限维系统（分布参数系统）和多维系统（处理二维、三维波动场载送信号时用）的研究中，线性系统的概念和方法仍起着引导的作用．非线性系统中的不少问题最终要用线性系统理论和方法解决．因此，线性系统的知识已成为从事控制领域工作的科学工作者和工程技术人员必须具备的知识．

目前国内外有不少介绍有关线性系统的书，其中影响较大的一本是 T. Kailath 著的“Linear Systems”，但这本书在国内的采用却不太普遍．其原因是，这本书的写法不同于常见的科技文体．它采用的讨论式、启发式的独特结构本来是该书的一大特色，但却给正处在学习阶段的研究生和高年级大学生的阅读带来很大不便，甚至难于读懂．原因是他们的课时有限，而 T. Kailath 这本书的新颖写法却要求读者从头至尾反复阅读几遍才可能从它的字里行间领会其实质．第二个原因是该书涉及的数学知识广泛，如书中作为主要工具之一的多项式矩阵理论，目前尚未编入代数教科书，又如书中用到的“赋值”是代数学一个专门分支中的概念，工科学生未接触过．目前国内大部分工科研究生和大学生的数学训练与实际需要有很大距离，当遇到诸如上述的数学问题时很难接受．由于数学上的困难，影响了他们对书中内容的理解，致使无法继续把这本书读下去．当然书中也有一些内容需要进一步讨论，例如，Nerode 等价、多变量状态空间实现的规范型等．

由此可见，目前急需一本具有一定深度，又易于国内工科研究生、高年级大学生阅读的线性系统方面的书，这正是本书写作的动机．

本书吸取了 T. Kailath 等优秀教材的精华部分，弥补了它们的不足，并且更正了原书中的错误．本书还采用了其他专著的有关内容，同时也包括我们自己的研究工作．本书介绍近 20 年来线性系统研究的主要成果．为了便于工科学生、研究生理解，书中注意突出概念的工程意义，并补充了必要的数学知识；写法上注意结构严谨，循序渐进；讲法上注意深入浅出，前后呼应．

本书主要介绍状态空间方法和 70 年代初由 H.H. Rosenbrock 和 W.A. Wolovich 提出的多变量线性控制系统的微分算子多项式矩阵法（它是经典控制理论在现代控制理论中的延伸），同时研究传递函数法和状态空间方法之间的关系．

本书始终体现两点，即内容的先进性和易读性．除此之外，还体现在以下几个方

面:

1. 取材适当,讲解最基本的内容,并不片面追求所谓"正规"、"完整"而使内容过于繁杂. 目的是使读者通过本书的学习,确实掌握线性系统的基本理论和基本方法,受到必须的基本训练,从而提高他们的素质,并为后续课程和今后的研究工作奠定一个良好的基础.

2. 注重基本训练. 现代控制理论与经典控制理论的主要区别是它用数学方法系统地处理工程问题. 现代控制理论的产生和发展不仅与电子计算机的发展密切相关,也与纯粹数学和应用数学的发展分不开. 现代控制理论中所用的数学概念和方法犹如溶液中的溶剂,无线电中的载波. 没有溶剂,溶质就不能很好地发挥作用,没有载波,有用的信号就不能传送出去. 没有数学就没有现代控制理论. 现代控制理论中所用的数学概念和方法已构成现代控制理论的组成部分,正像傅里叶变换和拉普拉斯变换已构成经典理论的一部分一样. 因此,熟悉一些必要的数学概念和方法是学好现代控制理论和解决控制工程问题不可缺少的前提. 现今,对于从事控制领域工作的科技人员来说,其技术水平的高低很大程度上是由他们的数学素养决定的. 本书不惜笔墨补充的数学知识,不仅是为了帮助读者正确领会书中的内容,而且对他们这些即将从事控制理论与工程的读者来说也是必要的基本训练. 这种训练对于他们继续进行控制理论的学习和长远发展都是大为有益的.

3. 本书在写法上,时常作一些伏笔,并注意内容的前后呼应,后面要讲的内容在前面适当的地方先提一下,以便后面学到时加深印象.

4. 本书还注意用较为直观的几何方法来分析问题,以避免很繁的矩阵运算.

5. 采用高观点看问题可以提高读者观察问题、分析问题的能力. 因此本书在一定阶段,用输入变量集合分类来定义状态以加深对状态、能控性和能观测性等重要概念的理解. 用不变量作规范型以深刻认识规范型的本质.

6. 尽可能给出一般结果以拓宽读者的知识面. 如介绍 Cayley-Hamilton 定理时先介绍一般化零多项式的条件等.

7. 本书尽可能采用先进成果而不局限于现有的各种参考书. 例如,多变量实现的规范型,目前国内外教科书都采用 1967 年 D.G. Luenberger 给出的结果,由于 D.G. Luenberger 没有使用 Kronecker 不变量,因而造成参数形式的不确定性. 本书采用我国学者郑毓蕃教授介绍的结果.

8. 本书第二章的稳定性是有意识地针对长期以来存在的一些模糊认识而写的. 本章详细、系统地介绍李雅普诺夫稳定性的基本理论,这是同类教科书中尚未见到的.

本书正文分为两大部分. 前五章和第六章 6.1、6.2 两节可供一年级研究生和高年级大学生讲 60 学时,全书的基本概念都在这部分介绍,余下的部分专门介绍多变量定常系统微分算子多项式矩阵法,可再为研究生讲 30 学时.

考虑到读者的学习负担,本书的习题量是选得最少的,读者应该把它们都完成.

此次出版增加了预备知识一章,正文的一些地方做了较为详尽的注释,目的是使高年级大学生也能使用本书作教材. 预备知识的第一部分"分布理论与δ-函数"是为研究生写的,目的是开扩工科研究生的视野,使他们在更深的层次上了解δ-函数. 这部分内容大学生可跳过不看而不影响阅读正文.

本书内容对那些预先没有学习过经典控制理论但有一定数学素养的读者来说，也能够看懂.

本书最初是我给研究生讲授"线性系统"课程的讲稿. 随后，孙常胜同志继续用此讲稿为后几届研究生讲课，并在教学实践中对内容进行了充实. 由于这份讲稿是密切结合国内工科研究生的实际情况写成的，所以深受听课研究生的欢迎. 六届研究生使用都收到了较好的效果. 本书是在这份讲稿的基础上结合教学实践写成的. 本书的内容尽管多次使用，但限于水平，疏漏及错误仍在所难免，恳请读者批评指正，以兹改进.

张志方

1992 年 8 月 13 日

目　　录

第0章 预备知识

0.1 δ-函数

δ-函数在物理中和工程上都有重要应用. 大多数读者十分熟悉 δ-函数是如何从力学中的集中载荷、冲击以及电学中电流源对电容器快速充电时出现的脉冲等现象中抽象出来的. 因此,我们不打算从引出 δ-函数的那些背景出发从头介绍 δ-函数. 这里我们准备做两件事: 1) 讨论从工程角度处理 δ-函数时一些值得注意的问题;2) 简要介绍分布理论,并从分布理论的角度对δ-函数做进一步深入的讨论,以使读者对应用中如此重要的 δ-函数的本质有一个准确的认识.

0.1.1 δ-函数的工程定义及常用性质

Dirac (狄拉克)把具有下列性质的量称为 δ-函数,记为 $\delta(t)$

$$\delta(t)=0,\quad t\neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \tag{0.1.1}$$

把 δ-函数称为函数其实是一种误称,它不是普通意义下的函数,因为它没有普通意义下的函数值,不能用普通意义下“值的对应关系”来描述. 它既然不是函数, 当然也就画不出它的图形. 工程上用一个具有单位长度的有向线段来表示它,见图 0.1.

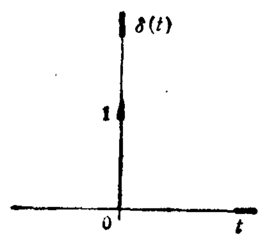


图 0.1

细心的读者会问, $\delta(t)$ 既然不是函数, 当然也就没有可积与否的概念,那么它的积分式(0.1.1)是什么意思呢?工程上迴避了这一矛盾, 只是说可用一类普通函数序列来近似它,这类函数序列常用的有

$$G_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & |t|>\varepsilon\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |t|\leqslant\varepsilon\end{cases}$$

$$H_\varepsilon(t)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2},\quad \varepsilon>0$$

$$K_\omega(t)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\omega t}{t},\quad \omega>0$$

等,它们的图形分别如图 0.2 (a),(b),(c) 所示, 并且把它们的极限当作 δ-函数

$$\lim_{\varepsilon\to 0}G_\varepsilon(t)=\delta(t),\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}=\delta(t)$$

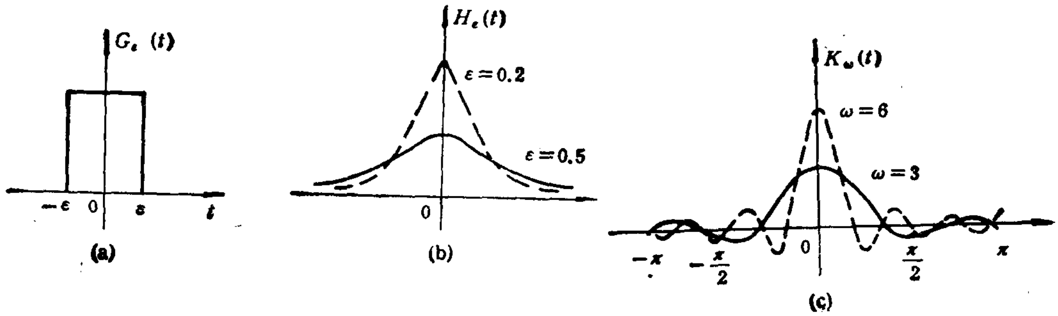


图 0.2

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{\sin\omega t}{\pi t}=\delta(t) \tag{0.1.2}$$

或者更简单地把 $\delta(t)$ 看成矩形方波 $\delta_\varepsilon(t)$

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}, & |t|\leqslant\varepsilon\\ 0, & |t|>\varepsilon\end{cases} \tag{0.1.3}$$

在 $\varepsilon\to 0$ 时的极限。$\delta_\varepsilon(t)$ 的图形为图 0.3 所示。这就是说，当 ε 充分小或 ω 充分大时，$G_\varepsilon, H_\varepsilon, K_\omega$ 或 δ_ε 可作为 $\delta(t)$ 的近似式。这些函数序列常被称为 δ 型函数列。

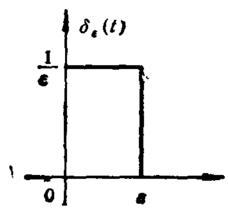


图 0.3

这种近似的依据往往是凭物理上和工程上的直观。通常认为任何测量仪器的分辨能力都是有限的。在仪器能够分辨的最小时间间隔 ε_0 内发生的物理过程都无法了解到。实际上也常常不需要了解，只着重作用的效果。正如电流源快速给电容器充电那样，在 ε_0 时间内充电电流如何变化并不重要，重要的是在 ε_0 时间内，电容器已带有电荷 Q，所以可以采用不同的 δ 型函数列近似 δ-函数。

直观自然是重要的。上述解释似乎也很完美，但事情并没有结束。细致的读者早就发现问题并没有解决。他们会说，科学的依据任何时候都是需要的。直观总能靠得住吗？式(0.1.2)中各式的极限又是什么意思呢？各式左端表示的是函数列逐点收敛，而等式右端并不是函数，等式怎能成立？仅凭直观是无法给出圆满解答的，这正是我们要介绍分布理论的动机。在介绍分布理论之前，我们先列出工程上常用的 δ-函数的性质。当然，目前的出发点还是 Dirac 的定义以及各种近似函数列。

1° δ-函数的导数

δ-函数的一阶导数定义为

$$\delta^{(1)}(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\delta(t)-\delta(t-\tau)}{\tau}$$

图 0.4 (a) 是用 δ 型函数——三角波近似 δ-函数。图 0.4 (b) 所示的函数列可视为 $\delta^{(1)}(t)$ 的近似。

可类似地定义 δ-函数的高阶导数 $\delta^{(2)}(t)$，$\delta^{(3)}(t)$，$\cdots$，这时工程上是从越来越平滑的 δ 型函数列着手的。

2° 设 $u(t)$ 为定义在实轴 $\boldsymbol{R}$ 上的连续函数[1]，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)u(t)dt = u(0) \tag{0.1.4}$$

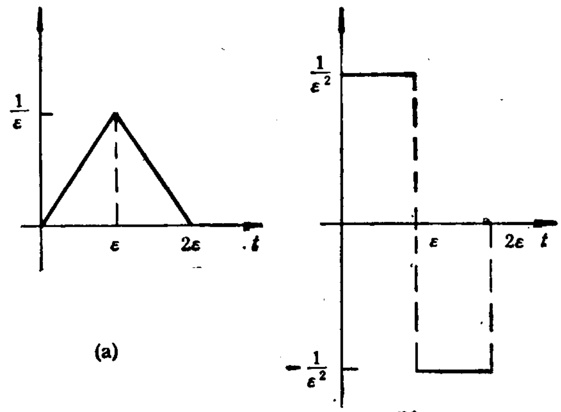
3° 若 $u(t)$ 定义在 $\boldsymbol{R}$ 上且具有 n 阶连续导数，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(1)}(t)u(t)dt = -u^{(1)}(0) \tag{0.1.5}$$

$$\vdots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n u^{(n)}(0) \tag{0.1.6}$$

性质 2°，3° 常被称为 δ-函数的过滤性。它表明 δ-函数是如何采集并过滤它所在的点的函数值 $u(0)$ 及其导数值 $u^{(n)}(0)$ 的。



(a) (b)

图 0.4

4° $\delta(t)$ 是偶函数，即

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{0.1.7}$$

一般情况有

$$\delta^{(n)}(t) = (-1)^n\delta^{(n)}(-t) \tag{0.1.8}$$

5° $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = 1(t)$

式中

$$1(t) = \begin{cases}1, & t \geq 0\\ 0, & t < 0\end{cases}$$

称为单位阶跃函数。同时有

$$\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t) \tag{0.1.9}$$

类似于 $\delta(t)$，工程上还定义了 $\delta(t-t_0)$，且有

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t-t_0)$$

式中

$$\delta_\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}, & t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\varepsilon\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$\delta_\varepsilon(t-t_0)$ 的图形如图 0.5 所示。

$\delta(t-t_0)$ 常用图 0.6 的有向线段表示。

对于 $\delta(t-t_0)$ 有相应的性质：

---

1) 严格说 $u(\cdot)$ 的支集应有界。此注也适于性质 3°。

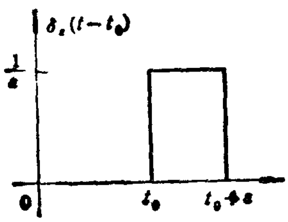


图 0.5

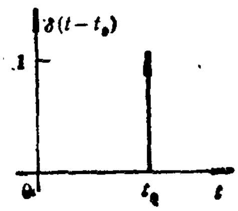


图 0.6

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t)dt = u(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)u(t)dt = (-1)^n u(t_0)$$

$$\delta(t-t_0) = \delta(t_0-t)$$

$$\delta^{(n)}(t-t_0) = (-1)^n\delta^{(n)}(t_0-t)$$

$$\frac{d}{dt}1(t-t_0) = \delta(t-t_0)$$

从上述性质我们看到 δ-函数就像普通函数那样可以进行很多普通函数能够进行的运算. 此外 δ-函数可以与无限光滑函数(即具有任意阶导数的函数)相乘,并可像普通函数那样微分,例如,设 $\phi(t)$ 为无限光滑函数,则有

$$(\delta(t)\phi(t))^{(1)} = \delta^{(1)}(t)\phi(t) + \delta(t)\phi^{(1)}(t)$$

利用性质 5° 我们还可以对具有第一类间断点的函数在间断点处求导数.

在前面我们讨论 δ-函数的各种性质时,认真的读者已经在问,把 δ-函数视为普通函数进行分部积分等运算会不会有问题. $\delta(t)$ 既然不是普通函数,它与普通函数相乘有意义吗? 因为两个普通函数相乘是逐点相乘的,其乘积是一个新的函数. $\delta(t)$ 与普通函数之积不可能是函数,那是什么? 也就是说,我们前面所做的并不是函数之间的运算,却又采用了普通函数运算的规则,会不会有问题呢? 读者的耽心是自然的,因为任何不谨慎都可能导致误判. 而在科学史上,一些细微的差别曾经是新理论建立的起点,因此审慎的态度是需要的. 幸运的是我们前面做的推导并没有出问题. 这些视 δ-函数为普通函数而进行的推导其实都是形式上的. 我们所做的一切之所以没有出问题,是由于我们的工作实际上并不是在函数的领域内进行的,而是在另外一个称为泛函的领域内进行的. 这就是下面要介绍的分布理论.

0.1.2 分布理论与 δ-函数

一个物理量通常被看成一个函数,即一个规则,按照这个规则对某独立变量所取的每一个值相应地赋予一个数. 例如,如果独立变量是时间 t, 物理量是力 f. 当每一个瞬时 t, f 的值 $f(t)$ 被确定时,我们就说力 f 是已知的. 但实际上要想在每一时刻 t 观察到力 f 的每一瞬时值 $f(t)$ 是不可能的. 任何测量仪器能够记录的仅仅是某个非零时间区间上力 f 的作用效果.

描述物理量的另一个方法是把它看成一个泛函,即一个规则,按照这种规则对称为检

验函数的一个函数集合中的每一个函数赋予一个数.（"检验函数"集相当于函数概念中的定义域，自变量或宗量现在是检验函数集合中的函数. 因此可以通俗地说，泛函就是函数的函数.）现在，我们仅涉及一种特殊的泛函，称为分布（distribution）. 用分布概念来分析某些物理现象比用函数概念更贴切，更能反映物理本质.

采用分布描述物理量还有一个优点，就是对那些用函数概念就能够十分适宜地描述的物理量同样能用分布来描述，而且更优越. 由于分布是泛函，所以不会出现要确定某物理量瞬时值的问题.

这种不是通过每一点的值，而是通过对某一类已知函数的作用效果来确定一个函数的思想实际上早已被科学家和工程师采用. 比如，经典傅里叶变换和拉普拉斯变换就是这样. 我们可以通过傅里叶变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

来确定一个未知函数 $f(t)$. 比如，可通过试验确定其频率响应，而不是要测得每一时刻的 $f(t)$ 的值. 这时是把未知函数看成泛函的. 这里的检验函数集合是具有纯虚部指数的指数函数全体 $\{e^{-j\omega t}|\omega$ 是实数$\}$.

一般说来，并不需要写出检验函数集合中函数的精确形式.

为了把分布概念讲清楚，我们把函数限于一元实值函数，其定义域为 $\boldsymbol{R}^1$.

我们现在采用的检验函数集是无限次可微并且在某个有限区间之外取零值的函数 $\phi(t)$ 全体，记为 $\mathscr{D}=\{\phi(t)\}$. 例如，函数

$$\zeta(t)=\begin{cases}0, & |t|\geqslant 1\\ e^{\frac{1}{t^2-1}}, & |t|<1\end{cases}$$

容易验证 $\zeta(t)\in\mathscr{D}$.

对于检验函数集中的不同函数，这个有限区间不要求相同. 容易验证，$\mathscr{D}$是实数域上的线性空间.

如前所述，泛函也是一种规则，按照这种规则，对于$\mathscr{D}$中的每一个检验函数 ϕ，有一个确定的数与之对应，当用符号 f 表示泛函时，泛函的值，即每一个 ϕ 所对应的这个特定的数值，用 $\langle f,\phi\rangle$ 表示. 函数是被它在定义域上每点的取值唯一确定的. 两个不同的函数至少在一点上取不同的值. 像函数概念一样，泛函是被它在检验函数集合中每一个检验函数上的取值唯一确定的. 两个不同的泛函至少在一个 $\phi(t)$ 上取不同的值.

$\mathscr{D}$上的一个泛函 f 称为是线性的，如果对任一数 α 和任意 $\phi_1,\phi_2\in\mathscr{D}$，有

$$\langle f,\phi_1+\phi_2\rangle=\langle f,\phi_1\rangle+\langle f,\phi_2\rangle$$
$$\langle f,\alpha\phi_1\rangle=\alpha\langle f,\phi_1\rangle$$

$\mathscr{D}$ 中的检验函数序列 $\{\phi_\nu(t),\nu=1,2,\cdots\}$ 称为收敛，如果

1° 所有 $\phi_\nu(t),\nu=1,2,\cdots$，在某个共同的有限区间 I 之外取零值；

2° 对每一固定的 $k(k=0,1,2,\cdots)$函数列 $\phi_\nu^{(k)}(t)$，$\nu=1,2,\cdots$，对 $t(t\in\boldsymbol{R})$ 一致收敛，这里 $\phi_\nu^{(0)}(t)=\phi_\nu(t)$.

设 $\{\phi_\nu(t),\ \nu=1,2,\cdots\}$ 收敛于 $\phi(t)$，记作 $\phi_\nu(t)\to\phi(t)$，则一致收敛性保证了 $\phi_\nu^{(k)}(t)\to\phi^{(k)}(t)(k=1,2,\cdots)$；且 $\phi^{(k)}(t)\in\mathscr{D}(k=0,1,2,\cdots)$. 因此，我们也说，

检验函数空间$\mathscr{D}$对收敛是封闭的.

$\mathscr{D}$上的一个泛函f称为是连续的,如果对于$\mathscr{D}$中任一收敛的序列$\{\phi_\nu(t), \nu=1,2,\cdots\}$,且$\phi_\nu(t)\to\phi(t)(\nu\to\infty)$,数列$\{\langle f,\phi_\nu\rangle,\nu=1,2,\cdots\}$收敛于$\langle f,\phi\rangle$,即

$$\lim_{\nu\to\infty}\langle f,\phi_\nu\rangle=\langle f,\phi\rangle$$

定义 0.1.1 $\mathscr{D}$上的线性、连续泛函称为分布.

所有分布构成的空间称为$\mathscr{D}$的对偶空间 (dual) 或共轭空间 (conjugate), 记为$\mathscr{D}'$.

设$f(t)$是一个局部可积函数(即在每一个有限区间上可积),相应于$f(t)$我们可以定义一个分布f如下:

$$\langle f,\phi\rangle=\langle f(t),\ \phi(t)\rangle\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\phi(t)dt \tag{0.1.10}$$

(当我们强调某个等式是定义式时用符号$\triangleq$)不难验证,它是$\mathscr{D}$上的线性连续泛函.

局部可积函数通过式(0.1.10)产生的分布称为正规分布.

当$f(t)$连续时,$f(t)$唯一确定一个正规分布$f\in\mathscr{D}'$. 反之,一个正规分布也唯一确定一个连续函数. 有时我们把f与$f(t)$视为等同的,此时我们也说$\mathscr{D}$是$\mathscr{D}'$的一个线性子空间(后面将说明$\mathscr{D}'$是线性空间): $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}'$.

一般说来,如果$f(t)$仅仅是局部可积的,那么和$f(t)$对等的一类函数(即仅在一个零测集上可以与$f(t)$不相等的函数集合)与一个正规分布1-1对应. 今后我们把对等的函数视为同一函数. 有了这个约定,我们就可以说,正规分布与局部可积函数之间1-1对应. 鉴于此,常常用同一个表达式来表示正规分布以及产生它的函数. 例如t^2既表示函数也表示相应于它的正规分布. 为了叙述简洁,我们不是每次特别指明一个表达式是分布还是相应于它的函数,而是仅从上下文来确定其含义.

所有非正规分布称为奇异分布. 奇异分布的一个例子就是δ-函数.

分布的运算最初都是从正规分布导出的,但同样适用于奇异分布.

分布分析的威力在很大程度上依据这种事实,即每一个分布都具有任意阶导数,并且求导运算是连续运算[1]. 作为这一性质的结果,分布的微分运算可与各种极限过程,诸如无限和、积分等交换运算次序. 这与经典分析形成鲜明的对照. 众所周知,经典分析中这些运算次序的交换是需要附加较强的条件的.

我们先介绍分布的运算及其性质,然后再讨论δ-函数.

分布的加法　　令f,g是两个分布,它们的和$f+g$定义为一个分布, 对于$\mathscr{D}$中每一个ϕ, 这个分布的值为

$$\langle f+g,\phi\rangle\triangleq\langle f,\phi\rangle+\langle g,\phi\rangle \tag{0.1.11}$$

[注　定义中所说的"$f+g$是一个分布"是需要验证的. 即按照式(0.1.11), $f+g$确是一个线性连续泛函. (此处的验证十分简单,由于f,g都是线性连续泛函,式(0.1.11)等号右端所定义的泛函显然是线性连续的.)这一附注也适用于下面定义的各种运算.]

分布与数的乘法　　令α为一实数, 分布与数的乘法(简称数乘) αf定义为一个分

1) 这里"连续"是指,若一分布序列$\{f_\nu,\nu=1,2,\cdots\}$在$\mathscr{D}'$中收敛于f, 则相应的导数序列在$\mathscr{D}'$中收敛于f的导数.