高等纺织院校管理工程试用教材

运筹学

下　册

蔡溥　主编

纺织工业出版社

高等纺织院校管理工程试用教材

运筹学

（下册）

蔡淳 主编

纺织工业出版社

内 容 提 要

本教材分上、下两册。上册内容包括线性规划、整数规划、非线性规划和动态规划；下册内容包括网络分析与统筹方法、排队论、存储论、决策论和模拟论。教材中主要介绍运筹学的这些分支的基本原理与方法，具有一定的理论深度，同时注意结合纺织生产实际，列有一定数量的例题和习题。

本书可作为高等纺织院校管理工程专业和其它有关科系的试用教材或参考书，亦可供纺织工业系统的技术、管理人员在工作中参考之用。

责任编辑：马湘丽

高等纺织院校管理工程试用教材

运 筹 学

（下 册）

蔡 潜 主编

纺织工业出版社出版

（北京东长安街12号）

纺织工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

850×1168毫米 1/32 印张：11 插页：2 字数：281千字

1986年12月 第一版第一次印刷

印数：1—10,400 定价：2.30元

统一书号：15041・1481

目　录

第五章　网络分析与统筹方法

第一节　图的基本概念

我们把由点和连接点的线组成的图形称为图。这里的点可用来表示某一具体的事物，线可用来表示事物之间的某种关系。在生产实际和科学研究中，有很多问题可用有关图的理论和方法来解决。

图中的连线，可以是无方向的，也可以是有方向的。根据这一点，可以把图区别为无向图和有向图。

一、无向图

设 $V=\{v_1, v_2\cdots\cdots v_n\}$ 是空间中 n 个点的集合，$E=\{e_1, e_2\cdots\cdots e_m\}$ 是 m 条线的集合。如果 E 中的每一条线 e_i 是以 V 中的两个点 v_s，v_t 作为端点，E 中的任意两条线如果有交点，只可能在端点处相交，则由 V 和 E 组成的图形 G 称为一个无向图，记作 $G=[V, E]$。V 中的点称为 G 的顶点，E 中的线称为 G 的边。例如，图5-1即为一个无向图。

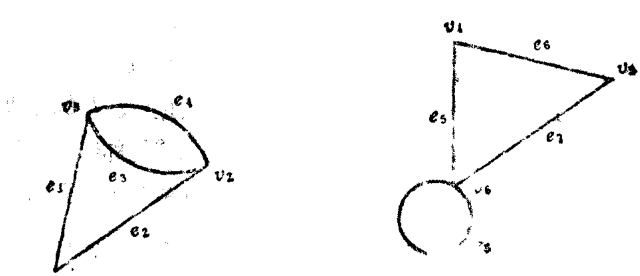

图5-1　无向图

在无向图中，如果边e_i是以v_s，v_t作为端点，则称e_i是v_s，v_t的关联边，可记作$e_i=[v_s, v_t]$或$e_i=[v_t, v_s]$。例如，在图5-1中，$e_1=[v_1, v_3]$，$e_3=[v_2, v_3]$，$e_4=[v_2, v_3]$，$e_8=[v_6, v_6]$等。这里的e_3、e_4有着相同的端点，称为平行边，e_8的两个端点重合，称为环。无平行边与环的无向图称做简单无向图。在简单无向图中，如果$e_i=[v_s, v_t]$，$e_j=[v_s, v_t]$，则可断言$e_i=e_j$。

在无向图G中，一个由点和边的交替序列$\{v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}\cdots\cdots e_{i_{k-1}}, v_{i_k}\}$，如果满足$e_{i_t}=[v_{i_t}, v_{i_{t+1}}]$($t=1, 2\cdots\cdots k-1$)，则称这个点和边的序列为一条从$v_{i_1}$至$v_{i_k}$的链，在不致引起误解时，亦可简记为$\{v_{i_1}, v_{i_2}\cdots\cdots v_{i_k}\}$。如果出现在链中的边互不相同，则称为简单链。如果出现在链中的顶点互不相同，则称为初级链。例如，在图5-1中，$\{v_1, e_1, v_3, e_3, v_2, e_4, v_3, e_3, v_2\}$是$G$的一条从$v_1$至$v_2$的链，$\{v_1, e_1, v_3, e_3, v_2, e_4, v_3\}$是简单链，$\{v_1, e_1, v_3, e_3, v_2\}$是初级链。

设$\{v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}\cdots\cdots e_{i_{k-1}}, v_{i_k}\}$是$G$的一条链，如果$v_{i_1}=v_{i_k}$，则称之为圈。如果圈中的边互不相同，则称为简单圈。如果圈中的顶点互不相同，则称为初等圈。例如，在图5-1中，$\{v_1, e_1, v_3, e_3, v_2, e_4, v_3, e_3, v_2, e_2, v_1\}$是$G$的一个圈，$\{v_4, e_6, v_5, e_7, v_6, e_8, v_6, e_5, v_4\}$是简单圈，$\{v_4, e_6, v_5, e_7, v_6, e_5, v_4\}$是初等圈。

在无向图G中，如果对于任意两个顶点v_s、v_t，至少存在着一条连接v_s、v_t的链，则称此图是连通图，否则①称为不连通图。例如图5-1是不连通图，它是由两个连通图组成。

设$G=[V, E]$是一个无向图，V'、E'分别是V、E的子集，且对于任意的$e_i\in E'$，e_i的两个端点都属于V'，则称$G'=[V', E']$是G的一个子图。例如，图5-3、图5-4均为图5-2的子图。

一个连通的并且没有圈的无向图称为树。如果无向图$G=[V, E]$的一个子图$T=[V, E']$是树，则称T是G的一个部分树。例如，图5-4是树，但不是图5-2的部分树，而图5-5、图5-6都是

图 5 -2的部分树。

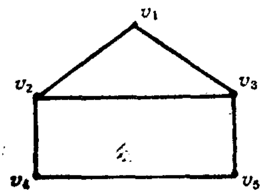

图5-2 无向图

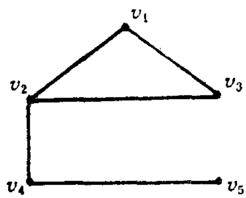

图5-3 子图（一）

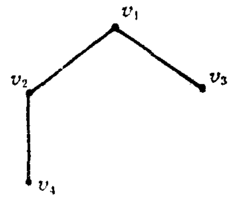

图5-4 子图（二）

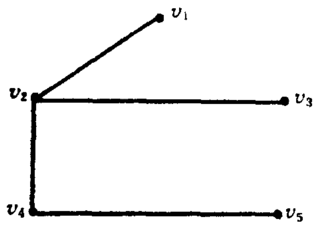

图5-5 部分树（一）

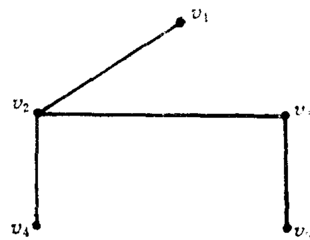

图5-6 部分树（二）

显然，G若有部分树，则G必定是连通的，G若是连通的，则G必定有部分树。

树是图论中的一个重要概念，它具有以下的重要性质：

1.在树中，任意两个顶点之间必有一条且只有一条链。

证 因为树是连通的，任意两顶点之间必然有链存在。但若两顶点之间有两条或两条以上的链存在，则必定有圈存在，这与树的定义矛盾。

2.在树中，任意去掉一条边，则图形成为不连通图。

证 如果去掉一条边后，图形仍是连通的，则把所去掉的边添上后，原来的图形中必定有圈存在，这与树的定义矛盾。

3.在树中，若在任意两个不相邻的顶点之间加上一条边，则会得到一个圈。

证 假定得不到圈，则这条加边将成为这两个顶点得以连通的唯一的边，将加边去掉后，原来的图形将不连通，这与树的定

义矛盾。

4.在树中，设顶点的个数为n，则边数为$n-1$。

证　用归纳法。当$n=2$时，上述性质显然成立。现在假定当$n=r$时上述性质成立，即当顶点的个数为r时，边数为$r-1$，则当顶点的个数为$r+1$时，由于树必须是连通的，这里$r+1$个顶点必然要有边和原来r个顶点中的某个顶点相连。又由于树不能有圈，它不可能有边和原来r个顶点中两个或两个以上的顶点相连，因此边数为r。可见上述性质成立。

二、有向图

设$V=\{v_1, v_2\cdots\cdots v_n\}$是空间中$n$个点的集合，$E=\{e_1, e_2\cdots\cdots e_m\}$是$m$条线的集合。如果$E$中的每一条线$e_i$是以$V$中的点$v_s$作为起点，点$v_t$作为终点，$E$中的任意两条线如果有交点，只能在起点或终点处相交，则由V和E组成的图形G称为一个有向图，记作$G=(V, E)$，V中的点称为G的顶点，E中的线称为G的弧。例如图5-7即为一个有向图。

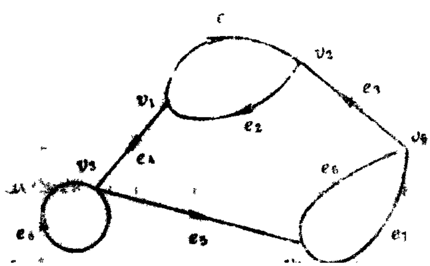

图5-7　有向图

在有向图中，如果弧e_i是以v_s作为起点，v_t作为终点，则记作$e_i=(v_s, v_t)$，而不能记作(v_t, v_s)。例如，在图5-7中，$e_1=(v_1, v_2)$，$e_2=(v_2, v_1)$，$e_4=(v_3, v_1)$，$e_6=(v_4, v_5)$，$e_7=(v_4, v_5)$，$e_8=(v_3, v_3)$等。这里的e_6，e_7有着相同的起点v_4和终点v_5，

称为平行弧，e_8的起点和终点重合，称为环。没有平行弧与环的有向图叫做简单有向图。

如果从一个有向图中去掉箭头，得到一个无向图，后者称为前者的基础图。基础图的链、简单链、初级链、圈、简单圈、初级圈分别称为原来的有向图的链、简单链、初级链、圈、简单圈、初级圈

在有向图G中，一个由点和弧的交替序列（v_{i_1}，e_{i_1}，$v_{i_2}\cdots\cdots e_{i_{k-1}}$，$v_{i_k}$）是$G$的一条链，如果又满足$e_{i_t}=(v_{i_t}, v_{i_{t+1}})\ (t=1, 2\cdots\cdots k-1)$，则称它是从$v_{i_1}$到$v_{i_k}$的一条路。在不致引起误解时，可简记为($v_{i_1}$，$v_{i_2}\cdots\cdots v_{i_k}$)，和在无向图中相同，还可类似地定义有向图的简单路和初级路。例如，在图5-7中，（v_3，e_8，v_3，e_5，v_4，e_6，v_5，e_3，v_2，e_2，v_1，e_1，v_2，e_2，v_1）是一条从v_3到v_1的路，（v_3，e_8，v_3，e_5，v_4，e_6，v_5，e_3，v_2，e_2，v_1）是一条简单路，（v_3，e_5，v_4，e_6，v_5，e_3，v_2，e_2，v_1）是一条初级路。

设（v_{i_1}，e_{i_1}，$v_{i_2}\cdots\cdots e_{i_{k-1}}$，$v_{i_k}$）是$G$的一条路，如果$v_{i_1}=v_{i_k}$，则称它是$G$的一条回路。和在无向图中相同，还可类似地定义有向图的简单回路和初级回路。例如（v_3，e_8，v_3，e_5，v_4，e_6，v_5，e_3，v_2，e_2，v_1，e_1，v_2，e_2，v_1，e_4，v_3）是G的一条回路。（v_3，e_8，v_3，e_5，v_4，e_6，v_5，e_3，v_2，e_2，v_1，e_4，v_3）是一条简单回路，（v_3，e_5，v_4，e_6，v_5，e_3，v_2，e_2，v_1，e_4，v_3）是一条初级回路。

第二节 最小树

最小树问题的提法是：设$G=[V, E]$是一个简单无向图，它的每一条边$[v_i, v_j]$都对应有一个权值c_{ij}，现在要求找出G的部分树T^*，使在T^*中所包含的各条边的权值之和有最小值，也就是要求

$$f=\sum_{(v_i,v_j)\in T^*} c_{ij} \qquad (5\text{-}2\text{-}1)$$

有最小值。这样的部分树T^*叫做G的最小部分树，简称最小树。在城市规划、公用设施、电力通讯、管道设计等实际工作中，常会遇到这类最小树问题。这里的权值c_{ij}在不同的问题中可有不同的含义。例如，它可以是距离、费用、时间等等。

设T^*是G的部分树，如果对于任意一条属于G但不属于T^*的边（v_i，v_j），我们可在T^*中找到一条由v_i至v_j的链$[v_i=v_{i_1},v_{i_2}\cdots\cdots v_{i_k}=v_j]$，则$T^*$是$G$的最小部分树的重要条件是：

$$c_{ij}\geqslant\max\{c_{i_1i_2},\ c_{i_2i_3}\cdots\cdots c_{i_{k-1}i_k}\} \qquad (5\text{-}2\text{-}2)$$

于是，若把不属于T^*的边$[v_i, v_j]$加入T^*，在由此得到的圈中，权值c_{ij}必定不小于这个圈中其它各条边的数值。

利用上述性质，可以得到寻找最小树的两种算法。

一、选边法

先选出一条权值最小的边，从这条边出发，继续从余下的边中选取权值小但与由已选出的边所组成的图不构成圈的边添加进去，直至得到一个部分树为止。

例 某厂准备在四个部门v_1至v_4之间架设电话线，各部门之间的距离如图5-8所示，试求电话线总长最小的架设方案及其总长是多少？

解 首先选取权值最小的边$[v_1, v_2]$，再选取权值小的$[v_2, v_3]$和$[v_1, v_4]$，它们都用粗线表示。此时，四个顶点都已包括在由选出的边所组成的图形内，将这个图形连通，无圈，即为所求的最小树，总长为28。

二、破圈法

任取一个圈，从中去掉一条权值最大的边，直至图中不再有圈为止。

例 试求图5-9的最小部分树。

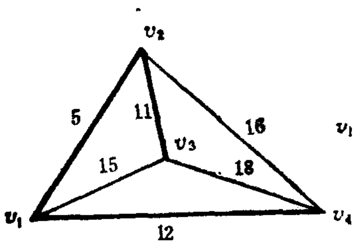

图5-8　选边法求解举例

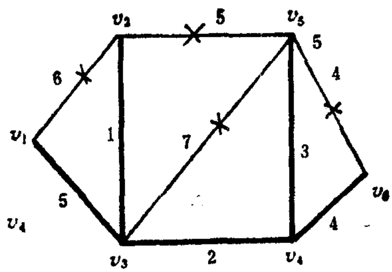

图5-9　破圈法求解举例

解　在圈$[v_1, v_2, v_3, v_1]$中，去掉权值最大的边$[v_1, v_2]$；在圈$[v_2, v_5, v_3, v_2]$中，去掉权值最大的边$[v_5, v_3]$；在圈$[v_4, v_5, v_6, v_4]$中，去掉权值最大的边$[v_5, v_6]$或$[v_4, v_6]$；在圈$[v_2, v_5, v_4, v_3, v_2]$中，去掉权值最大的边$[v_2, v_5]$。至此，图中不再有圈，即得到所求的最小树，用粗线描出，权值之和为15。

第三节　最短路问题

最短路问题的提法是：设$G=(V, E)$是一个简单有向图，它的每一条弧(v_i, v_j)都对应有一个权值c_{ij}，现要求从顶点v_1（或其它某个顶点v_s）到顶点v_t的所有的路中，把各条弧的权值总和有最小值的路找出。在交通运输、工厂布局、设备更新、线路设计等实际工作中，都会遇到这类最短路问题。下面介绍两种算法。

一、Dijkstra算法（适用于$c_{ij}\geqslant 0$的情况）

整个算法将分成若干轮进行，在每一轮中都将求出顶点v_1到其余某个顶点的最短路及其长度。因此，若要找到从v_1到v_n的最短路，将不会超过$n-1$轮。

当我们求得从v_1到某个顶点v_j的最短路时，v_j将被赋予两个

标号(α_j, β_j)。其中α_j是个实数，表明从v_1到v_j的最短路中各条弧的权值之和；β_j是个非负整数，表明在这条最短路上紧接在v_j之前的顶点的足标。这个在v_j之前的顶点如果不是v_1，则必定已经赋予具有相同意义的两个标号。循此逆推下去，即可把这一最短路从v_1出发所依次经过的顶点一一列举出来。这样的方法叫做标号法。*Dijkstra*算法及后面将要介绍的*Ford*算法均为标号法。

开始，给顶点v_1以标号（0，0），接下来进入各轮的计算，每一轮都包含三个步骤。

第一步：求出弧集合$X=\{(v_i, v_j) | v_i$已标号，v_j未标号$\}$。如果X是空集，则表明从所有已经赋予标号的顶点出发，不再有这样的弧，它的另一顶点尚未标号，这时，计算结束。对于已有标号的顶点，可求得从v_1到达这个顶点的最短路，对于没有标号的顶点，则不存在从v_1到达这个顶点的路；如果X不是空集，转入下一步。

第二步：对于X中的每一条弧(v_i, v_j)，计算$d_{ij}=\alpha_i+c_{ij}$。这里的α_i是已有标号的顶点i的第一个标号，c_{ij}是(v_i, v_j)的权值。再从所有这些d_{ij}中找出它的最小值，设为d_{st}，即它属于弧(v_s, v_t)，则赋予v_t以标号(α_t, β_t)。这里的$\alpha_t=d_{st}=\min\{d_{ij}\}$，$\beta_t=s$。

第三步：检查一下是否所有的顶点都已得到标号，则计算结束，其从v_1到任一顶点的最短路即可求得；否则转入下一轮，并重新回到第一步。

例1 试求图5-10中从顶点v_1到其余各个顶点的最短路。

解 首先，赋予顶点v_1以标号（0，0），然后进入各轮的计算。

在第一轮中，第一步先求出以v_1为起点，而其终点尚未有标号的弧集合$X^{(1)}=\{(v_1\ v_2), (v_1\ v_3), (v_1\ v_4)\}$，$X^{(1)}$不是空集；第二步计算$d_{12}=\alpha_1+c_{12}=0+10=10$，$d_{13}=\alpha_1+c_{13}=0+15=15$，$d_{14}=\alpha_1+c_{14}=0+8=8$，$\min\{d_{12}, d_{13}, d_{14}\}=d_{14}=8$，赋予顶点

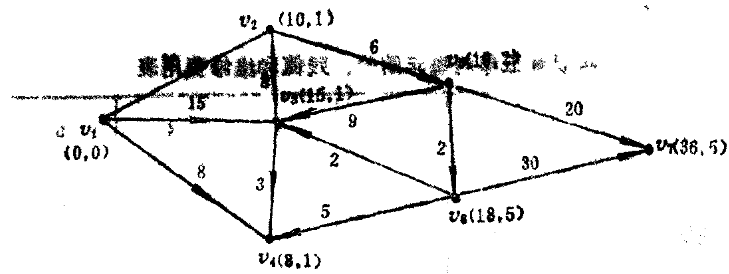

图5-10 *Dijkstra*法求解举例（一）

4以标号（8，1）。至此，由于不是所有顶点都已得到标号，乃转入第二轮。

在第二轮中，第一步先求出以v_1，v_4为起点而其终点尚未有标号的弧集合$X^{(2)}=\{(v_1\ v_2),\ (v_1\ v_3)\}\neq\phi$；第二步计算$d_{12}=10$，$d_{13}=15$，$\min\{d_{12},\ d_{13}\}=d_{12}=10$，赋予顶点2以标号（10，1）。

在第三轮中，$X^{(3)}=\{(v_1,\ v_3),\ (v_2,\ v_3)\}\neq\phi$，$d_{13}=15$，$d_{23}=\alpha_2+c_{23}=10+8=18$，$\min\{d_{13},\ d_{23}\}=d_{13}=15$，赋予顶点3以标号（15，1）。

在第四轮中，$X^{(4)}=\{(v_2,\ v_5)\}\neq\phi$，$d_{25}=\alpha_2+c_{25}=10+6=16$，赋予顶点5以标号（16，2）

在第五轮中，$X^{(5)}=\{(v_5,\ v_6),\ (v_5,\ v_7)\}\neq\phi$，$d_{56}=\alpha_5+c_{56}=16+2=18$，$d_{57}=\alpha_5+c_{57}=16+20=36$，$\min\{d_{56},\ d_{57}\}=d_{56}=18$，赋予顶点6以标号（18，5）。

在第六轮中，$X^{(6)}=\{(v_5,\ v_7)\}\neq\phi$；$d_{57}=36$，赋予顶点7以标号（36，5）。至此，全部顶点都已得到标号，计算结束，自顶点1至其余任一顶点的最短路都已求得。例如，从顶点1至顶点7的最短路为$v_1\to v_2\to v_5\to v_7$，路程长为36，从顶点1至顶点6的最短路为$v_1\to v_2\to v_5\to v_6$，路程长为18。

例2 某厂在五年期内都要用到某项设备，这项设备在五年

期内每年的购价、残值和维修费用估计如表5-1。试 讨 论这台设备的更新方案。

表5-1　某项设备五年内每年购价、残值和维修费用表

年　别　i	1	2	3	4	5
购价p_i	100	105	110	115	120
残值s_i	50	25	10	5	2
维修费用r_i	30	40	50	75	90

解　令c_{ij}为第i年购进设备至第j年($j>i$)初更新 的全部费用支出，则

$$c_{12}=p_1+r_1-s_1=100+30-50=80$$

$$c_{13}=p_1+(r_1+r_2)-s_2=100+(30+40)-25=145$$

$$c_{14}=p_1+(r_1+r_2+r_3)-s_3=100+(30+40+50)-10=210$$

$$c_{15}=p_1+(r_1+r_2+r_3+r_4)-s_4=100+(30+40+50+75)-5$$
$$=290$$

$$c_{16}=p_1+(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5)-s_5=100+(30+40+50+75$$
$$+90)-2=383$$

$$c_{23}=p_2+r_1-s_1=105+30-50=85$$

$$c_{24}=p_2+(r_1+r_2)-s_2=105+(30+40)-25=150$$

$$c_{25}=p_2+(r_1+r_2+r_3)-s_3=105+(30+40+50)-10=215$$

$$c_{26}=p_2+(r_1+r_2+r_3+r_4)-s_4=105+(30+40+50+75)-5$$
$$=295$$

$$c_{34}=p_3+r_1-s_1=110+30-50=90$$

$$c_{35}=p_3+(r_1+r_2)-s_2=110+(30+40)-25=155$$

$$c_{36}=p_3+(r_1+r_2+r_3)-s_3=110+(30+40+50)-10=220$$

$$c_{45}=p_4+r_1-s_1=115+30-50=95$$

$$c_{46}=p_4+(r_1+r_2)-s_2=115+(30+40)-25=160$$

$$c_{56}=p_5+r_1-s_1=120+30-50=100$$

下面作出以c_{ij}为权值的有向图（见图5-11），并由*Dijkstra*算法求得各顶点的标号。

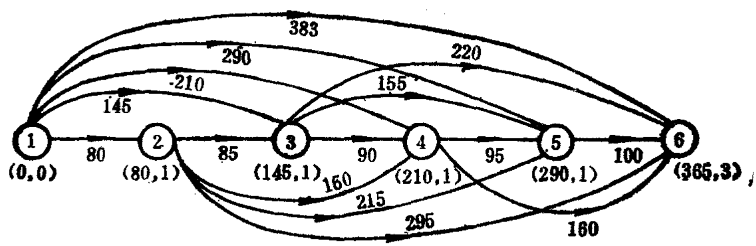

图5-11　*Dijkstra*法求解举例（二）

由此可知，最短路为(v_1, v_3, v_6)，最佳更新方案应是在第三年初更新一次。

例3　试求例1中从顶点v_3到其余各个顶点的最短路（见图5-12）。

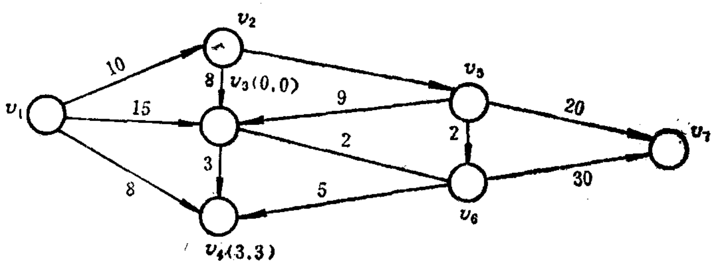

图5-12　*Dijkstra*法求解举例（三）

解　首先，赋予顶点v_3以标号（0，0），然后进入各轮的计算。

在第一轮中，$X^{(1)}=\{(v_3, v_4)\}\neq\phi$，$d_{34}=\alpha_3+c_{34}=0+3=3$，赋予顶点4以标号（3，3）。

在第二轮中，$X^{(2)}=\phi$，即不存在以有标号的顶点v_3，v_4作为起点而以没有标号的顶点作为终点的弧，计算结束。