



汽车空气动力学 数值计算

傅立敏 著

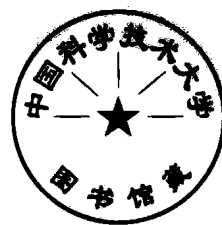


北京理工大学出版社

1005244

汽车空气动力学数值计算

傅立敏 著



北京理工大学出版社

内 容 简 介

汽车空气动力特性对汽车动力性、经济性和操纵稳定性有着直接影响,是评价汽车造型优劣的重要依据,已经成为当今汽车技术发展的一门新的学科。本书是根据作者多年的教学、科研成果著写的,介绍了汽车空气动力学的基本理论、基本计算方法,并列举大量的实例和计算机计算程序,是研究汽车空气动力学的一本较好的指导用书。

本书可作为高等学校汽车专业研究生、本科生的教材,也可作为汽车专业工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

汽车空气动力学数值计算/傅立敏著. —北京:北京理工大学出版社. 2001. 1
ISBN 7-81045-727-6

I. 汽… II. 傅… III. 汽车-空气动力学-数值计算 IV. U461. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 66786 号

责任印制:王 军 责任校对:陈玉梅

北京理工大学出版社出版发行
(北京市海淀区中关村南大街 5 号)
邮政编码 100081 电话 (010) 68912824
各地新华书店经售
涿州市星河印刷厂印刷
87 毫米×1092 毫米 16 开 12 印张 288 千字
2001 年 1 月第 1 版 2001 年 1 月第 1 次印刷
印数:1-1500 册 定价:30.00 元

※图书印装有误,可随时与我社退换※

出版说明

为贯彻汽车工业产业政策，推动和加强汽车工程图书的出版工作，中国汽车工程学会成立了“汽车工程图书出版专家委员会”。委员会由有关领导机关、企事业单位、大中专院校的专家和学者组成，其中心任务是策划、推荐、评审各类汽车图书选题。图书选题的范围包括：学术水平高、内容有创见、在工程技术理论方面有突破的应用科学专著和教材；学术思想新颖、内容具体、实用，对汽车工程技术有较大推动作用，密切结合汽车工业技术现代化，有高新技术内容的工程技术类图书；有重要发展前景，有重大使用价值，密切结合汽车工程技术现代化需要的新工艺、新材料图书；反映国外汽车工程先进技术的译著；使用维修、普及类汽车图书。

出版专家委员会是在深化改革中，实行专业学会、企业、学校、研究所等相互结合，专家学者直接参与并推动专业图书向高水平、高质量、有序发展的新尝试。它必将对活跃、繁荣专业著作的出版事业起到很好的推动作用。希望各位同仁、专家积极参与、关心、监督我们的工作。限于水平和经验，委员会推荐出版的图书难免存在不足之处，敬请广大同行和读者批评指正。

本书由傅立敏著，范士杰主审，经专家委员会评审通过、推荐出版。

汽车工程图书出版专家委员会

序 言

节能、安全与排放是汽车领域的三大课题，而汽车空气动力特性与上述三大课题密切相关。汽车空气动力特性对汽车动力性、经济性和操纵稳定性有直接影响，改善空气动力特性是提高汽车经济性和保障安全性的前提，控制汽车排放是保护环境的重要环节。当今世界，汽车空气动力特性已成为评价汽车造型优劣的重要依据，也是汽车在激烈的市场竞争中能否取胜的重要因素。

汽车空气动力学有试验和理论两种方法。近年来，伴随计算机的发展及计算技术的进步，数值研究取得了迅猛的发展，并且取代了以解析解为中心的理论研究。数值研究被称为流体数值计算 (Numerical Simulation of Fluid Flows)、计算流体力学 (Computational Fluid Dynamics)、数值流体力学 (Numerical Fluid Dynamics) 等，本书将汽车空气动力学数值计算简称为 CFD。

在解决汽车空气动力学的问题时，风洞试验和 CFD 都是必要的手段，两者不是孤立的，而是应相互补充和配合。

本书前四章介绍了流体数值解析的基础、差分法、有限元法、边界积分法，第五章介绍了作者从事汽车空气动力学数值计算的实例，其中第三节由作者的硕士研究生吕明忠的毕业论文整理而成。为便于理解，书中除叙述了计算理论方法外，还加入了程序例。本书可作为高等学校汽车空气动力学专业的教材，也可供本专业工程技术人员参考。

本书由国家自然科学基金 (课题号 19672021) 资助。撰稿过程中得到吉林大学王靖宇、王慧勇老师以及作者的学生沈俊、吕明忠、扶原放、严鹏；长春汽车研究所高级工程师范士杰的大力协助。本书的部分图稿由作者的学生曲小飞协助整理完成，在此致以衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中错误不当之处在所难免，恳请读者及同行批评指正。

目 录

第一章 流体数值解析基础

第一节 流动的基本性质和基本公式	(1)
一、流动的基本性质	(1)
二、位势流	(5)
三、粘性流体的流动	(6)
第二节 数值计算法基础	(8)
一、插值法	(8)
二、数值积分法	(12)
第三节 网格形成法	(14)
一、解析网格形成法	(16)
二、代数网格形成法	(18)
第四节 联立一次方程的解法	(20)
一、直接法	(20)
二、迭代法	(29)
第五节 程序设计	(33)
一、流动解析的顺序	(34)
二、流动解析的原则	(35)
三、FORTRAN 法	(36)
四、计算结果的显示	(38)
五、软件商品化	(41)

第二章 差分法

第一节 差分法基础	(42)
一、差分法概述	(42)
二、基于泰勒 (Taylor) 展开的诱导差分式	(43)
三、由多项式近似诱导差分式	(44)
四、泊松 (Poisson) 方程式的边界值问题	(45)
五、伯格方程 (Burgers Equation) 的初始值问题	(47)
六、有限体积法	(53)
七、特征解法	(54)
第二节 非压缩非粘性流动	(55)
一、无涡流动 (位势流) 的解析方法	(55)
二、有涡度的非粘性流动	(56)
三、数值计算程序——翼周围的位势流	(60)
第三节 非压缩粘性流动	(65)
一、粘性流动的基础方程式	(65)
二、用流动函数 ψ 和涡度 ω 的方法	(66)
三、用流速 u 和压力 p 的方法	(70)
第四节 边界层流动	(77)
一、边界层的概念及解法概要	(77)
二、坐标转换与伸长网格	(80)
三、非压缩性边界层流动的标准问题	(82)

四、逆边界层问题和主流、边界层干涉(管内非压缩性助走流)	(91)
------------------------------	------

第三章 有限元法

第一节 有限元基础	(93)
一、有限元法简介	(93)
二、单元分割	(95)
三、插值函数	(96)
四、变分 FEM	(100)
五、加权余量法	(101)
六、三角形一次单元的程序	(102)
第二节 非压缩非粘性流动	(104)
一、位势流	(105)
第三节 非压缩性粘性流动	(109)
一、二元非压缩性粘性流体方程式	(109)
二、基本方程的离散化	(110)
三、涡度的边界条件处理	(113)
四、数值算法	(114)
五、计算例	(115)
六、程序	(118)
第四节 应用解析例	(120)
一、物质的扩散	(120)
二、数值计算例	(121)
第五节 程序应用	(122)

第四章 面元法

第一节 概述	(124)
第二节 边界积分法	(125)
一、概述	(125)
二、诱导积分方程式	(126)
三、边界积分方程式	(129)
四、拉普拉斯(Laplace)边界积分方程式的表现	(130)
五、边界条件与积分方程式的形式	(133)
第三节 特异点法	(135)
一、概述	(135)
二、边界积分方程式	(135)
第四节 离散涡法	(136)
一、离散涡法的基本概念	(136)
二、微小涡的注入方法	(137)
三、微小涡的时间移动	(138)
四、微小涡运动的修正及涡度扩散模型	(139)
五、流动解析参数	(140)

第五章 汽车空气动力学数值计算

第一节 理论汽车空气动力学	(142)
第二节 计算汽车空气动力学	(144)
一、CFD 的概况	(145)
二、CFD 进行数值模拟方法与理论方法和实验方法相比的一些优点	(145)
三、数值方法所存在的缺陷及其应用地位	(145)
四、汽车流场数值模拟方法分析	(145)
五、汽车流场数值模拟的边界问题	(149)

六、国内外计算汽车空气动力学软件的开发情况	(150)
第三节 红旗 CA774 轿车二维外流场数值模拟	(151)
一、ANSYS 的 CFD 功能	(151)
二、ANSYS 模拟汽车外流场的控制方程	(151)
三、ANSYS 模拟汽车外流场的过程	(151)
四、红旗 CA774 轿车二维外流场的数值模拟	(153)
第四节 汽车尾流场的特性分析	(159)
一、汽车流场的组成	(159)
二、汽车尾流场的构成特点	(160)
三、汽车尾流场的湍流特性	(166)
四、汽车尾流场特性与汽车尾部外型的关系	(169)
五、汽车尾流场特性与气动性能的关系	(172)
六、汽车尾流的控制	(173)
第五节 汽车三维分离流动特性的数值计算	(175)
一、数值计算方法	(175)
二、基础方程式	(177)
三、坐标转换	(178)
四、计算的初始条件及边界条件	(179)
五、数值计算结果及其分析	(180)
参考文献	(183)

第一章 流体数值解析基础

第一节 流动的基本性质和基本公式

一般根据支配流体运动的物理法则建立基本方程式,并给出解析对象的粘性系数和热传导率等表征其物理性质的必要的边界条件参数,进行流体的数值计算。

本章对与流体的粘性及热相关的问题进行了叙述,并以计算和进行流动解析为目的,以二元流动为主,介绍了用直角坐标系表示的流体运动的方程式和边界条件。

一、流动的基本性质

物质的状态分为固体、液体和气体三种。液体与气体统称为“流体”。流体与固体不同,流体可自由变形,没有固有的形态。根据密度变化把流体分为液体和气体,气体比液体密度容易变化。但是,对于流速小于音速的流体,无论是气体还是液体,可以不考虑密度的变化。本书在假设流体密度 ρ 为定值“不可压缩性流”的前提下,介绍了流体数值计算。

(一) 流线、流迹线与流脉线

如图 1-1 所示,在流体中放入示踪液(有色液体),由示踪液形成如图中粗线所示的曲线称为“流脉线”,B 点的有色液体的粒子实际通过如虚线所示的流动线,这条曲线称“流迹线”。流脉线与流迹线不同的原因是由于流态随时间而变化,例如:有色液体在到达 B 点的瞬间,流动如图中细线所示,在该曲线上的各点的流动都与流动方向一致,称为“流线”。把流态不随时间变化,流线与流迹线及流脉线三者一致的流动称为“定常流”。

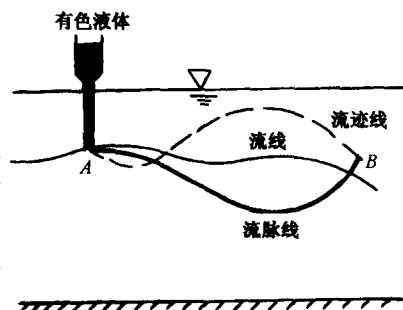


图 1-1 有色液体的流动

与此相反,如果流线随时间变化,则该流动称为“非定常流”。对于直角坐标系,流速的 x 、 y 分量分别用 u 、 v 表示,由于流线上速度矢量 $\mathbf{v}(u, v)$ 在曲线的切线方向上,在流线上,下式成立:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (1-1)$$

在同一流线上不变的物理量 ψ 称为流动函数,它在流线上的全微分为零,即

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad (1-2)$$

由式(1-1)与式(1-2)得出如下的流动函数与速度的关系:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1-3)$$

(二) 粘性与涡度

在容器中静止的水,由于重力的作用而运动。当水静止时,重力与其他力平衡,该力为沿

物体表面法线方向运动的应力,称为“压力”,用 p 表示。如图 1-2 所示,由流体粒子构成的立方体(图中表示一个正方体流体)压力完全与表面垂直,左右的压力正好相等,横向不动,而上下方向由于下面的压力大,使立方体产生向上的力,亦即浮力。但是浮力正巧与重力平衡,流体上下运动的力为零,因此流体可保持静止状态。

运动的流体由于粘性产生与运动方向相反的摩擦力,该摩擦力称为剪应力,它是在流体表面沿切线方向运动的力,用 τ 表示,如图 1-3 所示。

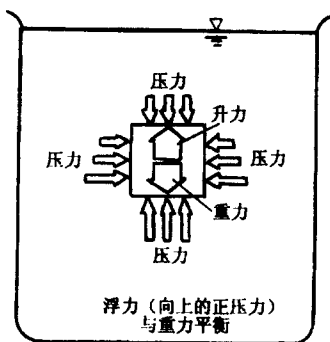


图 1-2 容器中静止的水上作用的力

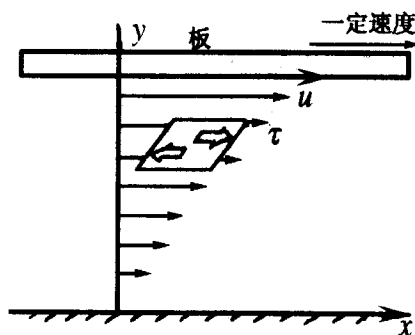


图 1-3 平行板间流体作用的剪应力

流体粘性:在流体上面以一定速度运动的平板由于其附着在板上流体的影响逐渐波及到下层,在流体中产生流动,由于粘性作用,上层流体向下层传送动量,剪应力 τ 与速度梯度 du/dy 成正比,流体内部分子摩擦产生粘度,它表明了相对于速度梯度所产生的动量变化。流体具有阻抗各层之间的相对滑动的性质,叫做粘性。根据平行于平面流的牛顿定律有:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-4)$$

式中 μ 为粘性系数,它是如上式所示以剪应力与速度梯度 du/dy 的比来定义,它只与流体的种类及温度有关,但在实际应用中经常采用粘性系数与密度之比即“动粘性系数”表示:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1-5)$$

式中 ν 为运动粘度,它与温度和压力有关,例如:水的粘性系数为 $1.14 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$,空气为 $1.7894 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$;水的动粘性系数为 $1.14 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$,空气为 $1.78 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$,与动力粘性系数相反,空气的动粘性系数比水大。

实际流体是带有粘性并有剪应力作用的,称为粘性流体。对有些问题可以不考虑流体的粘性,把流体作为理想流体考虑,这样的流体称为完全流体或理想流体,理想流体运动中也不产生剪应力。

由于粘性流体的流动具有剪应力,即使没有回流存在,也存在涡流,如图 1-4 所示。

当流动有剪切力时,在流体中放置的齿轮回转,由于齿轮 A 上方比下方流速快,逆时针旋转,而齿轮 B 下方的流速比上方快,顺时针方向回转。导入由下式定义的“涡度”的物理量表征这个涡运动特征:

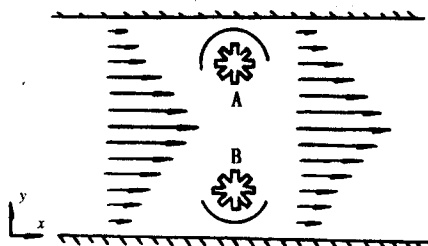


图 1-4 由流动的速度梯度产生的涡流

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1-6)$$

如齿轮 A 那样逆时针旋转为正,如齿轮 B 那样顺时针方向回转为负,用齿轮 B 回转角速度的二倍表示涡度,当 $\omega = 0$ 时,流动无回转。

(三)热效应

热转换有传导、对流、放射三种形态,通常流动状态放射效应的问题很少,这里仅就传导和对流加以说明。

当流体内部温度不均衡时,产生热传导,温度不均衡性并不使流体内部产生物质的移动,仅产生热传送,这种现象称为热传导。对于热流束和温度分配之间有 Fourier(傅里叶)法则成立,即

$$q = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (1-7)$$

式中 q 为热流量(单位时间内通过单位面积的热量); χ 为热传导系数; $\Delta T/\Delta x$ 为温度变化率。

当温度不均衡性进一步增大时,由于流体的热膨胀、流体的重力和浮力不对等而产生热对流,在物质移动的同时由于对流导致热传送,如图 1-5 所示。

在密闭的容器内,温度为 T_0 的物质,如果流体中某一部分温度转换为 T 时,该流体块单位质量所受到的力以下式表示:

$$F = \beta g (T - T_0) \quad (1-8)$$

式中 g 为重力加速度; β 为热膨胀率。

当 $T > T_0$ 时,流体块则受到正的力向上运动,如果 $T < T_0$ 流体块则受到负的力而下降。

(四)流动的相似准则

流体与固体不同,具有不具备自身形状的特征,通常即使物体的形状相同其运动也不相似。当流体的运动满足相似准则时,既使自然界中很复杂的现象也能在试验室中再现。对于尺度不同才能使流动相似的两个流动必须要满足无量纲系数——雷诺数(Reynolds)相似的条件。

雷诺数为

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1-9)$$

式中 U 为平均流速; L 为代表流动的特征长度; ν 为动粘性系数。

图 1-6 表明不同雷诺数引起的流动的变化。

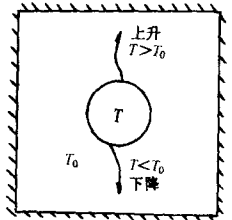


图 1-5 流体块与升力

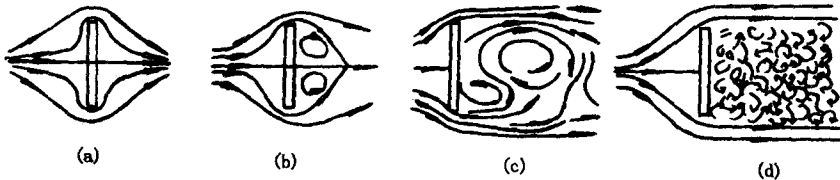


图 1-6 由雷诺数大小产生的不同流动

(a) $Re \approx 0.1$; (b) $Re \approx 10$; (c) $Re \approx 100$; (d) $Re \approx 10^6$

用垂直于流体放置的平板,观察其周围的流动,当 $Re \ll 1$ 时,出现如(a)所示板的附着流动,这种流动称为层流。当 $Re \gg 1$ 的情况下,如(d)所示在板的后部出现离散的不规则的流

动,这种状态称为紊流。当 Re 在(a)和(d)之间时,形成如(b)和(c)所示规则的涡系,特别是当出现如图(c)那样二列回转方向顺次交替的并列涡,称为“Kármán(卡门)涡列”。

当对粘性流体引入热效应时,引入两个无量纲系数“Grashoff(格拉晓夫)数”和“Prandtl(普朗特)数”,则可使相似准则成立。

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2} \quad (1-10)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\chi} \quad (1-11)$$

式中 ΔT 为温度差; χ 为温度传导率(热扩散系数)。

例如,如图 1-7 所示把水注入两平板间,对其下面慢慢地加热,观察其流态,把 Grshoff(格拉晓夫)数与 Prandtl(普朗特)数乘积称为雷列数,其特征是无量纲数。

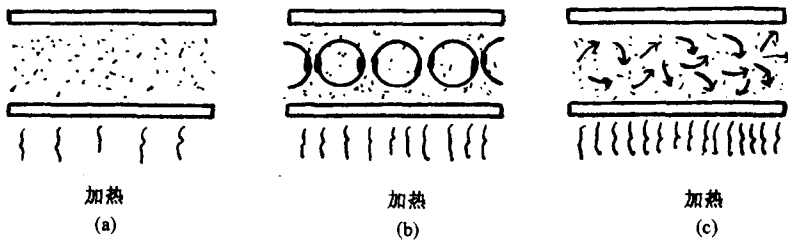


图 1-7 由雷诺数大小不同而产生不同的热对流
(a) $Ra \leq 1700$; (b) $1700 \leq Ra \leq 50000$; (c) $Ra \geq 50000$

$$Ra = Gr \times Pr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\chi} \quad (1-12)$$

在 $Ra \leq 1700$ 时,由于热传导,流体从下层向上层运动,温度分布呈线性,但在(a)状态下,流体静止不动;当 Ra 超过 1700 时,突然出现了不稳定,产生比传导效率高的热输送对流移动,该对流如同(b)那样,上升与下降呈规则细胞状的排列,称 Benard(贝那鲁)型对流;当 Ra 进一步增大超过 5000 时,规则的对流呈混乱的紊流状态。

表 1-1 表示与粘性流体和热对流流动相关的热对流流动的各种无量纲参数。表 1-2 给出了水和空气的各种标准的物理特性值。

表 1-1 无量纲数

无量纲数	定义式	备注
Reynolds(雷诺)数	$Re = UL/\nu$	U 流速[m/s] L 特征长度[m]
Grashoff(格拉晓夫)数	$Gr = g\beta\Delta TL^3/\nu^2$	ν 动粘性系数[m ² /s]
Prandtl(普朗特)数	$Pr = \nu/\chi$	g 重力加速度[m/s ²] β 热膨胀率[1/K]
Rayleigh(雷利)数	$Ra = g\beta\Delta TL^3/(\nu\chi)$	ΔT 温度差[K] χ 温度传导率[m ² /s]

表 1-2 15°C、一个大气压下水和空气的物理性质参数

物理特性参数	水	空气
密度 $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	999.1	1.225
粘性系数 $\mu/(\text{Pa}\cdot\text{s})$	1.14×10^{-3}	1.78×10^{-3}
运动粘性系数 $\nu(\text{m}^2/\text{s})$	1.14×10^{-6}	1.45×10^{-5}
热传导系数 $X/(\text{J}/(\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{K}))$	5.9×10^{-1}	2.51×10^{-2}
温度传导率 $\chi/(\text{m}^2/\text{s})$	1.40×10^{-7}	2.02×10^{-5}
热膨胀率 $\beta/(1/\text{K})$	1.5×10^{-4}	3.84×10^{-3}

二、位势流

把矢量演算 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ 称为拉普拉斯算子, ∇ 与 ∇ 的内积的矢量演算式称为拉普拉斯算式, 记为:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

对于流动无回转的情况下的非粘性流体的流动, 速度 $\mathbf{v}(u, v)$ 可用任意的标量 Φ 的梯度表示, 这个标量 Φ 称为速度势, 以下式定义:

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (1-13)$$

由非压缩流体的假设, 连续式为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1-14)$$

将上式代入式(1-13)得出如下的“Laplace(拉普拉斯)方程式”:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1-15)$$

满足上述方程式的流动称为位势流, 这是最基本的流动解析式。

可用流动函数把位势流公式化, 由于涡度为零, 在式(1-6)中 $\omega = 0$ 代入(1-3)式得出方程式:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (1-16)$$

式(1-15)、(1-16)是相同的形式, 式(1-3)、(1-13)所示的速度换算方法不同。

图 1-8 为置于速度为 U 的定常流中半径 R 的圆柱体的周围的速度, 以圆柱中心为原点, 其极坐标为 (r, θ) , 流体的任意一点 $A(r, \theta)$ 的速度势 Φ 及流动函数 ψ 分别表示如下:

$$\Phi = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \quad (1-17)$$

$$\psi = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta \quad (1-18)$$

图中实线为流线, 虚线为等速度势线, 流线与等速度势线互相垂直。

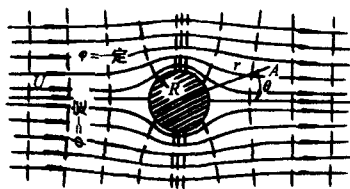


图 1-8 圆柱周围的流动

三、粘性流体的流动

(一) Navier - Stokes(纳维埃 - 斯托克斯)方程式

实际流体是有粘性的,因此流体有剪切应力作用,产生涡流,另外在流体与壁面接触区,流体在壁面附着的同时也产生运动。

与应力相对应,把式(1-4)扩展,有以下的 Newton(牛顿)流体法则成立:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu\partial u/\partial x & \mu(\partial v/\partial x + \partial u/\partial y) \\ \mu(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) & -p + 2\mu\partial v/\partial y \end{pmatrix} \quad (1-19)$$

式中 τ_{xx} 、 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{yy} 为应力张量。

对于时间 t 、位置 (x, y) 、流速为 $u(x, y, t)$ 、 $v(x, y, t)$ 的流体经过时间 Δt 后位置移动为 $(x + u\Delta t, y + v\Delta t)$, 这时流速的变化为 Δu 、 Δv 由下式给出:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + u\Delta t, y + v\Delta t, t + \Delta t) - u(x, y, t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial u}{\partial y} v\Delta t + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + (\Delta t \text{ 的二次方以上的项}) \\ \Delta v &= v(x + u\Delta t, y + v\Delta t, t + \Delta t) - v(x, y, t) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial v}{\partial y} v\Delta t + \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t + (\Delta t \text{ 的二次方以上的项}) \end{aligned}$$

在流动方向流速的时间变化,即加速度 Du/Dt 、 Dv/Dt 为

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{Dv}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

式中 D/Dt 称为 Lagrange(拉格朗日)微分。

粘性流体的基本方程式有连续式和运动式,连续式是由质量守恒求出,运动方程式由动量守恒求出,在非压缩性假定的前提下,由下式表示:

$$\text{连续式} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1-20)$$

$$\text{运动方程式} \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (1-21)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (1-22)$$

运动方程式的左边为单位体积当量(质量 \times 加速度),即表示惯性力,右边表示单位体积流体中产生的力,因此运动方程式满足 Newton(牛顿)的运动第二定律($ma = F$)的形式。把关系式(1-19)的各相应项代入式(1-21)、(1-22),用式(1-20)整理,得出 Navier - Stokes(纳维埃 - 斯托克斯)方程式。

Navier - Stokes 方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (1-23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (1-24)$$

Navier - Stokes 方程式左边第一项表示流场中特定点的速度随时间的变化,如果左边第一项为零,则表明流动是不随时间变化的定常流。左边第二、三项称为移动项,是由运动量的移

动生成的。右边第一项是由压力生成,是流动的原动力。右边的第二项称为粘性项,表示流动的粘性。这项大时,流体成为缓慢的速度变化小的流动;这项小时,成为离散状、速度变化大的流动。

根据 Navier - Stokes 方程式,为消除压力项,对(1-24)式用 x 微分得到的等式减去对(1-23)式进行 y 微分得到的等式,用式(1-6)、(1-20)加以整理得出以下的“涡度方程式”:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega. \quad (1-25)$$

用式(1-3)可计算 u, v ,把式(1-3)代入式(1-6),则流动函数 ψ 与涡度 ω 成如下关系:

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (1-26)$$

对流体的解析有用式(1-20)、(1-23)、(1-24)直接求流速 u, v 方法和由式(1-25)、(1-26)求涡度和流动函数后再根据式(1-3)求流速的间接方法,本书中为求出数值上的稳定解,用后种方法。

式(1-25)与式(1-26)是在解析领域 Ω 内部成立的基础方程式,仅用上两式不能解出确定解,由于两式都有关于空间变数 x, y 的二阶微分,能给出一阶微分的边界条件。考虑两种边界条件,一是给出的已知值的边界条件,作为“基本边界条件”,二是给出与流动函数与涡度相关的边界条件。

$$\text{关于流动的边界条件: } \psi = \psi_B \quad (x, y \in \Gamma_1) \quad (1-27)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_B = -V_s \quad (x, y \in \Gamma_2) \quad (1-28)$$

$$\text{涡度的边界条件: } \omega = \omega_B \quad (x, y \in \Gamma_3) \quad (1-29)$$

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial n} \right|_B = \omega_n \quad (x, y \in \Gamma_4) \quad (1-30)$$

这里 Γ_1, Γ_3 为各种流动的函数涡度的基本边界; Γ_2, Γ_4 为各种流动函数涡度的自然边界。另外, $\partial/\partial n$ 为向外的单位法线方向的微分。变量的下标 B 表示边界上的值, V_s 如图 1-9 所示,表示边界上的切线方向速度。

(二) Couette 库特流和 Poiseuille 泊肃叶流

对于雷诺数非常小,与粘性项比惯性项可忽略的流动,从 Navier - Stokes 方程式中除去移动项称为 Stokes 方程式,用以下的线性方程式表示。

Stokes 方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (1-31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (1-32)$$

如图 1-10(a)所示,平行板相距 L ,与其相切的二元流 A 为固定壁, B 板以速度 u 在与水面平行运动时,沿水平方向产生流动,在此情况下,沿 x 方向不产生压力变化。对于定常状态 Stokes 的方程式可用下式简单表示为:

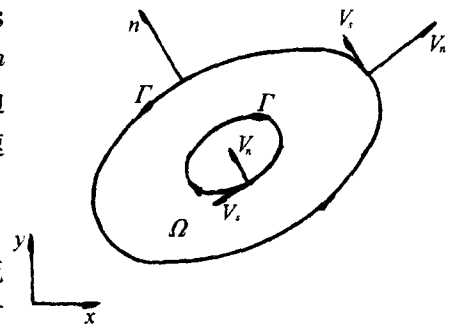


图 1-9 孔附近区域流动的切线速度 V_s 和法线速度 V_n

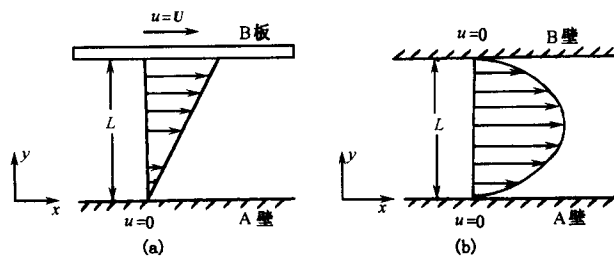


图 1-10 Couette 流和 Poiseuille 流

(a) Couette 流; (b) Poiseuille 流

$$0 = \nu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (1-33)$$

对此方程式可很容易积分求解,其一般解有如下两个积分常数 C_0 、 C_1

$$u = C_1 y + C_0 \quad (1-34)$$

为确定两个积分常数,当边界条件适用于 $y=0, u=0; y=L, u=U$ 时,其特殊解为:

$$u = \frac{U}{L} y \quad (1-35)$$

这种流动称为 Couette 流(库特流)。

如图 1-10(b)所示,当 A、B 两壁均固定时,考虑沿 x 方向的流动,在 x 方向给予一定的压力梯度 dp/dx 时流动称为 Poiseuille 流(泊肃叶流),当边界条件同时满足: $y=0, y=L, u=0$ 时,根据定常流的 Stokes 方程为:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

得出 Poiseuille 流的解为:

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (L-y)y \quad (1-36)$$

第二节 数值算法基础

一、插值法

首先对一元的插值(Interpolation)加以说明,对 $n+1$ 个点 $x_k (k=0, 1, \dots, n)$ 的 n 个函数 $u(x)$ 的值为 $u_k (k=0, 1, \dots, n)$ (见图 1-11)。数值计算中多数情况下,函数 $u(x)$ 离散为 n 个 u_k 的值,这时对任意点 x 的值 $u(x)$ 用下述插值方法求出。

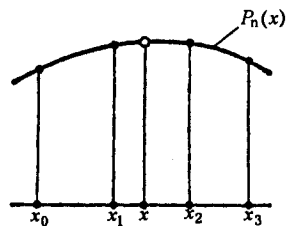


图 1-11 插值法

(一) 拉格朗日插值多项式(Lagrangian Interpolation Polynomial)

如同通过两点为一次式,通过三点为两次式,对 n 次多项式

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{\nu} \quad (1-37)$$

其中 $n+1$ 个条件为

$$u_j = P_n(x_j) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x_j^\nu \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (1-38)$$

式(1-37)中 a_ν 为 u_j 的一次式, $P_n(x)$ 便成为 u_j 的一次式, 因此可得出

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x) u_k \quad (1-39)$$

式中 $b_k(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 如果用式(1-39)、(1-38)的条件, 则

$$u_j = \sum_{k=0}^n b_k(x_j) u_k \quad (1-40)$$

比较上式两边的系数 u_k 得到

$$b_k(x_j) = \delta_{kj}$$

因此 $b_k(x)$ 具有 n 个零点 $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, b_k(x_k) = 1$ 。

$$b_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

将上式代入式(1-39)得出如下的拉格朗日插值多项式

$$u(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{L_k(x)}{L_k(x_k)} u_k \quad (1-41)$$

其中 $L_k(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$

例如 $n=1$ 或 2 时,

$$u(x) \cong P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} u_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} u_1$$

$$u(x) \cong P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} u_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} u_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} u_2$$

在计算点等间距 ($x_i - x_{i-1} = h$) 的情况下,

$$u(x_0 + ht) = (1-t)u_0 + tu_1 - \frac{1}{2!}t(1-t)h^2 u''$$

$$u(x_0 + ht) = -\frac{1}{2}t(1-t)u_{-1} + (1-t^2)u_0 + \frac{1}{2}t(1+t)u_1 - \frac{1}{3!}t(1-t^2)h^3 u'''$$

由于 $t = (x - x_0)/h$ 把式右边最后的一项泰勒展开求出连续误差 (Truncation Error)。

(二) 牛顿插值公式

当用 $x \geq x_0$ 定义函数 $u(x)$ 时, 对 x_0 附近的 u 值可用上述的拉格朗日多项式求出, 但在等间隔的情况下, 可用与其等价的牛顿前插值公式 (Newton's Forward Interpolation Formula) 可求出 $u(x)$, 该方法中

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) \quad (1-42)$$

利用(1-38)式则有:

$$a_0 + \sum_{k=1}^j a_k (x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{k-1}) = u_j \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & h & & & \\ 1 & 2h & 2h^2 & & \\ & & \dots & & \\ 1 & nh & n(n-1)h^2 \dots & n!h^n & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1-43)$$