

高等学校机械工程及自动化

机械设计制造及其自动化

专业系列教材

测试技术

贾民平 张洪亭 周剑英 主编



高等教育出版社

高等学校机械工程及自动化
(机械设计制造及其自动化)专业系列教材

测 试 技 术

贾民平 张洪亭 周剑英 主编

高等教育出版社

内容简介

本书系统地阐述了测试技术的研究对象、理论基础以及各机械量的测试方法。书中以加强学科基础、培养动手能力为宗旨,着重叙述基本的测试原理、信号的分析与处理方法、测试系统的特性以及测试技术的发展趋势,并在此基础上对位移、振动、噪声、力、力矩、压力、温度、流量等的测量分别进行了阐述。为了帮助读者掌握各章内容,设有一定量的习题。

本书是高等学校本科机械类各专业“测试技术”课程的教材,也可作为自动控制、仪器仪表类有关专业的教材。同时,对工厂、研究院以及其它从事机械工程性能试验和机电一体化产品设计、开发的工程技术人员亦有参考价值

本书是教育部新世纪网络课程“机械工程测试技术”的主要参考书之一。

图书在版编目(CIP)数据

测试技术 / 贾民平, 张洪亭, 周剑英主编 — 北京: 高等教育出版社, 2001.12

ISBN 7-04-010167-X

I 测… II ①贾… ②张… ③周… III 测试技
术 高等学校—教学参考资料 IV TB4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 075354 号

测试技术

贾民平 张洪亭 周剑英 主编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 河北新华印刷一厂

开 本 787×1092 1/16

版 次 2001 年 12 月第 1 版

印 张 18

印 次 2001 年 12 月第 1 次印刷

字 数 430 000

定 价 15.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

责任编辑	杨宪玲	
封面设计	刘晓翔	
责任绘图	郝林	尹文军
版式设计	马静如	
责任校对	康晓燕	
责任印制	孔源	

前 言

无论是工程研究、产品开发,还是质量监控、性能试验等都离不开测试技术。测试技术是一门综合性技术,涉及传感、微电子、控制、计算机、数理统计、信号处理、精密机械设计等多门学科,要求测试工作者具有深厚的多学科知识。随着机电一体化技术及计算机在测试控制领域的不断发展,加之该课程在培养学生、改造专业及促进学科交叉发展等方面的显著作用,国内外高校机械类学科都十分重视测试技术课程的教学和实验,普遍将该课程列为本科教学中的主干课程和研究生的主要课程。

全书共12章,前6章着重介绍测试技术的基本知识,包括信号的表述及其分析处理、测试系统的特性、常用传感器、信号的调理和记录、现代测试系统等,是测试技术的必修知识;强调了动态信号的测试、计算机应用及数字信号分析。后6章介绍机电工程中典型的物理量——位移、振动、噪声、力、扭矩、压力、温度、流量的测量方法和应用,不同的专业可以根据教学要求有选择地进行讲授。

测试技术是一门实践性很强的课程,为了保证教学质量,必须开设适量的实验,并可以参考与本书配套的教育部新世纪网络课程“机械工程测试技术”。

本书由贾民平、张洪亭、周剑英主编,参加编写工作的有东南大学贾民平(第5、7、8章)、东北大学张洪亭(绪论,第2、9章)、北京科技大学周剑英(第1、10章)、哈尔滨工业大学李志杰(第3、11章)、哈尔滨理工大学赵继俊(第12章)、东北大学孙红春(第4章)、东南大学许飞云(第5.2节,第6章)。全书由贾民平、张洪亭统稿。

本书由华中科技大学杨叔子院士、北京理工大学任玉田教授主审,参加审稿的还有华中科技大学史铁林教授、南京航空航天大学郑叔芳教授、南京理工大学孙宇教授。他们对全书进行了全面、认真、细致的审读工作,提出了许多宝贵意见,编者在此表示深切谢意。

本书是高等学校机械工程及自动化专业系列教材之一。首次推出9本书,分别为:工程材料及成形技术基础、机械制造技术基础、控制工程基础、数控技术、测试技术、液压与气压传动、机电传动控制、计算机辅助设计与制造、机电一体化系统设计。本书可作为本科机械类各专业“测试技术”课程的教材,也可作为自动控制、仪器仪表类有关专业的教材。同时,对工厂、研究院以及其它从事机械工程性能试验和机电一体化产品设计、开发的工程技术人员亦有参考价值。

由于编者水平所限,时间仓促,书中难免有错误和不妥之处,恳请各位专家、读者批评指正。

编者

2001年8月

目 录

绪论	1	5 4 滤波器	144
第 1 章 信号及其表述	5	5 5 信号记录装置	156
1 1 信号的分类	5	第 6 章 现代测试系统	165
1 2 信号的表述	8	6.1 计算机测试系统的基本组成	165
1 3 几种典型信号的频谱	23	6 2 总线技术	171
第 2 章 信号的分析与处理	31	6 3 虚拟仪器	179
2 1 信号的时域分析	31	6 4 网络化测试仪器	182
2 2 信号的相关分析	36	第 7 章 位移的测量	187
2 3 信号的频域分析	45	7 1 常用位移传感器	187
2 4 数字信号处理基础	57	7 2 位移测量应用实例	188
第 3 章 测试系统的特性	70	第 8 章 振动的测量	196
3 1 测试系统及其主要性质	70	8.1 振动的基础知识	196
3 2 测试系统的静态特性	72	8 2 振动的激励与激振器	201
3 3 测试系统的动态特性	74	8.3 振动测量与测振传感器	207
3 4 测试系统在典型输入下的响应	81	第 9 章 噪声的测量	224
3.5 实现不失真测试的条件	82	9.1 噪声测量的主要参数	224
3.6 测试系统静态特性和动态特性的测定	84	9.2 噪声的分析方法与评价	227
3.7 测量误差的基本概念	87	9.3 噪声测量仪器	232
第 4 章 常用传感器	91	9.4 噪声测量及其应用	235
4 1 传感器概述	91	第 10 章 力、扭矩、压力的测量	239
4.2 传感器选用原则	94	10.1 力的测量	239
4.3 电阻式传感器	96	10.2 扭矩的测量	249
4 4 电感式传感器	102	10.3 压力的测量	253
4.5 电容式传感器	109	第 11 章 温度的测量	258
4 6 压电式传感器	113	11.1 温度标准与测量方法	258
4 7 磁电式传感器	117	11.2 热电偶温度计	260
4.8 光电式传感器	121	11.3 热电阻温度计	264
4 9 新型传感器	125	第 12 章 流量的测量	268
第 5 章 信号的调理与记录	129	12.1 容积式流量计	268
5 1 电桥	129	12 2 差压式流量计	270
5 2 信号的放大与隔离	133	12.3 流体阻力式流量计	272
5 3 调制与解调	137	12.4 测速式流量计	274
		主要参考文献	280

绪 论

1. 测试的基本概念

测试技术属于信息科学的范畴，与计算机技术、自动控制技术、通信技术构成完整的信息技术学科。

测量是指确定被测对象属性量值为目的的全部操作。测试是具有试验性质的测量，或者可以理解为测量和试验的综合。

在工程实际中，无论是工程研究、产品开发，还是质量监控、性能试验等，都离不开测试技术。测试技术是人类认识客观世界的手段，是科学研究的基本方法。

2. 测试技术的内容和任务

(1) 测试技术的内容

测试技术研究的主要内容包括四个方面，即：被测量的测量原理、测量方法、测量系统以及数据处理。

测量原理是指实现测量所依据的物理、化学、生物等现象及有关定律的总体。例如，压电晶体测振动加速度所依据的是压电效应；电涡流位移传感器测静态位移和振动位移所依据的是电磁效应；热电偶测量温度所依据的是热电效应等。不同性质的被测量用不同的原理去测量，同一性质的被测量亦可用不同的原理去测量。

测量原理确定后，根据测量任务的具体要求和现场实际情况，需要采用不同的测量方法，如直接测量法或间接测量法、电测法或非电测法、模拟量测量法或数字量测量法、等精度测量法或不等精度测量法等。

在确定了被测量的测量原理和测量方法以后，就要设计或选用装置组成测量系统。

最后，实际测试得到的数据必须加以处理，才能得到正确可靠的结果。

(2) 测试技术的任务

测试技术的任务主要有以下五个方面。

1) 在设备设计中，通过对新旧产品的模型试验或现场实测，为产品质量和性能提供客观的评价，为技术参数的优化和效率的提高提供基础数据。

2) 在设备改造中，为了挖掘设备的潜力，以便提高产量和质量，经常需要实测设备或零件的载荷、应力、工艺参数和电机参数，为设备强度校验和承载能力的提高提供依据。

3) 在工作和生活环境的净化及监测中，经常需要测量振动和噪声的强度及频谱，经过分析找出振源，并采取相应的减振、防噪措施，改善劳动条件与工作环境，保证人的身心健康。

4) 科学规律的发现和新的定律、公式的诞生都离不开测试技术。从实验中可以发现规律，验证理论研究结果，实验与理论可以相互促进，共同发展。

5) 在工业自动化生产中，通过对工艺参数的测试和数据采集，实现对设备的状态监测、质量控制和故障诊断。

3. 测试系统的组成

测试系统是指由相关的器件、仪器和测试装置有机组合而成的具有获取某种信息之功能的整体，见图 0.1。

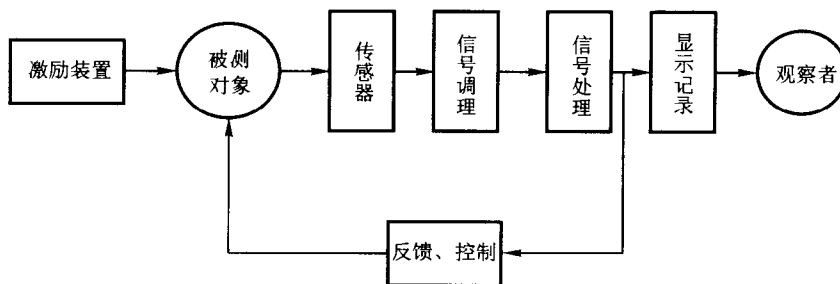


图 0.1 测试系统的组成

一个被测对象的信息总是通过一定的物理量——信号表现出来的。有些信息可以在被测对象处于自然状态时所表现出的物理量中显现出来，而有些信息却无法显现或显现的不明显。在后一种情况下，需要通过激励装置作用于被测对象，使之产生有用信息载于其中的一种新的信号，如对零件或设备激振测量其固有频率等。

传感器是将被测信息转换成某种电信号的器件。它包括敏感器和转换器两部分。敏感器一般是将被测量如温度、压力、位移、振动、噪声、流量等转换成某种容易检测的信号，而转换器则是将这种信号变成某种易于传输、记录、处理的电信号。

信号的调理环节是把来自传感器的信号转换成更适合于进一步传输和处理的形式。这种信号的转换，多数是电信号之间的转换，如幅值放大，将阻抗的变化转换成电压的变化或频率的变化等等。

信号处理环节是对来自信号调理环节的信号进行各种运算和分析。

信号显示、记录环节是将来自信号处理环节的信号，以观察者易于观察和分析的形式来显示或存贮测试的结果。

而反馈、控制环节主要用于闭环控制系统中的测试系统。

图 0.1 中信号的调理、处理、反馈控制、显示等环节，目前的发展趋势是经 A/D 转换后采用计算机等进行分析、处理，并经 D/A 转换控制被测对象。

需要指出的是，为了准确地获得被测对象的信息，要求测试系统中每一个环节的输出量与输入量之间必须具有一一对应关系，而且输出的变化能够准确地反映出其输入的变化，即实现不失真的测试。

4. 测试技术的发展动向

先进技术的发展日新月异，测试技术应该适应这种发展。根据先进制造技术发展的要求以及测试技术自身的发展规律，不断拓展着新的测量原理和测试方法，以及测试信息处理技术。具体体现在：

传感器向新型、微型、智能型方向发展；

测试仪器向高精度、多功能、小型化、在线监测、性能标准化和低价格发展；

参数测量和数据处理以计算机为核心，使测量、分析、处理、打印、绘图、状态显示及故障预报向自动化、集成化、网络化发展。

就机械工程而言，测试技术在以下几个方面需要发展：

(1) 测量方式的多样化

1) 多传感器融合技术在制造过程中的应用 多传感器融合是解决测量过程中信息获取的方法，它可以提高测量信息的准确性。由于多传感器是以不同的方法或从不同的角度获取信息的，因此可以通过它们之间的信息融合去伪存真，提高测量精度。

2) 积木式、组合式测量方法 增加测试系统的柔性，实现不同层次不同目标的测试目的。

3) 便携式测量仪器 如便携式光纤干涉测量仪、便携式大量程三维测量系统等，用于解决现场大尺寸的测量问题。

4) 虚拟仪器 虚拟仪器是虚拟现实技术在精密测试领域的应用，一种是将多种数字化的测试仪器虚拟成一台以计算机为硬件支撑的数字式的智能化测试仪器，另一种是研究虚拟制造中的虚拟测量，如虚拟量块、虚拟坐标测量机等。

5) 智能结构 它用于结构检测与故障诊断，是融合智能技术、传感技术、信息技术、仿生技术、材料科学等于一体的一门交叉学科，使监测的概念过渡到在线、动态、主动的实时监测与控制。

(2) 视觉测试技术

视觉测试技术是建立在计算机视觉研究基础上的一门新兴测试技术。与计算机视觉研究的视觉模式识别、视觉理解等内容不同，视觉测试技术重点研究物体的几何尺寸及物体的位置测量，如三维面形的快速测量、大型工件同轴度测量、共面性测量等。它可以广泛应用于在线测量、逆向工程等主动、实时测量过程。

(3) 测量尺寸继续向两个极端发展

两个极端就是指相对于现在测量尺寸的大尺寸和小尺寸。通常尺寸的测量已被广为注意，也开发了多种多样的测试方法。近年来，由于国民经济的快速发展和迫切需要，使得很多方面的生产和工程中测试的要求超过了我们所能测试的范围，如飞机外形测量、大型机械关键部件测量、高层建筑电梯导轨的准直测量、油罐车的现场校准等都要求能进行大尺寸测量。而微电子技术、生物技术的快速发展，探索物质微观世界的需求和测量精度的不断提高，又要求进行微米、纳米测量。纳米测量仪器多种多样，有光干涉测量仪、量子干涉仪、电容测微仪、X射线干涉仪、频率跟踪式法珀标准量具、扫描电子显微镜(SEM)、扫描隧道显微镜(STM)、原子力显微镜(AFM)、分子测量机(M3)等。

5. 本课程的学习要求

测试技术是一门综合性技术。现代测试系统常常是集机电于一体，软硬件相结合的，具有智能化、自动化的系统。它涉及到传感技术、微电子技术、控制技术、计算机技术、信号处理技术、精密机械设计技术等众多技术。因此，要求测试工作者具有深厚的多学科知识，如力学、电学、信号处理、自动控制、机械振动、计算机、数学等。

测试技术是实验科学的分支，学习中必须理论学习与实验密切结合，参加必要的实验，以便得到基本实验技能的训练。

通过本课程的学习，要求学生能做到：

- 1) 掌握测试技术的基本理论，包括信号的时域和频域的描述方法、频谱分析和相关分析的原理和方法、信号调理和信号处理的基本概念和方法；
- 2) 熟练掌握各类典型传感器、记录仪器的基本原理和适用范围；
- 3) 具有测试系统的机、电、计算机方面的总体设计能力；
- 4) 具有实验数据处理和误差分析能力。

第 1 章 信号及其表述

从信息论的观点看, 信息就是事物存在方式和运动状态的特征。在生产实践和科学研究中, 经常要对许多客观存在的物体或物理过程进行观测, 就是为了获取有关研究对象状态与运动等特征方面的信息。被研究对象的信息量往往是非常丰富的, 测试工作是按一定的目的和要求, 获取感兴趣的、有限的某些特定信息, 而不是全部信息。

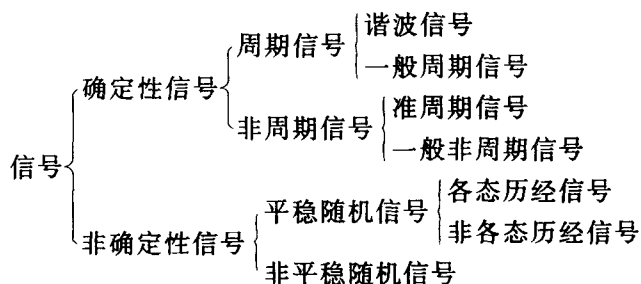
工程测试信息总是通过某些物理量的形式表现出来, 这些物理量就是信号。信号是信息的载体, 信息则是信号所载的内容。信息与信号是互相联系的两个概念, 但是信号不等于信息。例如一台机床在运行过程中, 某一时间某一位置均会有热、声、振动等内部信息的外部表现, 人们用测试仪器观测到的就是温度、声音、振动等变化的信号(数据形式或图像形式)。可以说, 工程测试就是信号的获取、加工、处理、显示记录及分析的过程, 因此深入地了解信号及其表述是工程测试的基础。

1.1 信号的分类

信号按数学关系、取值特征、能量功率、处理分析等, 可以分为确定性信号和非确定性信号、连续信号和离散信号、能量信号和功率信号、时域信号与频域信号等。

1.1.1 确定性信号和非确定性信号

其分类如下:



1) 确定性信号 能用明确的数学关系式表达的信号称为确定性信号。

例如单自由度的无阻尼质量-弹簧振动系统, 如图 1.1a 所示。其位移信号 $x(t)$ 可以写为

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right) \quad (1.1)$$

式中: A 为振幅(最大值); k 为弹簧刚度; m 为质量; ϕ_0 为初始相位。

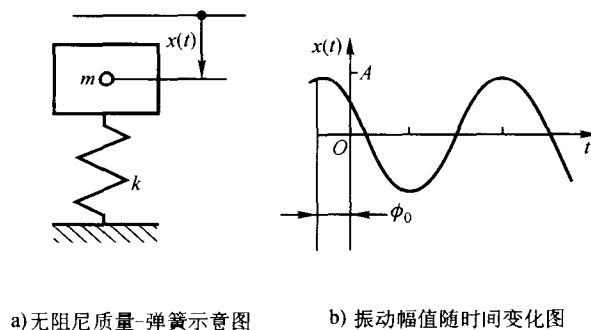


图 1.1 无阻尼质量 - 弹簧系统

图 1.1b 为位移 $x(t)$ 随时间 t 的变化曲线。

确定性信号可以分为周期信号和非周期信号两类。当信号按一定时间间隔周而复始重复出现时称为周期信号，否则称为非周期信号。

周期信号的数学表达式为

$$x(t) = x(t + nT_0) \quad (1.2)$$

式中： $n = \pm 1, \pm 2 \dots$ ； T_0 称为周期， $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 1/f_0$ ， ω_0 为角频率， f_0 为频率。

式(1.1)表达的的信号显然是周期信号，其角频率 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ，周期为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ，这种频率单一的正弦或余弦信号称为谐波信号。谐波信号常用特征参量有：均值、绝对均值、均方差值、均方根值(有效值)和均方值(平均功率)等。

一般周期信号(如周期方波、周期三角波等)是由多个乃至无穷多个频率成分(频率不同的谐波分量)叠加所组成，叠加后存在公共周期。典型的周期信号见表 1.1。

准周期信号也是由多个频率成分叠加的信号，但叠加后不存在公共周期。

一般非周期信号是在有限时间段存在，或随着时间的增加而幅值衰减至零的信号，又称为瞬变非周期信号。

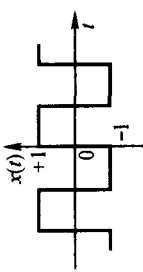
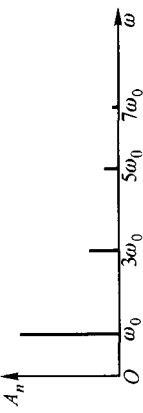
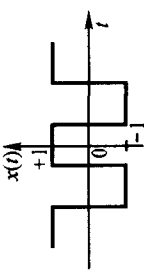
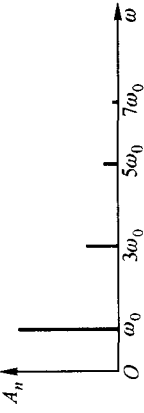
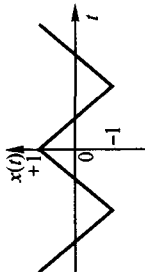
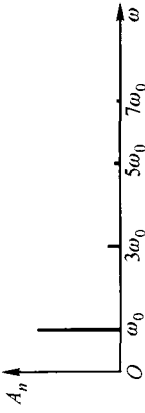
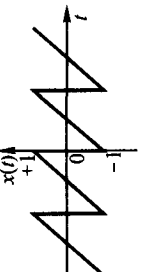
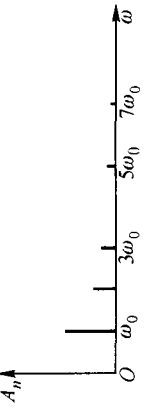
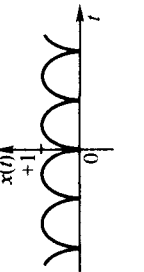
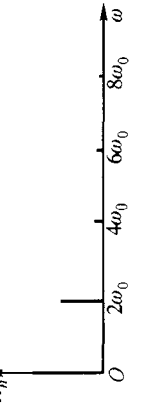
当图 1.1 所示的振动系统有阻尼时，其位移信号 $x(t)$ 就成为瞬变非周期信号，其 $x(t) - t$ 曲线则变为衰减的谐波。

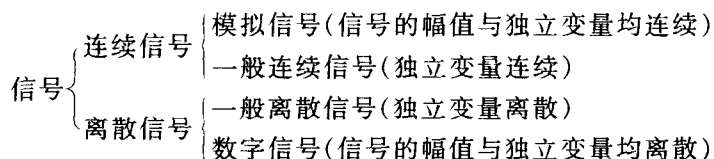
2) 非确定性信号 又称为随机信号，是无法用明确的数学关系式表达的信号。如加工零件的尺寸、机械振动、环境的噪声等，这类信号需要采用数理统计理论来描述，无法准确预见某一瞬时的信号幅值。根据是否满足平稳随机过程的条件，非确定性信号又可以分成平稳随机信号和非平稳随机信号。

1.1.2 连续信号和离散信号

其分类如下：

表 1.1 典型的周期信号

信号名称	时域波形	傅里叶级数三角展开式	幅频谱图
周期方波(奇函数)		$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$	
周期方波(偶函数)		$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right]$	
周期三角波		$x(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[\cos \omega_0 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_0 t + \dots \right]$	
周期锯齿波		$x(t) = \frac{2}{\pi} \left[\sin \omega_0 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t - \dots \right]$	
全波整流		$x(t) = \frac{2}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega_0 t + \frac{2}{15} \cos 4\omega_0 t - \frac{2}{35} \cos 6\omega_0 t + \dots \right]$	



若信号的独立变量取值连续,则是连续信号;若信号的独立变量取值离散,则是离散信号,如图1.2所示。信号幅值也可分为连续的和离散的两种,若信号的幅值和独立变量均连续,则称为模拟信号;若信号幅值和独立变量均离散,则称为数字信号。目前,数字计算机所使用的信号都是数字信号。

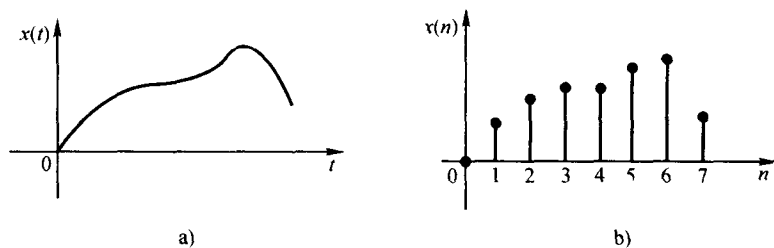


图 1 2 连续信号和离散信号

1.1.3 能量信号和功率信号

在非电量测量中,常将被测信号转换为电压或电流信号来处理。显然,电压信号加在单位电阻($R=1$ 时)上的瞬时功率为: $P(t) = x^2(t)/R = x^2(t)$ 。瞬时功率对时间积分即是信号在该时间内的能量。通常不考虑量纲,而直接把信号的平方及其对时间的积分分别称为信号的功率和能量。当 $x(t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty \quad (1.3)$$

时,则信号的能量有限,称为能量有限信号,简称能量信号,如各类瞬变信号。满足能量有限条件,实际上就满足了绝对可积条件。

若 $x(t)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 的能量无限,不满足式(1.3)条件,但在有限区间 $(-T/2, T/2)$ 内满足平均功率有限的条件

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt < \infty \quad (1.4)$$

则称为功率信号,如各种周期信号、常值信号、阶跃信号等。

1.2 信号的表述

直接检测或记录到的信号一般是随时间变化的物理量,称作信号的时域表述。这种以时间作为独立变量的方式能反映信号幅值随时间变化的关系,而不能揭示信号的频率结构特征。为了更加全面深入研究信号,从中获得更多有用信息,常把时域表述的信号进行变换。以频率作

为独立变量的方式,称作信号的频域表述,也就是所谓信号的频谱分析。频域表述可以反映信号的各频率成分的幅值和相位特征。

信号的时、频域表述是可以相互转换的,而且包含有同样的信息量。一般将从时域数学表达式转换为频域表达式称为频谱分析,相对应的图形分别称为时域图和频谱图。以频率(ω 或 f)为横坐标,幅值或相位为纵坐标的图形,分别称为幅频谱图和相频谱图。本节将对周期信号、非周期信号和随机信号从时间域和频率域两方面进行描述和分析。

1.2.1 周期信号的表述

谐波信号是最简单的周期信号,只有一种频率成分。一般周期信号可以利用傅里叶级数展开成多个乃至无穷多个不同频率的谐波信号的线性叠加。

1. 三角函数展开式

对于满足狄里赫利条件[函数在 $(-T_0/2, T_0/2)$ 区间连续或只有有限个第一类间断点,且只有有限个极值点]的周期信号,均可展开成

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1.5)$$

式中常值分量 a_0 、余弦分量幅值 a_n 、正弦分量幅值 b_n 分别为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中: a_0 、 a_n 、 b_n 为傅里叶系数; T_0 为信号的周期,也是信号基波成分的周期; $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 为信号的基频, $n\omega_0$ 为 n 次谐波。

由三角函数变换,可将(1.6)式的正、余弦同频项合并

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n) \\ &= A_0 + A_1 \sin(\omega_0 t + \phi_1) + A_2 \sin(2\omega_0 t + \phi_2) + A_3 \sin(3\omega_0 t + \phi_3) + \cdots \end{aligned} \quad (1.7)$$

式中: 常值分量 $A_0 = a_0$;

$$\text{各谐波分量的幅值} \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad (1.8)$$

$$\text{各谐波分量的初相角} \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)。 \quad (1.9)$$

例 1.1 求周期方波(见图 1.3a)的频谱,并作出频谱图。

解 $x(t)$ 在一个周期内可表示为

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T_0/2 \\ -A & -T_0/2 \leq t < 0 \end{cases}$$

因该函数 $x(t)$ 是奇函数,而奇函数在对称区间积分值为 0,所以

$$a_0 = 0, a_n = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T_0} \left[\int_{-T_0/2}^0 (-A) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{T_0/2} A \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2A}{T_0} \left[\left. \frac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \right|_{-T_0/2}^0 + \left. \frac{-\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \right|_0^{T_0/2} \right] \\ &= \frac{2A}{n\omega_0 T_0} [1 - \cos(-n\omega_0 T_0/2) - \cos(n\omega_0 T_0/2) + 1] \\ &= \frac{4A}{n\omega_0 T_0} [1 - \cos(n\omega_0 T_0/2)] \\ &= \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

因此, 有

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right)$$

根据上式, 幅频谱和相频谱分别如图 1.3b 和 c 所示。幅频谱只包含基波和奇次谐波的频率分量, 且谐波幅值以 $1/n$ 的规律收敛; 相频谱中各次谐波的初相位 ϕ_n 均为零。

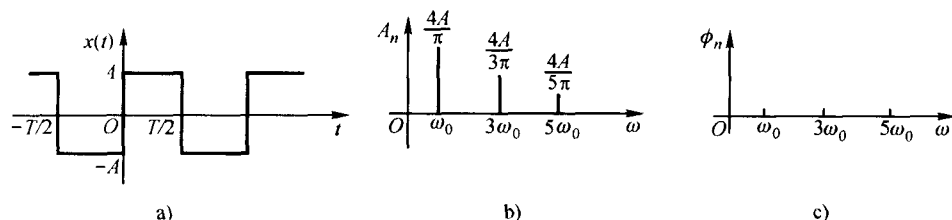


图 1.3 周期方波时、频域图

若将上式中第 1、3 次谐波叠加, 则有图 1.4b 所示图形, 若将上式中第 1、3、5 次谐波逐次叠加, 则有图 1.4c 所示图形。显然, 叠加项愈多, 叠加后愈接近周期方波, 当叠加项无限多时, 叠加后的波形就是周期方波。

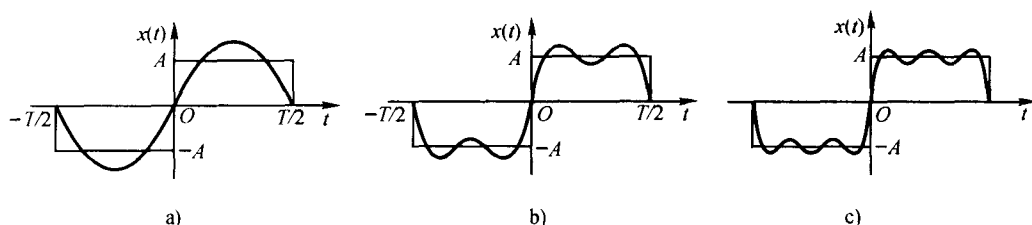


图 1.4 周期方波的谐波成分叠加

图 1.5 为周期方波的时域、频域两者间的关系图。采用波形分解方式可以形象地说明周期

方波的时域表述和频域表述及其相互关系。

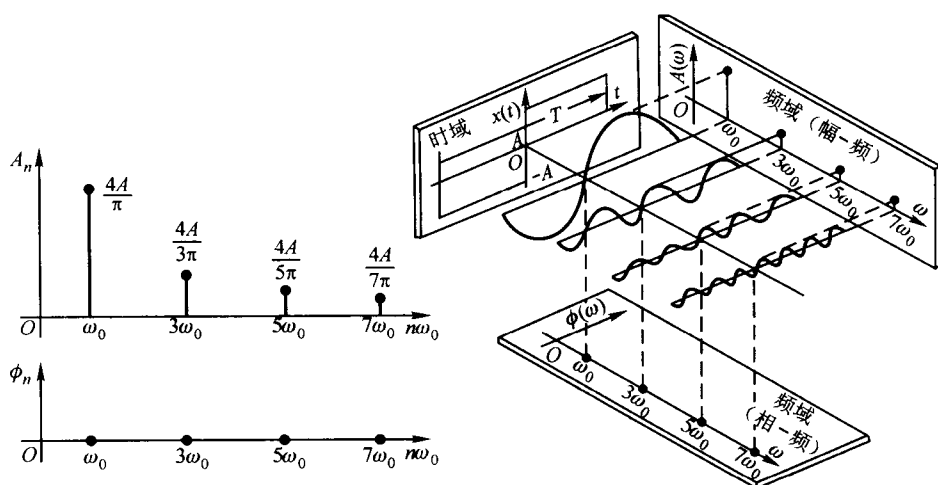


图 1-5 周期方波信号的时、频域表述

2. 复指数展开式

利用欧拉公式

$$\begin{aligned} e^{\pm jn\omega_0 t} &= \cos n\omega_0 t \pm j\sin n\omega_0 t \\ \cos n\omega_0 t &= \frac{1}{2} (e^{-jn\omega_0 t} + e^{jn\omega_0 t}) \\ \sin n\omega_0 t &= \frac{1}{2j} (e^{-jn\omega_0 t} - e^{jn\omega_0 t}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$ ，将(1.5)式改写为

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} \right]$$

若令

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 \\ C_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n + jb_n) \\ C_n &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \end{aligned}$$

则上式可写成

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + C_n e^{jn\omega_0 t})$$

即

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.11)$$

式中：