

世界数学



51
3

费马猜想

辽宁教育出版社

名题欣赏

世界数学名题欣赏丛书

费马猜想

姚玉强 编

辽宁教育出版社

1987年·沈阳

费马猜想

姚玉强 编

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 沈阳新华印刷厂印刷

字数:97,000 开本:787×1092¹/₃₂ 印张:7 插页:4

印数:1—4,000

1987年10月第1版

1987年10月第1次印刷

责任编辑:俞晓群 谭 坚 责任校对:理 广

封面设计:安今生

统一书号:7371·405

定价:1.70 元

ISBN 7-5382-0323-0/G·263

内 容 简 介

本书是“世界数学名题欣赏丛书”之一。书中较详细地介绍了费马猜想的历史和现状，包括历史上的主要成果以及解决问题的方法；一些近代成就；最后，对这个问题进行了有趣的推广。全书写法深入浅出，将知识性与趣味性融为一体，可供大、中学生及广大数学爱好者阅读。

ABD18 3

Summary

This book is one of the world famous mathematics appreciation series. It systematically introduces the history of Fermat Guess and present condition, includes the main history achievements, ways of solving problems and some achievements in modern times. At last, it gives an interest popularization. The whole book explains the profound in simple terms, blends as well as knowledge and interest. It serves college students, middle school students and vast numbers of lovers of mathematics.

若无某种大胆放肆的猜想，一般是不可能有知识的进展的。

——高斯

序 言

什么是猜想呢？人们在数学研究中，经过大量的观察和实践，得到某种规律或结论，试图把它推广到一般，成为普遍的规律，这就是猜想或猜测。

在数学发展的历史长河中，数学家曾提出许多著名猜想。例如，“哥德巴赫猜想”、“费马猜想”和“四色猜想”等。它们象颗颗斑斓的明珠，闪烁着人类智慧的光芒。

希望并不一定是客观现实，猜想也不总是真理。欲想使猜想成为数学理论，还必须经过严格的逻辑证明。千百年来，数学家们继往开来，潜心思考，探求精蕴，取得了丰硕成果。有的猜想被证明是正确的，已经成为定理，也有的被证明是错误的。然而，至今仍有一些猜想向着人类的智慧挑战，人们不能肯定它是对的，也不能指出它是错误的，成为著名的数学难题。费马猜想就是其中之一。

费马猜想一经发表，引起许多著名数学家和广大数学爱好者的极大兴趣。内容之浅显似乎不难证明。然而，三百多年过去了，它仍然没有得

到最后解决。

现在费马猜想仍有巨大的吸引力。许多青少年数学爱好者跃跃欲试，希望撷取这颗明珠，为祖国赢得荣誉，为科学事业的发展做出贡献。

鉴于国内专门介绍费马猜想的书较少，笔者不揣学识浅陋，写了这本小册子。主要内容选自P·利奔波姆著《费马大定理十三讲》和B·夕宾斯基著《论方程的整数解》。本书比较系统地介绍费马猜想的历史与现状：一方面，介绍这个问题的基本内容和近代成果，另一方面，介绍一点解决问题的方法。考虑读者的数学基础，本书在编写上力求做到几下几点：

1. 放低起点，从基础知识谈起。研究费马猜想所涉及的一些基础知识，如整数论知识和代数数论知识，都做了简单扼要的介绍。还有的在注脚中加以说明。这样，具有中等数学知识的读者，只要逐步读下去，书中绝大部分内容都可以读懂。

2. 通俗易懂，深入浅出。叙述通俗，解释浅显。有的结果只介绍而未加证明；有的定理在证明中不涉及高深理论时，给出了证明，这些证明中包括了一些基本方法的运用。

3. 趣味性。介绍一些科学家的轶事和某些

结果的发现的趣闻。

本书试图使广大青少年读者知道，费马猜想的解决是十分艰难的，只有打好坚实的基础，才有可能攻克这个难题。读了本书后，如果能对费马猜想引起兴趣，在将来攀登时起着一层阶梯作用，这才是编者的期望。

本书的编写得到辽宁师范大学梁宗巨教授的热情指导。梁教授审查了初稿，在书的宗旨、取材、写法及科学家译名等方面都提出十分宝贵意见。这些使笔者受益匪浅，也给本书增添了特色。南开大学胡久稔副研究员也审阅了书稿，并提出了许多好的意见。在此，谨向他们致以诚挚的谢意。

由于编者学识水平所限，遗漏和错误在所难免，希望专家和读者指正。

姚玉强

1986年10月于沈阳

世界数学名题欣赏丛书

欧几里得第五公设

连续统假设

费马猜想

黎曼猜想

科克曼女生问题

斐波那契数列

希尔伯特第十问题

不动点定理

哥德尔不完全性定理

无处可微的连续函数

哥德巴赫猜想

货郎担问题

置换多项式及其应用

素数判定与大数分解

C1-51

1:3.

费玉强



作者简介

姚玉强，1937年11月生于辽宁省盖县。1960年毕业于辽宁大学数学系。现在沈阳市教育学院数学系任教。讲师，代数教研室主任。译著有《新符号问题与整数问题》（人民教育出版社）。

目 录

一 费马猜想的历史.....	1
(一) 费马猜想的来源.....	4
(二) 早期的尝试.....	11
(三) 库麦的贡献.....	17
(四) 金质奖章和十万马克奖金.....	20
(五) 费马曲线.....	24
(六) 其他一些结果.....	25
(七) 近代成果.....	27
(八) 费马猜想的意义.....	33
二 早期成果的说明.....	39
(一) 整数的基本性质.....	42
(二) 勾股方程.....	54
(三) 无穷递降法.....	61

(四) 四次的费马方程	63
(五) 三次的费马方程	67
1. 初等证明	68
2. 欧拉的证明	75
3. 高斯的证明	78
(六) 五次的费马方程	88
(七) 七次的费马方程	89
三 朴素的方法	93
(一) 巴罗和阿贝尔的关系式	95
(二) 热尔曼的理论	97
(三) 温特的定理	101
(四) 拾零	104
四 代数数论方法	109
五 新近的成果	119
(一) $p < 125000$ 费马猜想成立	121
(二) 欧拉数和费马猜想	127
(三) 莫德尔猜想	129
(四) 数论逻辑方法	133
六 估计	137

(一) 初等估计	140
(二) 土厄、罗思、西格尔和贝克	144
(三) 新方法的应用	149
七 费马猜想的推广	155
(一) $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$	157
(二) $x^3 + y^3 + z^3 = n$	162
(三) 三次的方程	165
(四) 四次的方程	171
1. $\sum x_i^4 = y^4$	171
2. $x^4 + y^4 = z^4 + t^4$	173
3. $\sum x_i^4 = \sum y_i^4$	173
4. $\sum x_i^4 = ky^2$	174
5. $x^4 + ky^4 = z^2$	176
(五) n 次的方程	179
1. $\sum x_i^j = y^j$	179
2. $ax^m + by^n = cz^l$	180
3. $x^3 \pm y^2 = z^n$	182
结束语	187
参考文献	193
中外人名对照	196

Contents

I The History of the Fermat's

Conjecture	1
(I) The Source of the Fermat's Conjecture	4
(II) Early Attempts	11
(III) Kummer's Monument	17
(IV) The Golden Medal and the Prize of 100000 Mark	20
(V) The Fermat's Curve	24
(VI) Other Relevant Results	25
(VII) Recent Results	27
(VIII) Meanings of the Fermat's Conjecture	33

II Explanations of Early Results39

(I) Basic Properties of Integers.....	42
(I) The Pythagorean Equation	54
(II) The Method of the Infinite	

Descent	61
(IV) The Biquadratic Equation.....	63
(V) The Cubic Equation	67
1. Elementary Proof.....	68
2. Euler's Proof.....	75
3. Gauss's Proof.....	78
(VI) The Quintic Equation.....	88
(VII) Fermat's Equation of Degree Seven	89
III The Naïve Approach.....	93
(I) The Relations of Barlow and Abel	95
(II) Sophie Germain's Theory.....	97
(III) Wendt's Theorem	101
(IV) Odds and Ends	104
IV The Method of Algebraic Number Theory.....	109
V Fresh Efforts	119
(I) Fermat's Last Theorem Is True for Every Prime Exponent Less Than 125000.....	121

(I) Euler Numbers and Fermat's Conjecture.....	127
(II) Mordell's Conjecture.....	129
(IV) The Logicians.....	133
VI Estimates	137
(I) Elementary Estimates	140
(I) Thue, Roth, Siegel and Baker.....	144
(II) Applications of the New Method	149
VII Extensions of the Fermat's Conjecture	155
(I) $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$	157
(I) $x^3 + y^3 + z^3 = n$	162
(II) Equation with Three Exponent	165
(IV) Equation with Four Exponent	171
1. $\sum x_i^4 = y^4$	171
2. $x^4 + y^4 = z^4 + t^4$	173
3. $\sum x_i^4 = \sum y_i^4$	173