

电机瞬变过程

重庆大学 姜可薰 主编

机械工业出版社

高等学校教材

电机瞬变过程

(修订本)

重庆大学 姜可薰 主编

机械工业出版社

本书系统地论述了电机瞬变过程的基本理论及分析方法,也反映了国内外近来在这一领域中的研究成果。全书分为五章,第一章介绍电机瞬变过程的基础知识及一般化电机,也介绍了近代研究电机瞬变过程的方法。第二章介绍同步电机的基本电磁关系、电压、磁链方程及有关参数。第三章应用 d 、 q 、 0 及 α 、 β 、 0 坐标系统讨论了同步电机三相及二线突然短路的瞬变过程和小值振荡。第四章介绍同步电机的数学模型及这些数学模型在计算电机瞬变过程中的应用,也简要地介绍了同步电机动态稳定的数值计算过程。第五章用复数 d 、 q 、 0 方程及复数分量法分析了感应电机的瞬变过程。各章附有必要的例题与习题供读者练习。修订版在精炼内容,加强物理概念方面作了较大的努力。

本书可作电机专业的教学用书,也可供高等院校有关专业师生及从事电机研究、设计制造、运行的科技人员参考。

电机瞬变过程

(修订本)

重庆大学 姜可薰 主编

*

责任编辑:任锐贞 版式设计:王颖

责任印制:王国光 责任校对:肖新民

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ ·印张 $12\frac{1}{4}$ ·字数 293 千字

1982年7月重庆第一版

1991年5月北京第二版·1991年5月北京第六次印刷

印数 15,651—18,950·定价:3.25元

*

ISBN 7-111-02623-3/TM·333(课)

前 言

随着科学研究和生产的日益发展,几十年来,对电机瞬变过程进行了大量的研究工作,内容越来越广泛深入,积累的研究成果也极为丰富,有关的资料和书籍为数亦多。迄今电机瞬变过程已成为电机设计、制造和运行人员所不可缺少的知识,其基本内容也是电机专业学生必须掌握的基本知识。

本书是根据第一机械工业部1978年4月在天津召开的高等院校一机部对口专业座谈会的精神及1978年6月在长沙召开的电机专业教材编写会议所订电机瞬变过程编写大纲编写的。内容的选择,侧重在分析方法和电机瞬变过程的基础知识,对不同类型的电机选择了几种典型的瞬变过程进行分析。全书共分五章:第一章的主要内容是分析电机瞬变过程所需的一些基础知识及一般化电机,并概括地介绍了近代分析电机瞬变过程的方法;第二章讨论了同步电机的基本电磁关系,建立了电机的基本方程式,阐明了各种参数的意义及同步电机的等效电路;第三章用 d 、 q 、 0 ; α 、 β 、 0 及1、2、 0 坐标系统分析了同步电机在同步转速及不同的短路状态下的瞬变过程;同步电机在小值振荡时的线性分析,说明了不同性质的课题应该采用不同的坐标系统和方法,分析结果在实用上也有很大的意义;第四章讨论了同步电机及其控制系统的动态特性及其数学模型,并简略地叙述了如何应用这些数学模型来计算同步电机的机电瞬变过程;第五章用复数形式的 d 、 q 方程和复数分量法分析了感应电机的短路及接入三相平衡电源后的瞬变过程,并对感应电机在变速下的瞬变过程用解析法和数值解法进行了分析。在目录中注有星号的章节,可根据教学的具体情况作适当的取舍。

本书由重庆大学陈文纯同志主编,天津大学许之江同志主审,并于1980年6月在庐山召开了审稿会,参加会议的有太原工学院、福州大学、西安交通大学、江西工学院、沈阳机电学院、华中工学院、湖南大学、浙江大学、天津大学、合肥工业大学、山东工学院等高等院校和一机部教材编辑室的代表,与会代表对书稿进行了认真细致的讨论,并提出了宝贵的修改意见。

在编写过程中,本书引用了一些国内外有关参考文献,其中主要的参考文献列于书末,使读者能够了解本书内容的主要来源,并供作进一步研究的参考。同时,编者在此对参加审稿会的高等院校代表、主审人天津大学许之江同志的认真负责精神以及参考文献的原著者,致以衷心的感谢。

参加本书编写工作的有合肥工业大学吴本炎同志、山东工学院胡颂尧同志、重庆大学曾祥仁、张安邦同志。全书由陈文纯同志总辑其成。

本书是高等院校电机专业的试用教材,也可供有关专业师生和工程技术人员作参考。

由于编写时间仓促,缺点和错误在所难免,敬请广大读者批评指正。

再 版 前 言

本教材根据 1983 年 5 月在杭州召开的高等学校机械部电工类专业教材编审委员会扩大会议通过的“电机瞬变教学大纲”，在 1982 年机械工业出版社出版的高等学校试用教材《电机瞬变过程》的基础上，参照各兄弟院校教学实践及课程教学大纲进行修订。

修订后的教材符合课程教学大纲的要求，加强了物理概念的阐述，删去了第一版中繁复的内容，努力做到少而精。原附录中的内容已在电路原理中讲授，因此不再保留；第四章第 6 节，在“研究瞬变的计算技术”中补充了预报-校正法；第一版中的一些错误，已予改正；各章均补充了习题及思考题；没有进行对全书影响重大的改动。

本书由重庆大学姜可薰同志主编，天津大学吉崇庆同志主审。参加本书修改的还有合肥工业大学吴本炎同志，山东工学院胡颂尧同志，重庆大学曾祥仁同志。重庆大学何建平同志整理与核算了全部习题与思考题。

各兄弟院校为本书提供了一些习题与思考题，并为本书的修改提出了许多宝贵意见。天津大学吉崇庆同志认真负责地审阅了全部修订稿，在此对他们表示衷心感谢！

由于我们的水平有限，缺点错误在所难免，希望广大读者批评指正。

编者

1989年 9 月

主要符号说明

A, B, C ——三相电路或绕组	p ——运算符
B ——磁通密度 (简称磁密)	s ——转差率
$a, b, c, \alpha, \beta, 0; 1, 2, 0$ ——坐标系统	$F(p)$ ——卡松变换象函数
$d, q, 0; f, b, 0$ ——坐标系统	$L(p)$ ——拉氏变换象函数
$d_s, q_s, 0; f_s, b_s, 0$ ——坐标系统	$G(p)$ ——传递函数
e ——电动势瞬时值	$X_d(p), X_q(p)$ ——直轴及交轴运算电抗
E_m ——正弦电动势最大值	T_m ——电磁转矩
E ——正弦电动势有效值	$T_{m,c}$ ——机械转矩
E ——正弦电动势的复数相量	T_D ——阻尼转矩
F ——磁势、电磁力	T_J ——惯性转矩
G ——旋转电感系数	u ——电压瞬时值
H ——惯性常数	U_m ——正弦电压最大值
i ——电流瞬时值	U ——正弦电压有效值
I_m ——正弦电流最大值	U ——正弦电压的复数相量
I ——正弦电流有效值	$Y(p)$ ——运算导纳
I ——正弦电流的复数相量	$Z(p)$ ——运算阻抗
i ——瞬时电流的复数	FD ——励磁电路、绕组
J ——转动惯量	KD, KQ ——直轴、交轴阻尼绕组
k_i ——电流基值比	CQ ——补偿绕组及换向极绕组
k_u ——电压基值比	SD ——串励绕组
X_{ad}, X_{aq} ——直轴、交轴电枢反应电抗	δ ——励磁电动势与端电压之间的夹角
X_d, X_q ——直轴、交轴同步电抗	θ ——转子位置角
X'_d ——直轴瞬变同步电抗	λ ——比漏磁导
X''_d, X''_q ——直轴、交轴超瞬变同步电抗	σ ——漏磁系数
	ω ——角频率或角速度
	ω_0 ——同步角频率
	τ ——时间常数

绪 论

电机是将机械能转变为电能，或将电能转变为机械能的机械。现代工农业生产及人民生活使用的电能，几乎全部是通过发电机生产出来的，而发电机生产出的电能有一半以上又是通过电动机转变为机械能后加以利用的。在自动控制系统中，电机常常被作为测量、放大和执行元件等得到普遍的应用。

我国在建设四个现代化的进程中，对于电机的需要不仅在数量和品种上急剧增加，而且对电机稳态和瞬变性能的要求也不断提高。由于电子技术和计算技术的发展，电机的运行条件日益复杂，过去许多难以分析的瞬变过程，现在则可以通过计算机进行分析、计算。因此，科学技术的发展，不仅使人们进一步掌握并了解了电机瞬变过程的现象，而且还为瞬变过程的研究增加了新的内容。

在电力系统中，当负载突然发生变化时、起动或切除电机时、以及调整控制设备或发生突然短路故障时，都将引起电机的瞬变过程。这一过程虽然为时短暂，如果缺乏完善的预防措施，可能导致电力供应中断、损毁器材、甚至危及人身安全等严重后果。例如，在三相突然短路时，感应电机冲击电流的瞬时值，可能达到额定值的 10 倍以上；汽轮发电机冲击电流的瞬时值，可能达到额定值的 20 倍左右；同步电机单相短路冲击电流的瞬时值，可能比三相短路时还要大 30~40%；同步电机投入电网时的误整步产生的冲击电流，也可能达到三相突然短路时的 2 倍。

在某些情况下的瞬变过程中，冲击电流虽然很大，但由于时间短促，产生的热效应并不会导致危险的后果。但是，对于失步或起动等过程而言，估计它们的效应则是非常重要的。

电机绕组的端部在瞬变过程中可能产生极大的机械应力，还可能产生很大的电磁转矩，发生剧烈的机械振动以及转速升高等现象。例如，同步电机在三相突然短路时的最大转矩，可能达到额定转矩的 7 倍左右，严重危及电机主轴和地脚螺钉等部件。另外，在瞬变过程中，电机还会出现单向转矩和脉振转矩。在同步电机中，脉振转矩的频率通常等于额定频率或二次谐波的频率。当电机转子在一定的转差下运行时，脉振转矩的频率可能和主轴的固有扭转振荡频率接近，从而产生严重的扭转剪应力，并危及主轴。

在瞬变过程中，还可能发生严重的过电压现象，这些过电压现象大都是由于负荷的调配、雷击及不对称短路等引起的。例如，同步电机在负荷调配时的过电压可能达到额定电压的 4~5 倍；在不对称短路时的过电压可能达到更高的数值。

在自动控制系统中，主要是研究系统中各元件及整个系统的动态特性。因此，当电机作为其中的重要元件时，了解并掌握其瞬变性能是十分必要的。

综上所述，充分掌握电机的瞬变过程，不仅可以合理设计和制造电机，而且可以正确选用电机运行时所需用的控制和保护设备，从而提高了电机及与之相连接的整个系统的运行性能和可靠性。

电机的瞬变过程是相当复杂的，其中不仅有电磁方面的、机械方面的、以及热方面的瞬变过程，而且它们又是互相影响和互为因果的。在实际工作中，可以将这些瞬变过程分别加

以研究,也可以考虑它们在相互影响下的瞬变过程。例如,由于热的过程远较其它过程为慢,在研究其它瞬变过程时可以不予考虑。又如,研究电机在突然短路后的电磁瞬变过程时,可以忽略电机的机械瞬变过程,而认为电机转速保持恒值不变。但是,在研究同步电机的动态稳定时,不仅需要考虑电磁瞬变过程和机械瞬变过程的相互影响,而且还需计及励磁调节系统和原动机调速系统在瞬变过程中的作用,才能计算出较准确的结果。

在研究电机的瞬变过程时,首先必须很好地了解电机的电压、电流、磁链及转矩等之间的关系,以及它们与自感、互感和其它参数之间的联系,以便根据实际情况作出相应的假定,建立描述电机瞬变过程的基本方程式。然后再根据所研究课题的性质和特点,通过坐标变换,将电机的基本方程式变换为以新变量为基础、便于求解的方程式,再利用积分变换和其它数学方法求得解答。即使如此,对某些课题所得到的电机基本方程式仍为非线性微分方程,必须用数字计算机以某种数值解法求解。

一般说来,在电机瞬变课题的领域内,研究的问题属于“路”的范畴。解题的方法可运用拓扑学的方法建立状态方程,获得所需的数学模型;也可应用其它的方法,选定状态变量,建立状态方程,求得解答。

几十年来对电机瞬变过程进行的大量研究工作,已取得了丰硕的成果。本书将系统地介绍研究电机瞬变过程所必须具备的一些基本概念和分析方法,使读者获得阅读有关参考文献和分析电机瞬变过程的基础。

第一章 基础知识

本章是研究电机瞬变过程的基础知识，内容有标么制和坐标变换，并对变压器的某些瞬变过程和一般化电机的问题也作了一定的讨论。就性质而言，它们有的属于物理原理，有的属于数学处理方法，有的则是具体的分析计算。在具体研究电机的瞬变过程之前，了解和掌握这些基础知识是必要的。

§ 1-1 概 述

当与电机相关联的任何参量一旦发生变化时，电机的运行状态就要改变，从一种稳态运行到另一种稳态运行的过渡过程称为瞬变过程或暂态过程。这一过程一般说来持续时间很短。然而，在此过程中出现的物理现象与稳态运行时的性质有所不同，并且在不利情况下，可能导致严重的后果。因此，深入地了解这一阶段的物理过程、掌握这一阶段中各物理量的变化规律，就是一个需要认真对待的问题。尤其在电机的单机容量不断提高、应用领域不断扩大、运行条件日益复杂之际，研究电机的瞬变过程就具有更重要的理论意义和实际意义。

绪论中已经提到电机的瞬变过程是相当复杂的。在实际研究中，根据具体情况作些必要的假定，抓住主要矛盾，使问题的分析、计算得到简化。通常，假定电机是理想的，并具有以下一些特性：

(1) 电机铁磁部分的导磁系数为常数，即不计饱和的影响，磁滞、涡流及集肤等效应也不予考虑；

(2) 不计齿槽及通风道的影响，即认为电机具有光滑的定子和转子表面；

(3) 对直轴及交轴而言，电机转子结构上是对称的；

(4) 对交流电机而言，定子的三个绕组的位置在空间互差 $\frac{2}{3}\pi$ （即 120° ）且三个绕组在结构上完全相同；

(5) 只考虑基波效应，即认为气隙中的磁势及磁密按正弦波形分布，高次谐波的影响以差漏磁形式计及。

科学技术的发展，同时也改变着科学研究的方法，电子计算机的广泛应用给瞬变过程的研究开辟了新的途径，许多以前难以解决的计算问题现在也可以解决了；以前难以实现的技术问题也可以得到实现。然而，不论研究方法怎样发展和改变，它们所依据的物理原理却没有改变。因此，在研究电机的瞬变过程时，理应对这些物理原理有个清晰的了解，通晓其间各物理量之间的相互联系。具体地说，应该很好地了解电机的电压、电流、磁链、转矩及转速等之间的关系，以及它们与自感系数、互感系数和其它参数间的联系等。这些要求，有的在本章中将有所反映，有的将在其它章节中阐述。

根据物理原理建立了电机基本方程式后，进一步的工作则是如何求解这些微分方程式的问题。数值计算虽然可以计算出具体、复杂的瞬变过程，还可以通过电子计算机来进行这

一工作,但是这种方法不能给出一般解析表达式,致使对瞬变过程缺乏规律性的了解。用解析法来分析瞬变过程时,虽可避免这一缺点,但求解微分方程会遇到很多困难,有时甚至不可能求解。通常,只能在一定的假设条件下才能求解,并在求解时广泛使用积分变换和重叠原理。在本书中,解析法和数值算法都被应用,并将在有关章节中予以讨论。

与静止电路不同,电机的定子和转子之间有相对运动,从而使一些电感系数,以至微分方程式的系数发生周期性变化。在很多情况下,为了把线性变系数微分方程式转化为线性常系数微分方程式,还需要采用坐标变换,即把原来的变量通过特定的换算关系,转化成新的变量,并以新的变量为研究对象而进行瞬变过程的演算工作。本章介绍了各种变量之间转换关系式,其中有些坐标系统在本书中将被用来分析某些运行状态的瞬变过程。

为了简化运算,在研究瞬变过程时还广泛采用标么制,本章对这一内容也作了一些讨论。标么制问题主要是基值的选取问题。尤其是变压器二次侧或电机的转子侧各量的基值,可以有不同的基值选择方法。为了便于阅读有关资料文献,本书所采用的基值选择方法是通常所惯用的。

最后,本章还讨论了变压器的某些瞬变过程,以及关于一般化电机的问题。学习前者,可以对瞬变过程中的物理现象及分析方法有个初步的了解,所得到的有关物理概念和结论,对分析交流电机的瞬变过程也是有益的。学习后者,对各类电机可以有个统一的概念,这种统一的概念和理论,对电机的理论研究具有一定的价值,并引起了人们的注意。所讨论的直流电机的突然短路问题,可以看成是这种电机运行的一个例子,在实际计算中同时作了必要的简化。

§ 1-2 双绕组变压器的瞬变过程

电磁耦合现象是电机中普遍存在的重要物理现象。因此,在分析旋转电机的瞬变过程之前,先分析一下两个相互耦合的线圈,亦即双绕组变压器的瞬变过程,以便于了解瞬变过程中的一些重要概念。这里所讨论的问题仅限于线性的,因此变压器应该是不饱和的,或者是空心变压器。

图 1-1 所示为双绕组变压器的线路图。一次侧电压 u_1 、电流 i_1 ,二次侧电压 u_2 、电流 i_2 ,其正方向如图中所示,即当电压和电流为正值时,瞬时功率 ui 由外面流进线圈。在此情况下,变压器的微分方程式为

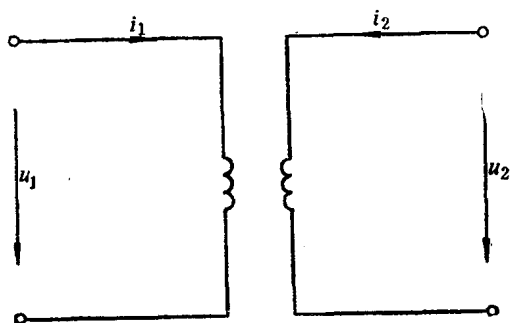


图1-1 双绕组变压器

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + L_1 p & M_{12} p \\ M_{21} p & R_2 + L_2 p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

式中 L_1 和 R_1 为一次侧自感系数和电阻;
 L_2 和 R_2 为二次侧自感系数和电阻;
 $M_{12} = M_{21}$ 为一次侧和二次侧间的互感系数;

符号 p 表示 $\frac{d}{dt}$ 。

方程式 (1-1) 为常系数线性微分方程。对于这类方程式，如果给定了初始条件，理论上不难用直接求解法求得所需结果。但是，应用较多的是比较简便的间接求解法。这里采用在电机工程中常用的一种变换，即卡松变换，它与拉普拉斯变换不同之处是象函数多乘了一个复变数 p 。因此，设实变函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换和卡松变换象函数分别为 $L(p)$ 及 $F(p)$ 时，则

$$L(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1-2)$$

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1-3)$$

并记为

$$F(p) \rightleftharpoons f(t) \quad (1-4)$$

下面利用积分变换方法来讨论上述变压器的某些瞬变过程。

一、初始条件为零的情况

当瞬变之初（即 $t = 0^-$ 时），系统内无储能时，称之为初始条件为零；反之，系统内有储能时，则称之为初始条件非零。在上述的不完全耦合电路中，当初始条件为零，即 $i_1(0) = i_2(0) = 0$ 时，微分方程式 (1-1) 写成运算微积形式时，则有

$$\begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 p + R_1 & M_{12} p \\ M_{21} p & L_2 p + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(p) \\ i_2(p) \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

或

$$\begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1(p) & Z_{12}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_2(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(p) \\ i_2(p) \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

式中 $Z_1(p) = R_1 + L_1 p$

$Z_1(p)$ 为一次侧自感运算阻抗；

$Z_2(p) = R_2 + L_2 p$

$Z_2(p)$ 为二次侧自感运算阻抗；

$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = M_{12} p = M_{21} p$

$Z_{12}(p)$ 、 $Z_{21}(p)$ 分别为一次绕组和二次绕组间的互感运算阻抗。

解式 (1-6) 得

$$\left. \begin{aligned} i_1(p) &= \frac{Z_2(p) u_1(p) - Z_{12}(p) u_2(p)}{D(p)} \\ i_2(p) &= \frac{Z_1(p) u_2(p) - Z_{12}(p) u_1(p)}{D(p)} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

式中，

$$D(p) = Z_1(p) Z_2(p) - Z_{12}^2(p) \quad (1-8)$$

有了电流的运算式，利用反变换，由象函数求原函数，即可求出对时间的表达式。为此，可利用分解定理。分解定理叙述如下：

设卡松变换的象函数为一有理分式，即

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n} \quad (1-9)$$

式中 $m \leq n$; $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$ 都是实数常数; 而且分式是不可约的, 即 $M(p)$ 和 $N(p)$ 中无相同的根。在此情况下, 所求的原函数取决于 $N(p) = 0$ 的根。

如果 $N(p) = 0$ 的根 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中没有重根及零根时, 则

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} e^{p_k t} \quad (1-10)$$

式中, p_k 为 $N(p) = 0$ 的根; $N'(p)$ 为 $N(p)$ 对 p 的一次导数。 $N(p) = 0$ 的根可能是实数, 也可能为复数, 且复数根总是共轭地出现。当其中具有共轭复数根时, 例如, 若

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\lambda$$

时, 则上式又可写成

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(0)}{N(0)} + 2Ce^{-\alpha t} \cos(\lambda t + \theta) + \sum_{k=3}^n \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} e^{p_k t} \quad (1-11)$$

式中 C 及 θ 值由下式决定

$$Ce^{j\theta} = \frac{M(-\alpha + j\lambda)}{(-\alpha + j\lambda)N'(-\alpha + j\lambda)} \quad (1-12)$$

如果 $N(p) = 0$ 的根 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中具有重根及零根时, 则

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{1}{r_0!} \left[\frac{d(r_0)}{dp(r_0)} \frac{M(p)}{N(p)} p^{r_0} e^{pt} \right]_{p=0} + \sum_{k=1}^{n'} \frac{1}{(r_k-1)!} \left[\frac{d(r_k-1)}{dp(r_k-1)} \frac{M(p)}{pN(p)} (p-p_k)^{r_k} e^{pt} \right]_{p=p_k} \quad (1-13)$$

式中, r_0 为 $N(p) = 0$ 根中零根的重复次数; r_k 为非零根 p_k 的重复次数; n' 为不同根的个数。

当 $N(p) = 0$ 根中无零根及重根时, $r_0 = 0$, $r_0! = 1$, $r_k = 1$, $(r_k-1)! = 1$, $n' = n$, 因此

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{M(p)}{pN(p)} (p-p_k) e^{pt} \right]_{p=p_k} \\ &= \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{M(p)}{pN(p)} e^{pt} \right]_{p=p_k} \\ &= \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} e^{p_k t} \end{aligned}$$

这一结果与式 (1-10) 相同。

现在讨论下述情况下的瞬变电流。

1. 二次侧短接, 一次侧突然施加恒值电压, 此时因

$$u_1(p) = U \quad u_2(p) = 0$$

故有

$$i_1(p) = \frac{Z_2(p)U}{D(p)} = \frac{U}{Z_1(p) - \frac{Z_{12}(p)}{Z_2(p)}} = \frac{U}{Z_1'(p)} \quad (1-14)$$

式中 $D(p) = Z_1(p)Z_2(p) - Z_{12}^2(p)$

$$Z'_1(p) = Z_1(p) - \frac{Z_{12}^2(p)}{Z_2(p)} = R_1 + p \left(L_1 - \frac{M_{12}^2 p}{R_2 + L_2 p} \right) \quad (1-15)$$

$Z'_1(p)$ 为从一次侧看进去的等值运算阻抗。它不仅包含了一次绕组的自感阻抗，同时也考虑到与其相耦合的二次绕组的影响。

如令

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} \quad (1-16)$$

$$\sigma = 1 - \frac{M_{12}^2}{L_1 L_2} \quad (1-17)$$

式中 τ_1 和 τ_2 为一次绕组和二次绕组的时间常数； σ 为一次绕组和二次绕组间的漏磁系数。

则

$$Z'_1(p) = \frac{L_1 \left[\sigma p^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \right]}{p + \frac{1}{\tau_2}} \quad (1-18)$$

特征方程式

$$\sigma p^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = 0 \quad (1-19)$$

的根为

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sigma\tau_1\tau_2} (1 + q) \\ p_2 &= -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sigma\tau_1\tau_2} (1 - q) = -\frac{2}{(\tau_1 + \tau_2)(1 + q)} \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

式中

$$q = \sqrt{1 - \frac{4\sigma\tau_1\tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)^2}} \quad (1-21)$$

利用分解定理，求式 (1-14) 的原式，则得

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \left\{ 1 + \frac{1}{(\tau_1 + \tau_2)q} \left[\left(\tau_2 + \frac{1}{p_2} \right) e^{p_2 t} - \left(\tau_2 + \frac{1}{p_1} \right) e^{p_1 t} \right] \right\} \quad (1-22)$$

这个电流由三个分量组成，即由稳态分量 $\frac{U}{R_1}$ 和两个以不同时间常数衰减的瞬变分量组成。

电流 i_1 由其值为零的起始值按时间常数 $-\frac{1}{p_1}$ 及 $-\frac{1}{p_2}$ 渐增到稳态值 $\frac{U}{R_1}$ 。

变压器的漏抗一般很小，因此 $\sigma \approx 0$ ，此时 $q \approx 1$ ，则

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{p_1} &= \frac{2\sigma\tau_1\tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)(1 + q)} \approx \frac{\sigma\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \\ -\frac{1}{p_2} &= \frac{(\tau_1 + \tau_2)(1 + q)}{2} \approx \tau_1 + \tau_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

这两个时间常数相差很多，一个时间常数差不多为零，相应的瞬变分量衰减很快；另一个时间常数差不多是两个绕组本身时间常数之和，其值甚大，相应的瞬变分量衰减很慢。若进一步将 τ_1 、 τ_2 和 σ 的数值代入上式时，则得

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{p_1} &\approx \frac{\sigma \tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\left(1 - \frac{M_{12}^2}{L_1 L_2}\right) \frac{L_1 L_2}{R_1 R_2}}{\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}} = \frac{L_1 L_2 - M_{12}^2}{L_1 R_2 + L_2 R_1} \frac{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2} \\
&= \frac{L_1 L_2' - L_{1m}^2}{L_1 R_2' + L_2' R_1} = \frac{(L_{1\sigma} + L_{1m})(L_{2\sigma}' + L_{1m}) - L_{1m}^2}{(L_{1\sigma} + L_{1m}) R_2' + (L_{2\sigma}' + L_{1m}) R_1} \\
&= \frac{L_{1m}(L_{1\sigma} + L_{2\sigma}') + L_{1\sigma} L_{2\sigma}'}{(R_1 + R_2') L_{1m} + L_{1\sigma} R_2' + L_{2\sigma}' R_1} \approx \frac{L_{1\sigma} + L_{2\sigma}'}{R_1 + R_2'} \quad (1-24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{p_2} &\approx \tau_1 + \tau_2 = \frac{L_{1m} + L_{1\sigma}}{R_1} + \frac{L_{1m} + L_{2\sigma}'}{R_2'} \\
&= \frac{L_{1m}(R_1 + R_2') + (L_{1\sigma} R_2' + L_{2\sigma}' R_1)}{R_1 R_2'} \\
&\approx \frac{L_{1m}}{\frac{R_1 R_2'}{R_1 + R_2'}} \quad (1-25)
\end{aligned}$$

式中 N_1 、 N_2 为一次绕组及二次绕组的匝数； L_{1m} 、 $L_{1\sigma}$ 为一次侧主磁通及漏磁通对应的电感系数； $L_{2\sigma}'$ 、 R_2' 为折合至一次侧的二次侧漏磁电感系数及电阻。

由上式可见，前一时间常数主要与漏磁有关，约等于短路电感系数与短路电阻之比，其值甚微；后一时间常数主要与主磁通有关，约等于励磁电感与一、二次绕组电阻并联之比，其值甚大。

与式 (1-22) 相应的电流变化曲线如图 1-2 a 所示。

用同样的方法求解二次侧电流。因二次侧短接，故

$$\begin{aligned}
i_2(p) &= \frac{-Z_{12}(p)U}{D(p)} = \frac{-M_{12}pU}{(R_1 + L_1 p)(R_2 + L_2 p) - M_{12}^2 p^2} \\
&= \frac{-M_{12}pU}{L_1 L_2 \left[\sigma p^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \right]} \quad (1-26)
\end{aligned}$$

由上式可见，二次侧电流的稳态值为零。又因特征方程式的根与一次侧的相同，因而两个瞬变分量的时间常数与一次侧的相同。利用分解定理，则得

$$i_2 = -\frac{UM_{12}}{R_1 R_2} \frac{1}{(\tau_1 + \tau_2)q} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (1-27)$$

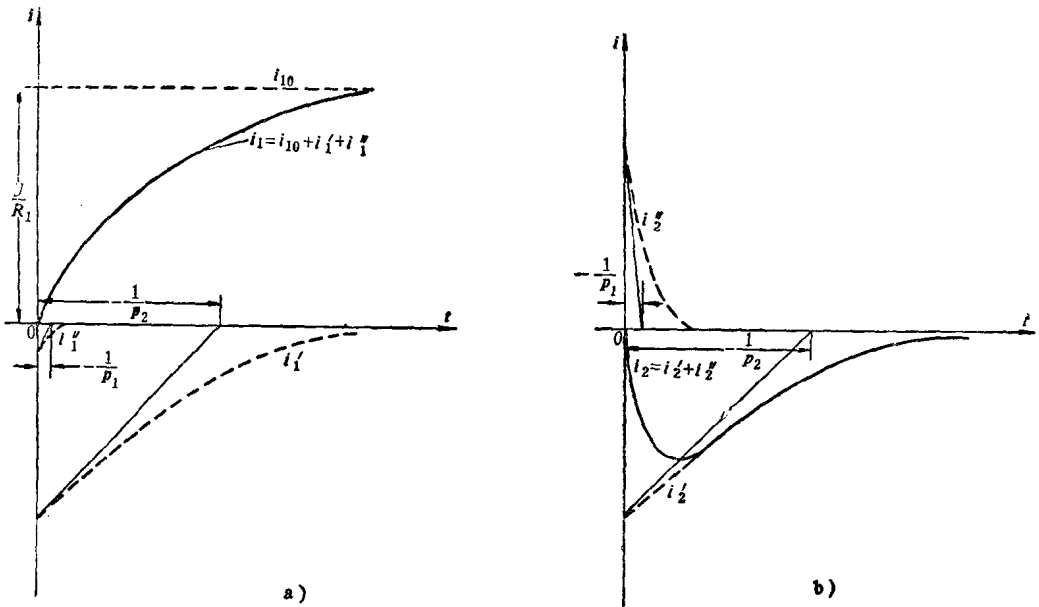
与式 (1-27) 相应的电流变化曲线如图 1-2 b 所示。

例1-1 设双绕组变压器的参数为 $L_1 = 100 \text{ H}$ ， $L_2 = 25 \text{ H}$ ， $M_{12} = 47.5 \text{ H}$ ， $R_1 = 25 \Omega$ ， $R_2 = 25 \Omega$ ，二次侧短接，一次侧突然施加 25 V 直流电压。求瞬变电流。

$$\text{解 } \tau_1 = \frac{L_1}{R_1} = \frac{100}{25} \text{ s} = 4 \text{ s} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} = \frac{25}{25} \text{ s} = 1 \text{ s}$$

$$\sigma = 1 - \frac{M_{12}^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{47.5^2}{100 \times 25} = 0.1$$

$$q = \sqrt{1 - \frac{4\sigma T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2}} = \sqrt{1 - \frac{4 \times 0.1 \times 4 \times 1}{(4 + 1)^2}} = 0.967$$



$$\begin{aligned}
 i_0 &= \frac{U}{R_1} \\
 i_1' &= \frac{U}{R_1} \left[\frac{\tau_2 + \frac{1}{p_2}}{(\tau_1 + \tau_2)q} \right] e^{p_2 t} & i_2' &= -\frac{UM_{12}}{R_1 R_2} \frac{1}{(\tau_1 + \tau_2)q} e^{p_2 t} \\
 i_1'' &= -\frac{U}{R_1} \left[\frac{\tau_2 + \frac{1}{p_1}}{(\tau_1 + \tau_2)q} \right] e^{p_1 t} & i_2'' &= \frac{UM_{12}}{R_1 R_2} \frac{1}{(\tau_1 + \tau_2)q} e^{p_1 t}
 \end{aligned}$$

图1-2 双绕组变压器的瞬变电流

$$p_1 = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sigma\tau_1\tau_2}(1+q) = -\frac{4+1}{2 \times 0.1 \times 4 \times 1}(1+0.967) = -12.3$$

$$p_2 = -\frac{2}{(\tau_1 + \tau_2)(1+q)} = -\frac{2}{(4+1)(1+0.967)} = -0.203$$

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{25}{25} \left\{ 1 + \frac{1}{(4+1) \times 0.967} \left[\left(1 - \frac{1}{0.203} \right) e^{-0.203t} - \left(1 - \frac{1}{12.3} \right) e^{-12.3t} \right] \right\} \\
 &= 1 - 0.81e^{-0.203t} - 0.19e^{-12.3t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_2 &= -\frac{25 \times 47.5}{25 \times 25} \frac{1}{(4+1) \times 0.967} (e^{0.203t} - e^{-12.3t}) \\
 &= -0.393e^{-0.203t} + 0.393e^{-12.3t}
 \end{aligned}$$

以上 i_1 、 i_2 的单位为 A。

2. 二次侧短接，一次侧突然施加正弦电压，此时，因

$$u_2(t) = 0 \quad u_1(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u_1(t) = u_1(p) = \frac{U_m(p\omega \cos \varphi + p^2 \sin \varphi)}{p^2 + \omega^2}$$

故

$$\begin{aligned}
 i_1(p) &= \frac{u_1(p)}{Z'(p)} = \frac{U_m(p\omega\cos\varphi + p^2\sin\varphi)}{(p^2 + \omega^2)Z'_1(p)} \\
 &= \frac{U_m(p\omega\cos\varphi + p^2\sin\varphi)(\tau_2 p + 1)}{(p^2 + \omega^2)\tau_2 L_1 \left[\sigma p^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \right]} \\
 &= \frac{M(p)}{N(p)}
 \end{aligned} \tag{1-28}$$

利用分解定理求解上式时, 因特征方程式

$$(p^2 + \omega^2) \left[\sigma p^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \right] = 0$$

的根为

$$\begin{aligned}
 p_1 &= -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sigma\tau_1\tau_2}(1 + q) \\
 p_2 &= -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sigma\tau_1\tau_2}(1 - q) = -\frac{2}{(\tau_1 + \tau_2)(1 + q)} \\
 p_3 &= j\omega, \quad p_4 = -j\omega
 \end{aligned}$$

故

$$i_1 = \frac{M(0)}{N(0)} + 2C\cos(\omega t + \theta) + \frac{M(p_1)}{p_1 N'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{M(p_2)}{p_2 N'(p_2)} e^{p_2 t} \tag{1-29}$$

式中 $\frac{M(0)}{N(0)} = 0$ C 及 θ 由下式决定

$$\begin{aligned}
 C e^{j\theta} &= \frac{M(j\omega)}{j\omega N'(j\omega)} \\
 &= \frac{U_m(j\omega^2\cos\varphi + j^2\omega^2\sin\varphi)(1 + j\tau_2\omega)}{j\omega \cdot 2\tau_2 L_1 \omega \left[-\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \omega + j \left(\frac{1}{\tau_1 \tau_2} - \sigma\omega^2 \right) \right]} \\
 &= \frac{U_m(\cos\varphi + j\sin\varphi)(1 + j\tau_2\omega)}{2\tau_2 L_1 \left[-\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \omega + j \left(\frac{1}{\tau_1 \tau_2} - \sigma\omega^2 \right) \right]} \\
 &= \frac{U_m \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2} e^{j(\varphi + \varphi_a)}}{2\tau_2 L_1 \sqrt{\left[\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \omega \right]^2 + \left[\frac{1}{\tau_1 \tau_2} - \sigma\omega^2 \right]^2}} e^{j\varphi_b} \\
 &= \frac{U_m}{2L_1 \omega \sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_2^2 \omega^2}} \frac{e^{j(\varphi + \varphi_a - \varphi_b)}}{\sqrt{\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\sigma\tau_1\tau_2\omega} \right)^2 + \left(\frac{1 - \sigma\tau_1\tau_2\omega^2}{\sigma\tau_1\tau_2\omega^2} \right)^2}} \\
 &= \frac{U_m}{2\sigma\omega L_1 k} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_2^2 \omega^2}} e^{j(\varphi + \varphi_a - \varphi_b)}
 \end{aligned} \tag{1-30}$$

式中 $\tan\varphi_a = \frac{L_2\omega}{R_2}$

$$\tan\varphi_b = -\frac{1 - \sigma\tau_1\tau_2\omega^2}{(\tau_1 + \tau_2)\omega} = -\frac{\omega^2 - p_1 p_2}{\omega(p_1 + p_2)}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\sigma \tau_1 \tau_2 \omega}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega^2}{\sigma \tau_1 \tau_2 \omega^2}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{p_1^2}{\omega^2}\right)\left(1 + \frac{p_2^2}{\omega^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\omega} \sqrt{(\omega^2 + p_1^2)(\omega^2 + p_2^2)}$$

由此可得

$$C = \frac{U_m}{2\sigma\omega L_1 k} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_2^2 \omega^2}}$$

$$\theta = \varphi + \varphi_a - \varphi_b$$

故 $2C \cos(\omega t + \theta) = \frac{U_m}{\sigma\omega L_1 k} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_2^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi + \varphi_a - \varphi_b) \quad (1-31)$

另外, 可以求得

$$\frac{M(p_1)}{p_1 N'(p_1)} e^{p_1 t} = \frac{U_m}{\sigma\omega L_1 k} \cdot \frac{p_1 + \frac{1}{\tau_2}}{p_1 - p_2} \sqrt{1 + \frac{p_2^2}{\omega^2}} e^{p_1 t} \cos(\varphi - \varphi_b + \varphi_{p_2}) \quad (1-32)$$

$$\frac{M(p_2)}{p_2 N'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{-U_m}{\sigma\omega L_1 k} \cdot \frac{p_2 + \frac{1}{\tau_2}}{p_1 - p_2} \sqrt{1 + \frac{p_1^2}{\omega^2}} e^{p_2 t} \cos(\varphi - \varphi_b + \varphi_{p_1}) \quad (1-33)$$

式中 $\tan \varphi_{p_1} = -\frac{\omega}{p_1}$

$$\tan \varphi_{p_2} = -\frac{\omega}{p_2}$$

故总电流为

$$i_1 = \frac{U_m}{\sigma\omega L_1 k} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{\tau_2^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi + \varphi_a - \varphi_b) + \frac{p_1 + \frac{1}{\tau_2}}{p_1 - p_2} \sqrt{1 + \frac{p_2^2}{\omega^2}} e^{p_1 t} \cos(\varphi - \varphi_b + \varphi_{p_2}) \right. \\ \left. - \frac{p_2 + \frac{1}{\tau_2}}{p_1 - p_2} \sqrt{1 + \frac{p_1^2}{\omega^2}} e^{p_2 t} \cos(\varphi - \varphi_b + \varphi_{p_1}) \right] \quad (1-34)$$

式 (1-34) 表明, 电流 i_1 仍由三部分组成, 第一项为稳态分量, 第二项及第三项为自由分量, 并分别以时间常数 $-\frac{1}{p_1}$ 及 $-\frac{1}{p_2}$ 衰减。二次电流 i_2 可用同样的方法求出, 其中自由分量的时间常数与一次侧的相同, 但稳态分量不为零, 而是与一次侧频率相同的交流电流。

由以上两例的分析可知, 在瞬变过程中, 耦合绕组中的电流除了稳态强制分量外, 还存在衰减的自由分量。这是符合物理原理的, 因为在瞬变之初, 各绕组相当于超导体而具有磁链不变的性质。因此, 在存在稳态分量的同时, 必然存在自由分量, 以使瞬变电流不致跃变。然而, 由于实际绕组中有电阻, 随着电流流经电阻和磁场能量逐渐消失, 自由分量也逐渐消失, 最后瞬变电流达到稳态值。这一过程的快慢取决于时间常数, 而时间常数由电路本身的参数决定, 与外加电压的大小和性质无关。电感愈大或电阻愈小, 时间常数愈大; 反之, 则时间常数愈小。在非全耦合的实际电感电路中, 时间常数的个数与耦合的绕组数目相同。