现代应用数学丛书

力学系与映射理论

〔日〕岩田義一 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

力学系与映射理论

〔日〕岩田義一 著
孙 澤 瀛 譯
吳 光 磊 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。介紹了关于力学系的两种变换的理論，共分两章。第1章介紹典型变换，第2章叙述完全結象。可供高等院校数学、力学、物理各专业学生作参考。

現代应用数学丛书

力学系与映射理论

原书名 力学系と写像の理論
原著者 〔日〕岩田義一
原出版者 岩波书店
譯者 孙澤瀛
校者 吳光磊

＊

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

＊

开本850×1168 1/32 印張1 26/32 字数41,000
1962年8月第1版 1962年8月第1次印刷
印数 1—4,500

統一书号：13119·467
定 价：（十四）0.34元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要内容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书内容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·測度*	河田敬义	賴英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程	福原滿洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程	福田武雄	穆鴻基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用	山内恭彦等	張质賢
結晶統計与代数	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数値計算法	森口繁一等	閻昌龄
量子力学中的数学方法*	胡永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩

书名	原作者	譯者
非綫性振动論	古屋茂	呂紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論 变形几何学*	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津文一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論	喜安善市等	陆志刚
自动控制論	喜安善市等	程立林
回路拓扑学	近藤一夫	張鳴鏞
信息論	喜安善市等	李文清
推断統計理論	北川敏男	李賢平
統計分析*	森口繁一	刘璋温
实驗設計	增山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論	官澤光一	張毓春
綫性規划	森口繁一	刘源張
經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有*者已在1962年7月以前出版。

目　录

第1章 典型变换

§1 Fermat 与 Maupertuis 原理

几何光学是由基本假設，即 Fermat 原理引导出来的。这个原理是：

光从 A' 向着 A 行进时，它是沿着这样的路綫进行的：对于行程中路綫的微小变化，由 A' 到 A 所需的时間不起变化。

設介质的折射率是 n，在介质中光速是 v，真空中光速是 c，则 $n=c/v$. 因此，如設沿着光程的綫素是 ds，那末，从 A' 到 A 所需的时間为

$$\int_{A'}^{A}\frac{ds}{v}=\frac{1}{c}\int_{A'}^{A}n\,ds.$$

如果把中途路綫的微小变化記成 δ，则 Fermat 原理可以写成

$$\delta\int_{A'}^{A}n\,ds=0.$$

在电子光学里，例如説，对于在静电場內运动着的带电粒子的行程，Maupertuis 原理是成立的。这原理就是，关于具有能量 h 的粒子所走路綫而取的积分

$$\int_{A'}^{A}\sqrt{h-\varphi}\,ds\quad(\varphi\text{ 为粒子的位能}),$$

对于途中路綫的任何微小变化是不变的。

如果考虑这样一种介质，其中的折射率 n 給定为

$$n=\sqrt{h-\varphi},$$

那末，光的行程和粒子的行程完全一致。

不論是位能或折射率，它們一般都是位置的函数。但虽在同一位置，由于光綫的方向不同而折射率也可能不同。具有这种性

质的介质称为各向异性的。例如晶体就是这样的。不具有这种性质的介质称为各向同性的。

光的行程与粒子行程的这种相似性，不过是在物理学史上累次发現的光与粒子的許多相似性中的一种現象而已。但是，如果除去象各向异性的晶体的那些介质不計外，和将光的行程作为粒子的行程来考虑的这种情况相反，磁場中的带电粒子的行程却不能以光来实現。因此，粒子的运动路程是比較具有一般性的，不能完全以光綫的情况来說明，所以下面首先对粒子力学的基本事項加以叙述。

§2 Hamilton 原理

力学系的运动可从 Hamilton 原理导出。設力学系之自由度为n，配备的n个坐标为$q_1, q_2, \cdots, q_n$，其速度为$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$（· 表示关于时間的微分），时間为$t\equiv q_0$，力学系的 Lagrange 函数記成$L(\dot{q}_r, q_r, t)$。这时，Hamilton 原理可叙述如下：

力学系从$A'(q'_\sigma)$进到$A(q_\sigma)$时，沿着进行路綫所取的积分

$$\int_{A'}^{A} L\,dt \equiv \int_{A'}^{A} L\,dq_0, \tag{2.1}$$

对于途中路綫的任何微小变化保持不变，但两端A'，A作为固定不动的。

如果把$dq_\sigma(\sigma=0, 1, 2, \cdots, n)$当做独立变数看待，那末，$Ldq_0$关于这些变数是齐次的1次形式。这是因为：$\dot{q}_r(r=1,2,\cdots,n)$是$dq_r$和$dq_0$之比，因而，Lagrange 函数关于$dq_\sigma$是0次的齐次式。于是，利用 Euler 关于齐次式的定理，微分形式$Ldt=Ldq_0\equiv\omega_d$可以写成

$$\omega_d=\sum_{\sigma=0}^{n} dq_\sigma \frac{\partial\omega_d}{\partial dq_\sigma} \equiv dq_\sigma \frac{\partial\omega_d}{\partial dq_\sigma}.$$

这里关于相同下标之总和按照張量写法，把总和符号Σ省去，但

在引起混淆时，也把 Σ 添上。当我們把 dq_σ 看成独立变数时，$\partial\omega_d/\partial dq_\sigma$ 是 ω_d 关于 dq_σ 的偏导数，它关于 $dq_\alpha(\alpha=0, 1, \cdots, n)$ 是 0 次的齐次式。把它写做 p_σ，对坐标 q_σ 而言，称做共轭的运动量。用 L, $\dot{q}_r$ 表示則有

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial\omega_d}{\partial dq_r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \quad (r=1, 2, \cdots, n), \\ p_0 &= \frac{\partial\omega_d}{\partial dq_0} = L - p_r\dot{q}_r, \\ \omega_d &= p_\sigma dq_\sigma = p_r dq_r + p_0 dq_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

p_0 是对时間 q_0 成共軛的运动量，經变分后的量 $H\equiv -p_0$ 称为能量。这些量 p_r 及 H 和时間因素有特殊的关系，因而它們的形式表現得如上述那样，但由于它們关于 dq_α 是 0 次的齐次式，所以，用其他坐标代替时間，它們的表示仍不变。也就是說，它們是力学系里特有的量。因此，$q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n$（或者把 q_0, p_0 也包含在內）被称为典型变数(canonical variable)。

試从 Hamilton 原理引出力学系的运动方程。設参数为 u 的力学系路綫写成 $q_\sigma=q_\sigma(u)$，微小变化記成 $q_\sigma(u)+\delta q_\sigma(u)$。那末，

$$\begin{aligned} \delta\int_{A'}^{A} L dq_0 &= \delta\int_{A'}^{A}\omega_d = \delta\int_{A'}^{A} p_\sigma dq_\sigma = \delta\int_{A'}^{A} p_\sigma \frac{dq_\sigma}{du}du \\ &= \int_{A'}^{A}\left(\delta p_\sigma \frac{dq_\sigma}{du} + p_\sigma\frac{d\delta q_\sigma}{du}\right)du \text{[1]} \\ &= \Big[p_\sigma\,\delta\, q_\sigma\Big]_{A'}^{A} - \int_{A'}^{A}\left(\frac{dp_\sigma}{du} - \frac{\partial p_\sigma}{\partial q_\sigma}\frac{dq_\sigma}{du}\right)\delta q_\sigma du \\ &= \omega_\delta(A) - \omega_\delta(A') - \int_{A'}^{A}\left(\frac{dp_\sigma}{du} - \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\frac{\omega_d}{du}\right)\delta q_\sigma du. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Hamilton 原理指的是，对于固定了两端（即 $\omega_\delta(A)=\omega_\delta(A')=0$）

[1] 假定参数 u 是这样选取的，其上下限在变分过程中保持不变，故 $\delta\int f du=\int\delta f du$。——校者注

的任意微小变化 δq_σ $(\sigma=0, 1, \cdots, n)$，上式等于0. 因此，运动方程可写成

$$\frac{dp_\sigma}{du}-\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\frac{\omega_d}{du}=0 \quad (\sigma=0, 1, \cdots, n). \tag{2.4}$$

如以 $u=t$，就得普通所采取的形式，即所謂 Lagrange 的运动方程。但这对我們說来并不重要。重要的是 $\int_{A'}^{A}\omega_d$ 这样一个积分，对于实际可能的路綫而論，它是两端 A', A 的坐标的函数，和途中的路綫无关。这是由于对滿足运动方程的路程来讲，由(2.3)，有

$$\delta\int_{A'}^{A}\omega_d=\omega_\delta(A)-\omega_\delta(A').$$

因此，这个积分之值作为两端 A', A 的函数可写成

$$S(A, A')=\int_{A'}^{A}\omega_d. \tag{2.5}$$

不用 Lagrange 的 n 个运动方程，而只用一个函数 S 来研究力学系以及光学系里的路綫問題，这正是 Hamilton 原来的动机。这个 S 就称做 Hamilton 的主函数。

从(2.5)得到

$$dS=\omega_d(A)-\omega_d(A')=p_\sigma dq_\sigma-p'_\sigma dq'_\sigma, \tag{2.6}$$

再由(2.6)又得出如下的关系

$$\frac{\partial S}{\partial q_\sigma}=p_\sigma, \quad \frac{\partial S}{\partial q'_\sigma}=-p'_\sigma \quad (\sigma=0, 1, 2, \cdots, n). \tag{2.7}$$

当 $\dot{q}_r$ $(r=1, 2, \cdots, n)$ 可用 q_r, p_r 表示时，則 $-p_0=H(q_r, t, \dot{q}_r)$ 得用 q_r, p_r 表示而記成 $H(q_r, t, p_r)$，在(2.7)中以 $\sigma=0$，就有

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H(q_r, t, p_r), \quad \frac{\partial S}{\partial t'}=H(q'_r, t', p'_r). \tag{2.8}$$

从这里把 p_r, p'_r 消去，于是得到 S 所应滿足的方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_r, t, \frac{\partial S}{\partial q_r}\right)=0, \quad \frac{\partial S}{\partial t'}-H\left(q'_r, t', -\frac{\partial S}{\partial q'_r}\right)=0. \tag{2.9}$$

上式称为 Hamilton-Jacobi 的偏微分方程。式中的 $H(q_r, t, p_r)$ 称为 Hamilton 函数或 Hamiltonian. Hamilton 函数 $H(q, t, p) = p_r\dot{q}_r - L(q, t, \dot{q})$ 关于 p_r 偏微分时，有

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{q}_r + p_s\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_r} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_r} = \dot{q}_r,$$

再由 (2.4)，把 t 取作独立变数，得

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial q_r} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}.$$

把这两組合并在一起，

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r=1, 2, \cdots, n) \tag{2.10}$$

称为 Hamilton 的典型方程 (canonical equations)。

如果利用微分形式 $\omega_d = p_r dq_r - H dt$，则运动方程可写成更对称的形式

$$\delta\omega_d - d\omega_\delta = 0. \tag{2.11}$$

这里的 d 是沿着路綫进行的微分，δ 是和 d 可換的任意变分。上式之所以能够这样写，实际进行計算就可看出。

$$\begin{aligned}\delta\omega_d - d\omega_\delta = {} & \delta p_r dq_r + p_r \delta dq_r - \delta H dt - H\delta dt \\ & - dp_r \delta q_r - p_r d\delta q_r + dH\delta t + Hd\delta t,\end{aligned}$$

由于 d 和 δ 是可換的，$\delta dq_r = d\delta q_r$，$\delta dt = d\delta t$，因此，等式的右边

$$\begin{aligned}&= \delta p_r dq_r - dp_r\delta q_r - \delta H dt + dH\delta t \\ &= \delta p_r\left(dq_r - \frac{\partial H}{\partial p_r}dt\right) - \delta q_r\left(dp_r + \frac{\partial H}{\partial q_r}dt\right) \\ &\quad + \delta t\left(dH - \frac{\partial H}{\partial t}dt\right).\end{aligned}$$

前面两个括弧中的項沿着路綫应等于 0，后一括弧中的項

$$dH - (\partial H/\partial t)dt$$

就是 (2.4) 的左边以 $\sigma=0$，因此，也等于 0. 于是，运动方程可以写成 (2.11)。一般讲来，从一个微分形式 $\Omega_d = y_r dx_r$ 所得的 $\delta\Omega_d$

$-d\Omega_\delta$ 称为 Ω_d 的外微分。如果 Ω_d 是全微分，则其外微分等于 0.

§3 典型变换

上节的(2.6)里，如把时間 t', t 当作固定的，则可得如下关系

$$p_r dq_r - p'_r dq'_r = dS(q,\ q').$$

q_r, p_r 是在时刻 t 的典型变数；q'_r, p'_r 是在时刻 t' 的典型变数。对这式作它的外微分，消去了 S 而得到不变的双綫性形式

$$dq_r\delta p_r - dp_r\delta q_r = dq'_r\delta p'_r - dp'_r\delta q'_r. \qquad (3.1)$$

从一組变数 $(q_1,\ \cdots,\ q_n,\ p_1,\ \cdots,\ p_n)$ 变到另一組变数 $(q'_1,\ \cdots,\ q'_n,\ p'_1,\ \cdots,\ p'_n)$ 的变换满足 (3.1) 时，一般地称之为典型变换。这种变换的微分，就是下列形式的綫性变换：

$$dq'_r = \frac{\partial q'_r}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial q'_r}{\partial p_j}dp_j, \qquad \delta q'_r = \frac{\partial q'_r}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial q'_r}{\partial p_j}\delta p_j,$$

$$dp'_s = \frac{\partial p'_s}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial p'_s}{\partial p_j}dp_j, \qquad \delta p'_s = \frac{\partial p'_s}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial p'_s}{\partial p_j}\delta p_j,$$

它必須使双綫性形式(3.1)不变。

使得两个向量 $(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ x_{1'},\ \cdots,\ x_{n'})$, $(y_1,\ \cdots,\ y_n,\ y_{1'},\ \cdots,\ y_{n'})$ 的反称积(skew product)

$$[xy] = x_r y_{r'} - x_{r'} y_r \qquad (3.2)$$

不变的綫性变换

$$x_\rho \to {}'x_\rho = a_{\rho\sigma}x_\sigma, \qquad y_\rho \to {}'y_\rho = a_{\rho\sigma}y_\sigma$$

$$(\rho,\ \sigma = 1,\ 2,\cdots,\ n,\ 1',\ \cdots,\ n')$$

称为綫丛❶变换或辛变换 (symplectic transformation)，这是和直交变换同样重要的变换。

如果把 $(dq_1,\ \cdots,\ dp_n)$, $(\delta q_1,\ \cdots,\ \delta p_n)$ 看成两个向量，那末，典型变换是使它們的反称积(3.1)不变的变换，因此，也是辛变换。

❶ 德文为 Xonoplax，意指綫丛 (linecomplex)，原作者誤解为“复素”。——校者注

如把$(x_1, \cdots, x_n, x_{1'}, \cdots, x_{n'})$当作列向量$x$再取$2n$阶矩陣

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

这里 0, 1 分别表示n阶的 0 矩陣与n阶的单位矩陣，那末，有

$$[xy]=x^*Jy.$$

符号 * 意味着行与列互换。因此，$'x=Ax$, $'y=Ay$ 里的 $A=(a_{\rho\sigma})$ 是辛变换就等价于

$$A^*JA=J. \tag{3.3}$$

将(3.3)两边作其行列式，由于$|J|=1$(| |表示行列式)，所以$|A|^2=1$. 从而$|A|$等于 1 或 -1. 从以下的說明我們将看出$|A|=1$.

設$x^1, x^2, \cdots, x^{2n}$为$2n$个独立的向量，即$Ax^\sigma='x^\sigma$，如把x^σ作为列元素的行列式記成$|x^1, x^2, \cdots, x^{2n}|$，則

$$|'x^1, \cdots, 'x^{2n}|=|A|\cdot|x^1, \cdots, x^{2n}|.$$

另一方面，关系

$$|x^1, \cdots, x^{2n}|^*\cdot|J|\cdot|x^1, \cdots, x^{2n}|=|[x^\rho x^\sigma]|$$

是成立的。这里的$|[x^\rho x^\sigma]|$是以反称积为元素的行列式。式子的左边由于$|J|=1$，所以等于$|x^1, \cdots, x^{2n}|$的平方。但由行列式論的定理，偶数次的反称行列式等于其元素之多項式的平方。因而，从$[x^\rho x^\sigma]=-[x^\sigma x^\rho]$知$|[x^\rho x^\sigma]|$等于反称积之多項式的平方。于是$|x^1, \cdots, x^{2n}|$是反称积的多項式，在辛变换下是不变的。这意味着$|'x^1, \cdots, 'x^{2n}|=|x^1, \cdots, x^{2n}|$. 因此，$|A|=1$. 更从此推知$A$的特征值之积等于 1.

从(3.3)得

$$A^*=JA^{-1}J^{-1},$$

于是，A^*因而A具有和A^{-1}相同的特征值。从此知道，如果A的一个特征值是λ，則λ^{-1}也是它的特征值。由于特征值全部的乘

积等于 1，所以 A 的特征值可以写成 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})$。这桩事实对于檢查加速装置中粒子行程的稳定性等是一項重要的性质。

所謂 $|A|=1$，指的是由变数 q_r, p_r 变到 q'_r, p'_r 的变换之行列式即 Jacobian 等于 1.

当 q_r, p_r 含有两个参数 u, v 时，如果关于 u 的变分記作 d，关于 v 的变分記成 δ，从(3.1)我們知道

$$(u, v)=\frac{\partial q_r}{\partial u}\frac{\partial p_r}{\partial v}-\frac{\partial p_r}{\partial u}\frac{\partial q_r}{\partial v}$$

仍旧是一个不变式。称为 Lagrange 括弧。这是两个向量 $(\partial q_r/\partial u, \partial p_r/\partial u)$，$(\partial q_r/\partial v, \partial p_r/\partial v)$ 的反称积。一个函数 $F(q, p)$ 之全微分

$$dF=\frac{\partial F}{\partial q_r}dq_r+\frac{\partial F}{\partial p_r}dp_r=dq_r\frac{\partial F}{\partial q_r}-dp_r\left(-\frac{\partial F}{\partial p_r}\right)$$

是不变量。所以，可把它看成是两个向量 (dq_r, dp_r) 与 $(-\partial F/\partial p_r, \partial F/\partial q_r)$ 的反称积。因此，对辛变换而論，$(-\partial F/\partial p_r, \partial F/\partial q_r)$ 是和 (dq_r, dp_r) 一样受到同样变换的向量。更由一个函数 $G(q, p)$ 作向量 $(-\partial G/\partial p_r, \partial G/\partial q_r)$，作两向量之对称积

$$[F, G]=\frac{\partial F}{\partial q_r}\frac{\partial G}{\partial p_r}-\frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial G}{\partial q_r},$$

它也是一个不变量。称为 Poisson 括弧。对于某一时刻的典型变数作 Lagrange 括弧或 Poisson 括弧，这些量是和时間无关的不变量。

§4 典型变换的表示法

在自由度 1 的情况下，变换 $q, p\to q', p'$ 如满足

$$dq\delta p-dp\delta q=dq'\delta p'-dp'\delta q',$$

那末，它是一个典型变换。假使 q, p 取作直交坐标时，上式就意味着微小面积不变。虽說，象

$$q' = \sqrt{2q}\cos p,\ p' = \sqrt{2q}\sin p$$

就是上述的那种变换，但对于一般的典型变换 $(q_r, p_r) \to (q'_r, p'_r)$，把 q'_r, p'_r 作为 q_r, p_r 的函数的一般表示法还不知道。

适当地取独立变数，对双綫性形式(3.1)进行积分試試看。

1) 首先把 q_r, q'_r 取作独立变数，从(3.1)有

$$\delta(p_r dq_r) - d(p_r\delta q_r) = \delta(p'_r dq'_r) - d(p'_r\delta q'_r),$$

于是，得

$$\delta(p_r dq_r - p'_r dq'_r) = d(p_r\delta q_r - p'_r\delta q'_r).$$

这意味着微分形式 $p_r dq_r - p'_r dq'_r$ 是全微分。因此，以

$$p_r dq_r - p'_r dq'_r = dV(q, q'),$$

这时因 q_r, q'_r 是互相独立的，所以得到

$$p_r = \frac{\partial V}{\partial q_r},\quad p'_r = -\frac{\partial V}{\partial q'_r}\quad (r=1, 2, \cdots, n). \tag{4.1}$$

2) 其次把 q_r, p'_r 取作独立变数。这时有

$$\delta(p_r dq_r) - d(p_r\delta q_r) = d(q'_r\delta p'_r) - \delta(q'_r dp'_r),$$

于是，得

$$\delta(p_r dq_r + q'_r dp'_r) = d(p_r\delta q_r + q'_r\delta p'_r).$$

这説明 $p_r dq_r + q'_r dp'_r$ 是全微分，把它写成 $dU(q, p')$，就得到

$$p_r = \frac{\partial U}{\partial q_r},\quad q'_r = \frac{\partial U}{\partial p'_r}. \tag{4.2}$$

为什么要这样地把独立变数变来变去来表示典型变换？原因如下：在典型变换 $(q_r, p_r) \to (q'_r, p'_r)$ 里，眞正应該看成独立变数的是 (q_r, p_r) 或 (q'_r, p'_r)，但用了它們，(3.1)就无法进行簡单的积分。正由于这个原因，所以把独立变数选定为 q_r, q'_r 等。虽説是这样，但在一般的典型变换里，q_r 与 q'_r 并不一定是独立的。事实上，存在着这样的典型变换，q'_r 是 $q_1, \cdots, q_n$ 的函数。例如說，所謂点变换的

$$q'_r = q'_r(q_1, \cdots, q_n),$$

$$p'_r = p_s\frac{\partial q_s}{\partial q'_r},\quad 或\quad p_s = p'_r\frac{\partial q'_r}{\partial q_s},$$

这时 q'_r 不能看成是和 q_r 独立的变数。因此，如(4.1)那样的表示方法是不可能的。如果使用(4.2)的表示方法，则取 $U(q, p') = p'_r q'_r(q)$ 就行了。是不是(4.1)与(4.2)两种表示方法就夠了呢？那还不能說是足夠的。总之，如果 (q_r, q'_r) 或 (q_r, p'_r) 之变数間有着函数关系时，那就不能不使用其他的表示方法。

在(3.1)中出現了 $4n$ 个变数。这 $4n$ 个中不具乘积形式的 $2n$ 个变数取作独立变数时，则(3.1)是可以积分的。q_r, p_r 虽出現在 $dq_r\delta p_s$ 这样的乘积形式內，但对于 q_r, q'_r 或 q_r, p'_r 而論，$dq_r\delta q'_s$ 或 $dq_r\delta p'_s$ 这样的項不存在。这样地取独立变数的方式是数目无限的，但由于典型变数的变换行列式必須等于1，所以存在着一个限制。例如說采取(4.1)的表示方法时，则必有如下的关系

$$\frac{\partial(q'_r, p'_r)}{\partial(q_r, p_r)} = \frac{\partial(q'_r, p'_r)}{\partial(q'_r, q_r)} \Big/ \frac{\partial(q_r, p_r)}{\partial(q'_r, q_r)}$$
$$= \frac{\partial(p'_r)}{\partial(q_r)} \Big/ (-1)^n \frac{\partial(p_r)}{\partial(q'_r)} = 1.$$

这里的写法 $\partial(p'_r)/\partial(q_r)$ 是这样的：$\partial(p'_r)/\partial(q_r) \equiv \partial(p'_1, \cdots, p'_n)/\partial(q_1, \cdots, q_n)$。要这式具有一定的意义，则分母与分子不能等于0是必要的。从而就有

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial q'_r \partial q_s}\right| \neq 0.$$

对于(4.2)的表示方法，同样的限制

$$\left|\frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial p'_s}\right| \neq 0$$

是必要的。

除上述两种表示方法外，还有两种表示方法。

3) 取 $(q_r+q'_r)/2 = u_r$, $(p_r+p'_r)/2 = v_r$ 作为独立变数，更以

$$q_r - q'_r = 2f_r, \quad p_r - p'_r = 2g_r,$$

则(3.1)变为

$$du_r\delta g_r - dg_r\delta u_r = dv_r\delta f_r - df_r\delta v_r.$$

从此有

$$\delta(g_r du_r - f_r dv_r) = d(g_r \delta u_r - f_r \delta v_r),$$

因而，$g_r du_r - f_r dv_r$ 是一个全微分，写成

$$g_r du_r - f_r dv_r = dF(u, v).$$

因此，可得

$$g_r = \frac{\partial F}{\partial u_r}, \quad f_r = -\frac{\partial F}{\partial v_r},$$

以及

$$\left.\begin{aligned} q_r &= u_r - \frac{\partial F}{\partial v_r}, \quad q'_r = u_r + \frac{\partial F}{\partial v_r}, \\ p_r &= v_r + \frac{\partial F}{\partial u_r}, \quad p'_r = v_r - \frac{\partial F}{\partial u_r}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

这里

$$\partial(q_r, p_r)/\partial(u_r, v_r) \neq 0.$$

4) 取 $(q_r - q'_r)/2 = u_r$，$(p_r - p'_r)/2 = v_r$ 作为独立变数，和上面同样，利用 $G(u, v)$，则得

$$\left.\begin{aligned} q_r &= u_r - \frac{\partial G}{\partial v_r}, \quad q'_r = -u_r - \frac{\partial G}{\partial v_r}, \\ p_r &= v_r + \frac{\partial G}{\partial u_r}, \quad p'_r = -v_r + \frac{\partial G}{\partial u_r}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

这时和 3) 一样具有同样的条件。

(4.3)的表示方法有一个优点，那就是，当力学系的一条路綫对于时間是周期性的，因而 $q'_r = q_r$，$p'_r = p_r$ 时，F 在这里具有极值。亦即，如 F 为已知，則从条件 $\partial F/\partial u_r = \partial F/\partial v_r = 0$ 可找出周期解。

§5 运动方程之积分

当Hamiltonian很简单的时候，要求运动方程(2.10)的解，照通常方法解出就可以了。至于变换理論，那是在沒有办法的时候才使用的。