S 国家高职、高专教育高等数学系列教材

Gaozhi Jiaoyu

线性代数学习辅导

主 编 刘书田
副主编 胡显佑 高旅端
编著者 胡显佑 赵佳因

北京大学出版社

国家高职、高专教育高等数学系列教材

线性代数学习辅导

主　编　刘书田

副主编　胡显佑　高旅端

编著者　胡显佑　赵佳因

北京大学出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导/胡显佑,赵佳因编著. —北京:北京大学出版社,2001.1

ISBN 7-301-04795-9

Ⅰ.线… Ⅱ.①胡… ②赵… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 77997 号

书　　名:线性代数学习辅导
著作责任者:胡显佑　赵佳因　编著
责 任 编 辑:王国义　刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-04795-9/O·497
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850×1168　32 开本　5.875 印张　145 千字
2001 年 1 月第 1 版　2001 年 1 月第 1 次印刷
印　　数:0001—8000 册
定　　价:9.00 元

前　言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展，满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要，我们依照教育部颁布的高等职业教育高等数学教学大纲，为高职、高专经济类、管理类及工科类学生编写了本套高等数学系列教材. 本套书包括教材三个分册：《高等数学》、《线性代数》、《概率统计》，并编有配套辅导教材三个分册：《高等数学学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》，总共6分册.

编写本套系列教材的宗旨是：以提高高等职业教育教学质量为指导思想，以培养高素质应用型人材为总目标，力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”. 因此，我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类及工科类高等数学教学大纲的要求，在三个分册的主教材中分别系统介绍了“微积分”、“线性代数”、“概率统计”的基本理论、基本方法及其应用. 本套系列教材具有以下特点：

1. 教材的编写紧扣教学大纲，慎重选择教材内容. 既考虑到高等数学本学科的科学性，又能针对高职班学生的接收能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，揭示概念的实质，又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，并达到“学以致用”的目的.

2. 为使学生更好地掌握教材的内容，我们编写了配套的辅导教材，教材与辅导教材的章节内容同步，但侧重点不同. 辅导教材每章按照：教学要求、内容提要与解题指导，自测题与参考解答三部分内容编写. 教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点；内容提要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出提

示;解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明,指出初学者易犯的错误,教会学生数学思维的方法,总结出解题规律.教材与辅导教材相辅相成,同步使用,以达到培养学生的思维、逻辑推理能力,运算能力及运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性,便于自学;注意用语确切,行文严谨.教材每节后配有适量习题,书后附有习题答案和解法提示.辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答,便于教师和学生使用.

本套系列教材的编写和出版,得到了北京大学出版社的大力支持和帮助,同行专家和教授提出了许多宝贵的建议,在此一并致谢!

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正.

编　者

2001年1月于北京

内 容 简 介

本书是国家高等职业、高等专科教育高等数学系列教材之一“线性代数”的学习辅导书.本书是根据主教材的四章内容:矩阵、行列式、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量而编写的学习辅导书,与教材相辅相成,同步使用.每章按照:教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写.教学要求指明学生应掌握和理解的知识点;内容提要是把重点内容和容易混淆的概念给出提示,解题指导是通过典型例题的解法教会学生数学思维方法,揭示出解题规律,并通过典型例题中的点评与说明,指出初学者易犯的错误,使学生加深对课堂上所讲内容的理解,以加强基础训练和提高学生的解题能力;自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题,可供学生检测对基础知识理解程度和解题能力,每章后附有自测题的参考解答.

本书可作为高等职业、高等专科学生学习“线性代数”的辅导教材或学习参考书,对数学爱好者本书也是一本较好的“线性代数”自学参考书.

目　　录

第一章 矩　　阵

一、教学要求

1. 正确理解矩阵的概念.

2. 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置及其运算律.

3. 了解分块矩阵的分块原则,掌握分块矩阵的运算.

4. 熟练掌握矩阵的初等变换,会用初等行变换把矩阵化为简化的阶梯形矩阵,会用初等变换法把矩阵化为其等价标准型.

5. 正确理解逆矩阵的概念,熟练掌握用初等变换法求逆矩阵,会解矩阵方程.

二、内容提要与解题指导

(一) 矩阵的运算

1. 矩阵与数的运算规律有些是相同的,但也有许多不同点,学习时必须十分注意它们之间的差异,切不可将数的所有运算照搬到矩阵中来.例如,两个数 a 与 b 的乘法满足交换律,即 $ab=ba$,但两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘法一般是不满足交换律的,即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,由此可知 $(\boldsymbol{AB})^n\neq\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B}^n$, $(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2\pm2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 等.

2. 矩阵与矩阵的乘法是矩阵运算中的重点,学习时必须注意以下几点:

(1) 只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘.

(2) 一般情况下,矩阵乘法不满足交换律,即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换的**.若 $\boldsymbol{AB}$

$\neq \boldsymbol{BA}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是**不可交换的**.

(3) 一般情况下,矩阵乘法不满足消去律,即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(4) 两个非零矩阵的乘积可能为零矩阵,即 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,但可能有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 因此,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

例 1 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 5 & 4\\ 2 & -4 & -2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-4 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 6 & 2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 6 & 2\end{bmatrix},$$

求:

(1) $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$; (2) $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$; (3) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$;

(4) 若 X 满足:$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}$,求 $\boldsymbol{X}$;

(5) 若 $\boldsymbol{Y}$ 满足:$(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y})+3(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}$,求 $\boldsymbol{Y}$.

解 (1) 由已知得

$$\begin{aligned}2A+3B&=2\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 5 & 4\\ 2 & -4 & -2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-4 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 6 & 2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}6 & -2 & 0\\ -2 & 10 & 8\\ 4 & -8 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-12 & -6 & 12\\ 3 & -3 & 0\\ 0 & 18 & 6\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-6 & -8 & 12\\ 1 & 7 & 8\\ 4 & 10 & 2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 因为

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix},$$

所以

$$C^{\mathrm{T}}D=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&3\\6&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}19&6\\24&5\end{bmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$ 没有意义.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是 3 行 3 列矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是 3 行 2 列矩阵,按照减法法则无法进行运算,所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$ 没有意义.

说明 只有同型矩阵才能相加(减).

(4) 因为 $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}$,所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\\6&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2\\2&4\\3&-2\end{bmatrix}.$$

(5) 由$(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y})+3(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}$,可得

$$4\boldsymbol{Y}=2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-6&-8&12\\1&7&8\\4&10&2\end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{2}&-2&3\\\dfrac{1}{4}&\dfrac{7}{4}&2\\1&\dfrac{5}{2}&\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

例 2 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1\\0&3\\1&4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-2&1\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$.

解

$$AB=\begin{bmatrix}3&-1\\0&3\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\times1+(-1)\times0&3\times3+(-1)\times(-2)&3\times1+(-1)\times1\\0\times1+3\times0&0\times3+3\times(-2)&0\times1+3\times1\\1\times1+4\times0&1\times3+4\times(-2)&1\times1+4\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3&11&2\\0&-6&3\\1&-5&5\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\0&3\\1&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times3+3\times0+1\times1&1\times(-1)+3\times3+1\times4\\0\times3+(-2)\times0+1\times1&0\times(-1)+(-2)\times3+1\times4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&12\\1&-2\end{bmatrix}.$$

说明 此例说明在一般情况下 $AB\neq BA$，即矩阵乘法不满足交换律. 若矩阵 A 与 B 满足 $AB=BA$，则称矩阵 A 与矩阵 B 是可交换的.

例 3 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}6&-5\\1&-1\end{bmatrix},$$

求 AB,AC.

解 $$AB=\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times2+(-2)\times(-1)&1\times1+(-2)\times2\\0\times2+0\times(-1)&0\times1+0\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&-3\\0&0\end{bmatrix},$$

$$AC=\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-5\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times6+(-2)\times1 & 1\times(-5)+(-2)\times(-1)\\ 0\times6+0\times1 & 0\times(-5)+0\times(-1)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

说明 此例在 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$ 的情况下，得到了 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，说明矩阵乘法不满足消去律. 因此，一般情况下当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 时，不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 读者在本章内容全部学完后可以回答"$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 在什么条件下可以推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$".

例 4 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解 $$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}3\times0+0\times1 & 3\times0+0\times(-4)\\ 1\times0+0\times1 & 1\times0+0\times(-4)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

注意 此例在 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 的情况下得到了 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，说明两个非零矩阵相乘可能是零矩阵. 因此，一般情况下当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时，不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

例 5 已知 $\boldsymbol{A}=(1\ \ 2\ \ 3)$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=(1\ \ 2\ \ 3)\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=(1\times2+2\times0+3\times1)=(5),$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}(1\ \ 2\ \ 3)=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = (5)^{\mathrm{T}} = (5).$$

例 6 求与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$可换的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可换意味着 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 由此可知 $\boldsymbol{B}$ 为二阶矩阵. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 由

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_2 \\ x_3 + x_4 & x_4 \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + x_2, \\ x_1 + x_3 = x_3 + x_4, \\ x_2 + x_4 = x_4, \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = x_4. \end{cases}$$

由此得出与$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$可交换的矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix},$$

其中 a,b 为任何数.

例 7 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵,定义 $f(\boldsymbol{A})=a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{E}$. 当 $f(x)=x^2-x-2$,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

时,求 $f(\boldsymbol{A})$.

解 因为 $f(x)=x^2-x-2$,所以

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\\&=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&3\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}2&-1\\-3&3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}7&-5\\-15&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-1\\-3&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}3&-4\\-12&7\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 8 已知矩阵

$$\boldsymbol{\alpha}=(1\quad 2\quad 3),\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta},$$

求 $\boldsymbol{A}^n$.

分析 直接计算 $\boldsymbol{A}^n$,不容易找出其变化规律,如果利用矩阵乘法的结合律,则很容易求出 $\boldsymbol{A}^n$. 因为,$\boldsymbol{A}^n=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}_{n\text{个}}$ $=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\underbrace{(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})}_{(n-1)\text{个}}\boldsymbol{\beta}$,而 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是一个 1 阶矩阵.

解 因为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=(3),$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{A},\\\boldsymbol{A}^3&=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=3^2\boldsymbol{A},\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

由此推得

$$A^n = 3^{n-1}A = 3^{k-1}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

说明 在求 A^n 时，可以巧用矩阵乘法的结合律. 特别地，

$$A^n = (\alpha^T\beta)^n = \alpha^T(\beta\alpha^T)(\alpha^T\beta)\cdots(\beta\alpha^T)\beta.$$

当 $\alpha^T\beta$ 为 1 阶矩阵时，$\alpha^T\beta$ 就是一个数，可以移至最前面，使计算得以简化. 有时为了计算简便，甚至人为地把矩阵 A 拆成两个矩阵的乘积.

例 9 已知三阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

求 A^5.

解 首先把 A 看成两个矩阵的乘积

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1 \quad 1 \quad 1),$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1 \quad 1 \quad 1)$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1 \quad 1 \quad 1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\Bigg[(1 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\cdot (1\ \ 1\ \ 1)\left[\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right](1\ \ 1\ \ 1),$$

而

$$(1\ \ 1\ \ 1)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=(6),$$

于是

$$\boldsymbol{A}^5=6^4\boldsymbol{A}=6^4\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}.$$

例 10 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$，证明：$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$.

证 必要性 由 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$，有

$$\boldsymbol{A}^2=\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\right]\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\right]=\frac{1}{4}(\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}).$$

若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则

$$\frac{1}{4}(\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}),$$

化简得 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，必要性得证.

充分性 若 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=\frac{1}{4}(\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=\frac{1}{4}(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\\&=\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，充分性得证.

例 11 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则下述结论必成立的是(　　).