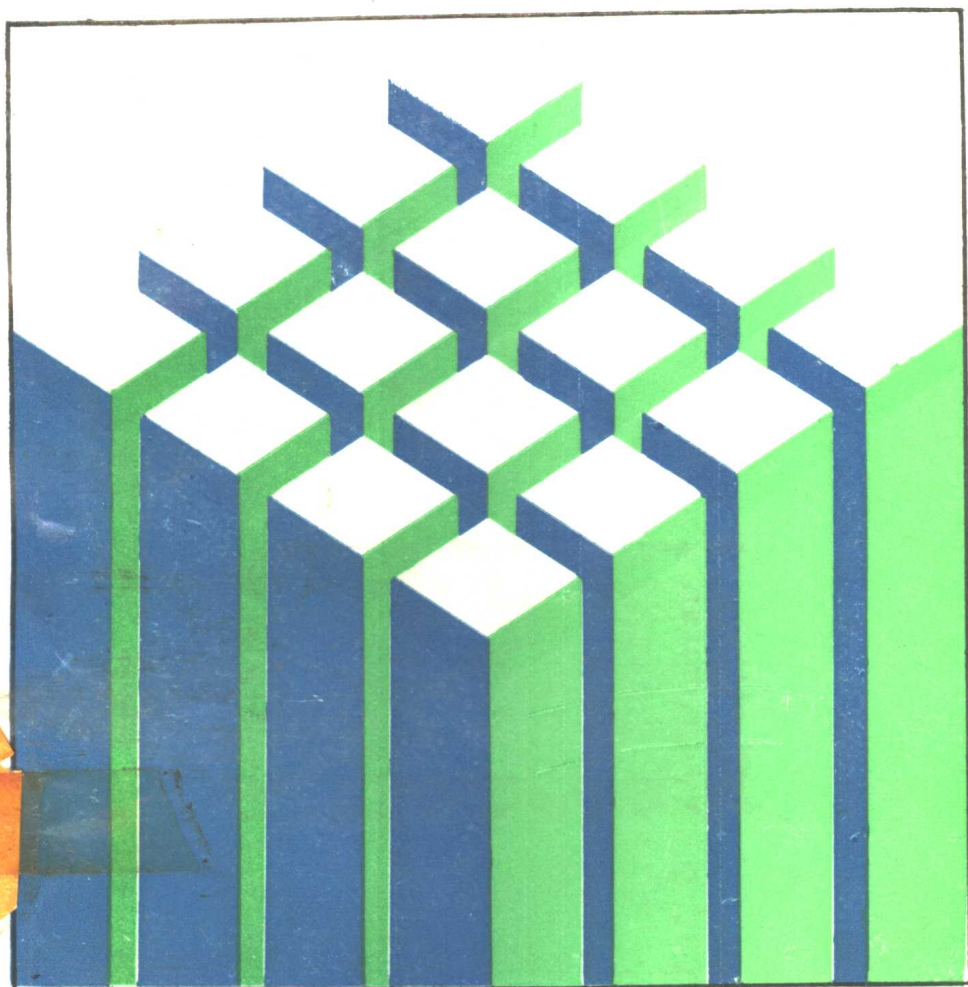


样条函数与结构力学

刘效尧 编著



人民交通出版社

样条函数与结构力学

Yangtiao Hanshu yu Jiegou Lixie

刘效亮 编著

人民交通出版社

内 容 提 要

本书叙述了结构近似分析中的样条方法，包括一元样条、二重样条和二元样条的能量法、加权残值法、积分点法和半解析法。其中一些成果是作者近几年的工作所得。

本书可供从事结构近似分析的工程技术人员和研究工作者参考。

样条函数与结构力学

刘效尧 编著

责任编辑：谢仁物

正文设计：乔文平

插图设计：裘琳

责任校对：杨杰

人民交通出版社出版发行

（北京和平里东街10号）

各地新华书店经销

人民交通出版社印刷厂印刷

开本：850×1168 $\frac{1}{16}$ 印张：13.5 字数：353千

1990年5月 第1版

1990年5月 第1版 第1次印刷

印数：0001—1400册 定价：9.00元

ISBN7-114-00807-4

TU·00006

目 录

第一章 样条函数基础	1
第一节 三次样条函数.....	1
第二节 N 次样条函数.....	9
第三节 多项式样条函数的基底.....	13
第四节 样条函数与势能原理.....	40
第五节 二重样条函数.....	43
第六节 二元 B 样条.....	51
第二章 一元样条能量方法	57
第一节 势能原理与李兹法.....	57
第二节 二次样条单元族.....	70
第三节 三次样条单元族.....	86
第四节 一次样条单元族.....	118
第五节 平面和空间杆系.....	124
第六节 弹性地基梁.....	137
第三章 二重样条能量法	147
第一节 薄板弯曲和平面问题势能原理.....	147
第二节 二重二次、三次样条单元族.....	153
第三节 二重一次样条单元族.....	188
第四节 二重样条单元族的组合问题.....	200
第五节 板壳振动问题.....	229
第六节 二重样条能量法小结.....	240
第四章 样条有限条法	242
第一节 振动函数样条有限条族.....	242
第二节 挠度函数样条有限条族.....	257
第三节 板壳问题.....	263

第四节	样条有限条族小结	265
第五章	二元样条单元族	266
第一节	薄板弯曲问题二元二次样条单元族	266
第二节	平面问题二元二次样条单元族	285
第三节	应力函数二元二次样条单元族	289
第六章	样条函数加权残值法	292
第一节	加权残值法	292
第二节	五次 B 样条离散型最小二乘法	303
第三节	五次 B 样条半离散型最小二乘法	308
第四节	组合结构加权残值法	311
第五节	加权残值法小结	323
第七章	样条积分配点法	324
第一节	积分配点法	324
第二节	积分矩阵显式	330
第三节	直梁问题	339
第四节	分段的连接	344
第五节	端点消去法和连续转移法	352
第六节	凝聚法	362
第七节	静定平面曲梁	365
第八节	超静定平面曲梁	386
第九节	组合曲梁排	402
第十节	薄壁结构的组合扭转	414
第十一节	矩形薄板的弯曲稳定与振动	418
参考文献		424

第一章 样条函数基础

样条函数是美国数学家 I.J. 舍恩伯格 (Schoenberg) 在四十年代为光顺曲线而提出来的, 但是样条函数却有着坚实的力学基础, 而且早已被人们在实践中采用了。这一章首先从力学角度导出有实用价值的一元样条函数, 然后再给出二重样条函数和二元样条函数, 这些内容是以后各章的数学基础。因为本书是把样条函数作为结构分析方法的工具, 所以本章着重给出样条函数的一些定义和结论, 而不作严格的证明, 有兴趣的读者可以阅读书末参考书目所列出的文献和资料。

第一节 三次样条函数

在平面直角坐标系中有一根等截面刚性支承连续梁, 梁轴线与 x 轴重合。位于 x_i ($i=0, 1, 2, \dots, m$) 处的刚性支座产生不均匀沉陷 y_i ($i=0, 1, 2, \dots, m$) 时, 梁的挠度曲线为 $S(x)$, 如图 1-1-1 所示。由结构力学知识可知: 支座两侧梁的挠度、转角和弯矩是连续的; 由于跨间无荷载, 所以 (与挠度的三阶导数成正比的) 剪力是常数。这个力学问题定义了三次样条函数。

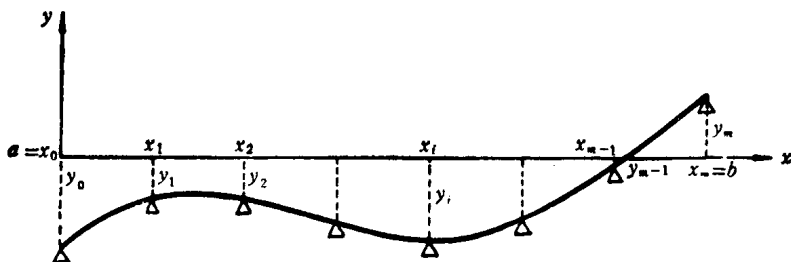


图 1-1-1

定义：设在区间 $[a, b]$ 上给定一个分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$, $[a, b]$ 上的一个函数 $S_3(x)$ 称为三次样条函数，如果它满足以下条件：

(1) 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 内 $S_3(x)$ 是三次多项式；

(2) 在整个区间 $[a, b]$ 上， $S_3(x)$ 是二阶连续可导函数，即在点 x_i ($i = 1, 2, \dots, m-1$) 处成立

$$S_3^{(k)}(x_{i-0}) = S_3^{(k)}(x_{i+0}) \quad (k = 0, 1, 2)$$

x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) 称为 $S_3(x)$ 的节点。

在给定一组有序数列 y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) 后，如果 $S_3(x)$ 再满足条件

$$(3) S_3(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

则称 $S_3(x)$ 为插值三次样条函数。

从这个定义出发可以导出结构力学的三弯矩方程。

记 $S_3(x)$ 在节点 x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) 处的函数值、一阶导数、二阶导数为

$$S_3(x_i) = y_i$$

$$S_3^{(1)}(x_i) = \theta_i$$

$$S_3^{(2)}(x_i) = \frac{M_i}{EI} = \rho_i \quad (1-1-1)$$

它们分别对应于支座沉陷、支座上梁的转角和曲率。

由于在连续梁的跨间无荷载，曲率呈线性变化，也就是说在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上， $S_3(x)$ 的二阶导数是线性的，即

$$S_3^{(2)}(x) = \rho_{i-1} \frac{x_i - x}{l_i} + \rho_i \frac{x - x_{i-1}}{l_i}$$

$$l_i = x_i - x_{i-1}$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (1-1-2)$$

将 $S_3^{(2)}(x)$ 连续积分两次，并利用式(1-1-1)可得到跨间转角和挠

度

$$\begin{aligned} S_s^{(1)}(x) = & -\rho_{i-1} \frac{(x_1 - x)^2}{2l_1} + \rho_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2l_1} \\ & + \frac{y_i - y_{i-1}}{l_1} - \frac{l_1(\rho_i - \rho_{i-1})}{6} \\ & x \in [x_{i-1}, x_i] \end{aligned} \quad (1-1-3)$$

$$\begin{aligned} S_s(x) = & \rho_{i-1} \frac{(x_1 - x)^3}{6l_1} + \rho_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6l_1} \\ & + \left(\frac{y_{i-1}}{l_1} - \frac{l_1 \rho_{i-1}}{6} \right) (x_i - x) \\ & + \left(\frac{y_i}{l_1} - \frac{l_1 \rho_i}{6} \right) \\ & x \in [x_{i-1}, x_i] \end{aligned} \quad (1-1-4)$$

由式(1-1-3)可得到节点 x_i 左右转角为

$$S_s^{(1)}(x_i - 0) = \frac{l_1}{6} \rho_{i-1} + \frac{l_1}{3} \rho_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{l_1} \quad (1-1-5)$$

$$\begin{aligned} S_s^{(1)}(x_i + 0) = & -\frac{l_{i+1}}{3} \rho_i - \frac{l_{i+1}}{6} \rho_{i+1} \\ & + \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}} \end{aligned} \quad (1-1-6)$$

由转角连续条件可得到三弯矩方程

$$\begin{aligned} & M_{i-1}l_1 + 2M_i(l_1 + l_{i+1}) + M_{i+1}l_{i+1} \\ & = 6EI \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{l_1} \right) \\ & (i = 1, 2, \dots, m-1) \end{aligned} \quad (1-1-7)$$

式(1-1-4)就是用支座沉陷和支座处梁的曲率表示的三次插值样条函数。三弯矩方程(1-1-7)也称为三次插值样条函数的连续性方程。因为这个连续性方程是用弯矩 M 表示的, 所以也称为 M 连续性方程。此外, 三次插值样条函数还存在着另外一个连续性方程, 它是用转角 θ 来表示的, 称为 θ 连续性方程, 在结构力学

中称为三转角方程。下面仍然从上面的定义出发，导出三转角方程和以转角表示的三次插值样条函数。

如图1-1-2所示，有一段两端固定的梁 l_i ，左右两端的 x 坐标分别是 x_{i-1} 、 x_i ，当左端产生单位沉陷或单位转角时它的挠度函数分别为

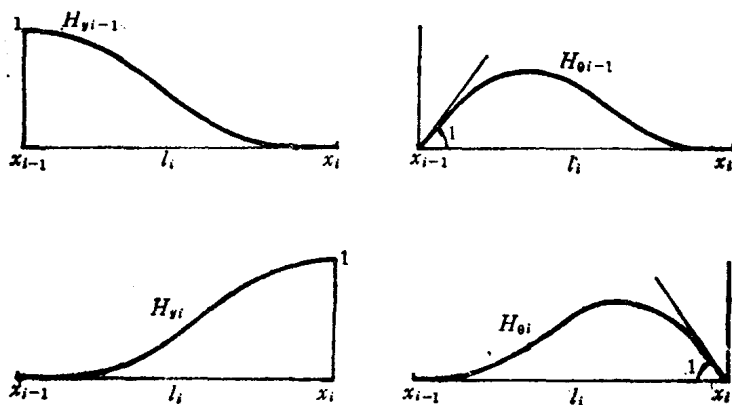


图 1-1-2

$$H_{yi-1} = \frac{(x_i - x)^2 [2(x - x_{i-1}) + l_i]}{l_i^3} \quad (1-1-8)$$

$$H_{\theta i-1} = \frac{(x_i - x)^2 (x - x_{i-1})}{l_i^3}$$

当右端产生单位沉陷或单位转角时它的挠度函数分别为

$$H_{yi} = \frac{(x_i - x_{i-1})^2 [2(x_i - x) + l_i]}{l_i^3} \quad (1-1-9)$$

$$H_{\theta i} = -\frac{(x - x_{i-1})^2 (x_i - x)}{l_i^3}$$

所以刚性支承连续梁支座沉陷的位移函数可写成

$$S_s(x) = H_{\theta i-1} \theta_{i-1} + H_{\theta i} \theta_i$$

(1-1-10)

$$+ H_{y_{i-1}} y_{i-1} + H_{y_i} y_i$$

这就是用支座沉陷和转角表示的三次样条插值函数，也称为分段三次埃尔米特 (Hermite) 插值多项式。

对式(1-1-10)连续两次求导，可以得到跨间转角和曲率

$$\begin{aligned} S_3^{(1)}(x) = & -\frac{(x_i - x)(2x_{i-1} + x_i - 3x)}{l_i^2} \theta_{i-1} \\ & - \frac{(x - x_{i-1})(2x_i + x_{i-1} - 3x)}{l_i^2} \theta_i \\ & + 6(x_i - x)(x - x_{i-1}) \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i^3} \end{aligned} \quad (1-1-11)$$

$$\begin{aligned} S_3^{(2)}(x) = & 2 \frac{3x - 2x_i - x_{i-1}}{l_i^3} \theta_{i-1} \\ & + 2 \frac{3x - x_i - 2x_{i-1}}{l_i^3} \theta_i \\ & + 6(x_i + x_{i-1} - 2x) \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i^3} \end{aligned} \quad (1-1-12)$$

由 x_i 左右弯矩连续条件

$$S_3^{(2)}(x_i - 0) = S_3^{(2)}(x_i + 0)$$

可得到三转角方程

$$\begin{aligned} & l_{i+1} \theta_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) \theta_i + l_i \theta_{i+1} \\ & = 3 \left[\frac{l_{i+1}}{l_i} (y_i - y_{i-1}) + \frac{l_i}{l_{i+1}} \right. \\ & \quad \left. \times (y_{i+1} - y_i) \right] \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m-1) \quad (1-1-13)$$

三转角方程在结构力学中不象三弯矩方程那样被广泛使用。

上面从力法和位移法分别导出了三次样条函数的两种不同表

达式和相应的连续性方程,但是这两个连续性方程都只能建立 $(m-1)$ 个相互独立的方程,而未知量却有 $(m+1)$ 个。因此必须在两端 (x_0, x_m) 附加两个边界条件。

在 M 连续性方程(1-1-7)中,如果 $i = 0$

$$\begin{aligned} M_{-1}l_0 + 2M_0(l_0 + l_1) + M_1l_1 \\ = 6EI \left(\frac{y_1 - y_0}{l_1} - \frac{y_0 - y_{-1}}{l_0} \right) \end{aligned}$$

当虚拟跨 $l_0 \ll l_1$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 而且虚拟支座处梁的弯矩 $M_{-1} = 0$, 上式简化为

$$2M_0l_1 + M_1l_1 = 6EI \left(\frac{y_1 - y_0}{l_1} - \theta_0 \right) \quad (1-1-14)$$

式中,当 $M_0 = 0$ 时 $i = 0$ 端为简支,式(1-1-14)可解出 M_1 ; 当 $\theta_0 = 0$ 时, $i = 0$ 端为固定。同样可以在 $i = m$ 端给定一个边界条件。

在 θ 连续性方程(1-1-13)中,如果 $i = 0$

$$\begin{aligned} \theta_{-1}l_1 + 2\theta_0(l_0 + l_1) + \theta_1l_0 \\ = 3 \left[\frac{l_1}{l_0} (y_0 - y_{-1}) + \frac{l_0}{l_1} (y_1 - y_0) \right] \end{aligned}$$

如果虚拟跨 $l_0 \gg l_1$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 而且虚拟支座上梁的转角 $\theta_{-1} = 0$, 上式可以简化为

$$2\theta_0 + \theta_1 = 3 \left[l_1 \frac{y_0 - y_{-1}}{l_0^2} + \frac{y_1 - y_0}{l_1} \right]$$

因为 $l_0 \gg l_1$, 对于 l_0 来说, $(m+1)$ 个距离很小的支座 x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) 联合在一起形成固定端。因此对于两端固定的梁 l_0 , 可写出曲率

$$\rho_0 = -6 \frac{y_0 - y_{-1}}{l_0^2}$$

得到

$$2\theta_0 + \theta_1 = 3 \frac{y_1 - y_0}{l_1} + \frac{l_1}{2} \rho_0 \quad (1-1-15)$$

如果 $\rho_0 = 0$, $i = 0$ 端为简支; 如果 $\theta_0 = 0$, $i = 0$ 端是固定支承, 式(1-1-15)可解出 θ_1 , 同样可以在 $i = m$ 端也给定一个边界条件。

当样条函数两端都具有简支边界条件时称为自然样条函数。与以上结构力学方法相对应, 只要在式(1-1-4)中令

$$S_3^{(1)}(x_0) = \theta_0$$

在式(1-1-12)中令

$$S_3^{(2)}(x_0) = \rho_0$$

也可得到式(1-1-14)和式(1-1-15)。这种导出边界条件的方法很方便, 但是结构力学方法指出了问题的本质。

在首尾相接的环状问题中, 存在有周期边界条件。除 $y_m = y_0$ 外, 对 M 或 θ 连续性方程尚需附加一个边界条件

$$M_0 = M_m \quad \text{或} \quad \theta_0 = \theta_m \quad (1-1-16)$$

在 M 或 θ 连续性方程组中选择适当的边界条件, 就可以解出 M_i 或 θ_i ($i = 1, 2, \dots, m-1$), 下面给出它们的定解方程组, 并定义记号

$$\alpha_i = \frac{l_i}{l_i + l_{i+1}}, \quad \beta_i = \frac{l_{i+1}}{l_i + l_{i+1}}$$

$$A_i = \frac{6EI}{l_i + l_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i} \right)$$

$$B_i = \frac{3}{l_i + l_{i+1}} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{l_i} l_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}} l_i \right)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m) \quad (1-1-17)$$

非周期边界条件时连续方程

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 2 & \beta_0 & 0 \\ \alpha_1 & 2 & \beta_1 \\ & \alpha_2 & 2 & \beta_2 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \alpha_{m-1} & 2 & \beta_{m-1} \\ & & \alpha_m & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{m-1} \\ M_m \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{m-1} \\ A_m \end{Bmatrix} \quad (1-1-18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 2 & \alpha_0 & 0 \\ \beta_1 & 2 & \alpha_1 \\ & \beta_2 & 2 & \alpha_2 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \beta_{m-1} & 2 & \alpha_{m-1} \\ & & \beta_m & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_{m-1} \\ \theta_m \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{m-1} \\ B_m \end{Bmatrix} \quad (1-1-19)
 \end{aligned}$$

$i = 0$ 时 A_0 、 B_0 和 $i = m$ 时 A_m 、 B_m 要根据具体边界条件来决定，这与式(1-1-14)、式(1-1-15)是一致的。

周期边界条件时连续方程为

$$\begin{bmatrix}
 2 & \beta_1 & & \alpha_1 \\
 \alpha_2 & 2 & \beta_2 & \\
 & \alpha_3 & 2 & \beta_3 \\
 & & \ddots & \ddots \\
 & \alpha_{m-1} & 2 & \beta_{m-1} \\
 \beta_m & & \alpha_m & 2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 M_1 \\
 M_2 \\
 M_3 \\
 \vdots \\
 M_{m-1} \\
 M_m
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3 \\
 \vdots \\
 A_{m-1} \\
 A_m
 \end{Bmatrix}
 \quad (1-1-20)$$

$$\begin{bmatrix}
 2 & \alpha_1 & & \beta_1 \\
 \beta_2 & 2 & \alpha_2 & \\
 & \beta_3 & 2 & \alpha_3 \\
 & & \ddots & \ddots \\
 & \beta_{m-1} & 2 & \alpha_{m-1} \\
 \alpha_m & \beta_m & & 2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \theta_1 \\
 \theta_2 \\
 \theta_3 \\
 \vdots \\
 \theta_{m-1} \\
 \theta_m
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 \vdots \\
 B_{m-1} \\
 B_m
 \end{Bmatrix}
 \quad (1-1-21)$$

第二节 N 次样条函数

上一节已经证明了三次插值样条函数是刚性支承连续梁支座

沉陷问题的数学表示，而后者又是前者的力学基础。同样可以证明分段作用着均布扭矩的圆轴扭转问题与二次样条函数是相对应的；而一次样条函数与铰接连杆支座不均匀沉陷问题是相对应的。因为本书不是直接应用这些对应关系，而是把样条函数作为抽象的数学工具去解决力学问题，所以不再详细讨论这些对应关系。但是应该注意到，正因为样条函数具有深厚的力学基础，所以在处理力学问题时才会有较高的精度。为了方便，本节中把 N 次奇次或偶次样条函数纳入一个统一的定义之中。

定义：设在区间 $[a, b]$ 上给定一个分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$, $[a, b]$ 上的一个函数 $S_N(x)$ 称为 N 次 $\begin{bmatrix} \text{奇} \\ \text{偶} \end{bmatrix}$ 样条函数，如果它满足下列条件：

(1) 在每个子域 $\begin{bmatrix} [x_{i-1}, x_i] \\ [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \end{bmatrix}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 内

$S_N(x)$ 是 N 次多项式；

(2) 在整个区间 $[a, b]$ 上, $S_N(x)$ 为 $N-1$ 阶连续可导函数，即在 $\begin{bmatrix} x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m-1) \\ x_{i-\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{bmatrix}$ 处成立

$$\begin{bmatrix} S_N^{(k)}(x_i - 0) = S_N^{(k)}(x_i + 0) \\ S_N^{(k)}(x_{i-\frac{1}{2}} - 0) = S_N^{(k)}(x_{i-\frac{1}{2}} + 0) \end{bmatrix}$$

($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$)

$$\begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \end{bmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m) \text{ 称为 } S_N(x) \text{ 的}$$

$\begin{bmatrix} \text{节点} \\ \text{半节点} \end{bmatrix}$ 。

在给定一组有序数列 y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) 后，如果 $S_N(x)$

再满足条件

$$(3) S_N(x) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

称 $S_N(x)$ 为插值 N 次 $\begin{bmatrix} \text{奇} \\ \text{偶} \end{bmatrix}$ 样条函数。

在三次样条函数中由定义的(1)知道, 在每个子域中 $S_3(x)$ 为三次多项式, 所以在 $[a, b]$ 中共有 $4m$ 个自由度。由定义的(2)知道, 在内节点上函数、函数的一阶导数及二阶导数提供了 $3(m-1)$ 个光滑性约束条件, 尚余 $(m+3)$ 个自由度。所以在 $[a, b]$ 上给定分割 Δ 的三次样条函数 $S_3(x)$ 是 $(m+3)$ 维线性空间。按定义的(3)再给定函数在 $(m+1)$ 个节点上的值, 只余下两个自由度, 这就是附加在两端的边界条件。这两个边界条件与 $(m+1)$ 个节点值一起称为纯插值约束条件。

对于 N 次 $\begin{bmatrix} \text{奇} \\ \text{偶} \end{bmatrix}$ 样条函数 $S_N(x)$, 共有 $\begin{bmatrix} (N+1) \times m \\ (N+1) \times (m+1) \end{bmatrix}$ 个自由度, $\begin{bmatrix} N \times (m-1) \\ N \times m \end{bmatrix}$ 个光滑性约束条件, 构成 $\begin{bmatrix} N+m \\ N+m+1 \end{bmatrix}$ 维线性空间。如果在 $(m+1)$ 个节点给定函数值, 还需附加 $\begin{bmatrix} N-1 \\ N \end{bmatrix}$ 个边界条件, 也就是说共有 $\begin{bmatrix} N+m \\ N+m+1 \end{bmatrix}$ 个纯插值约束条件。

边界条件是纯插值约束条件的一部分, 随着边界条件的不同, N 次插值样条函数还可以分成不同的类。

1. 插值一次样条函数, 是奇样条函数, 有 $2m$ 个自由度, 具有 $(m-1)$ 个光滑性约束条件, 是 $(m+1)$ 维线性空间。只要在 $(m+1)$ 个节点给定函数值, 就可以解出连续方程, 不必附加边界条件。

2. 插值二次样条函数, 是偶样条函数, 有 $2 \times (m+1)$ 个自由度, $2 \times m$ 个光滑性约束条件, 构成 $(m+3)$ 维线性空间。如果在 $(m+1)$ 个节点给定函数值, 还要附加 2 个边界条件。

第一类边界条件, 给定 $y_i^{(1)} (i = 0 \text{ 或 } m)$, 并满足 $S_2(x_i) =$

$$\overset{(1)}{y_i} \quad (i = 0 \text{ 或 } m);$$

第二类边界条件, 给定 $\overset{(2)}{y_i} \quad (i = 0 \text{ 或 } m)$, 并满足 $\overset{(2)}{S_2}(x_i) =$

$$\overset{(2)}{y_i} \quad (i = 0 \text{ 或 } m);$$

周期边界条件, 除给定函数值中含有条件 $S_2(x_0) = S_2(x_m)$ 外, 还需附加的两个边界条件是

$$\overset{(1)}{S_2}(x_0) = \overset{(1)}{S_2}(x_m)$$

$$\overset{(2)}{S_2}(x_0) = \overset{(2)}{S_2}(x_m)$$

3. 插值三次样条函数, 是奇样条函数, 按定义也要附加两个边界条件。

第 I 类边界条件, 给定 $\overset{(1)}{y_i} \quad (i = 0 \text{ 或 } m)$, 并满足 $\overset{(1)}{S_3}(x_i) =$

$$\overset{(1)}{y_i} \quad (i = 0 \text{ 或 } m);$$

第 II 类边界条件, 给定 $\overset{(2)}{y_i} \quad (i = 0 \text{ 或 } m)$, 并满足 $\overset{(2)}{S_3}(x_i) =$

$$\overset{(2)}{y_i} \quad (i = 0 \text{ 或 } m);$$

周期边界条件, 除给定函数值中含有条件 $S_3(x_0) = S_3(x_m)$ 外, 还需附加的两个边界条件是

$$\overset{(1)}{S_3}(x_0) = \overset{(1)}{S_3}(x_m)$$

$$\overset{(2)}{S_3}(x_0) = \overset{(2)}{S_3}(x_m)$$

4. 插值五次样条函数是奇次样条函数, 有 $6 \times m$ 个自由度, $5 \times (m+1)$ 个光滑性约束条件, 构成 $(m+5)$ 维线性空间。如果在 $(m+1)$ 个节点给定函数值, 还需附加 4 个边界条件, 通常两端各附加两个边界条件。

第 I 类边界条件, 给定 $\overset{(1)}{y_i}, \overset{(2)}{y_i} \quad (i = 0 \text{ 或 } m)$, 并满足 $\overset{(k)}{S_5}(x_i) =$