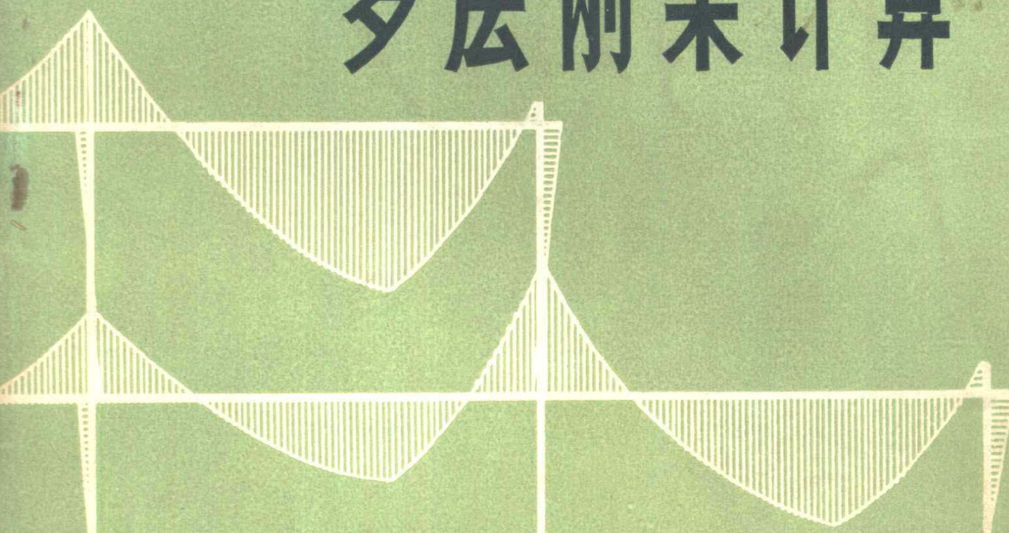
多层刚架计算



中国建筑工业出版社

多层刚架计算

（一个考虑节点侧移简单而省时的方法）

G. 卡 尼 著

程 积 高 譯

中国建筑工业出版社

本书叙述一种新的刚构計算法。此法十分簡便，能克服用力矩分配法解有側移刚构时的繁冗，并能自动修正計算的錯誤。

书中簡明地叙述了此法的基本原理及其应用，并举出实例，此外尙有影响线的求法及托承的考虑系数等。

本书可供土木結构設計专业的工程师、技术員及高等院校师生参考。

G. Kani

DIE BERECHNUNG MEHRSTÖCKIGER RAHMEN (VIERTE AUFLAGE)

Verlag konrad wittwer

Stuttgart—1955

* * *

多 层 刚 架 计 算

程 积 高 譯

（根据原中国工业出版社紙型重印）

*

中国建筑工业出版社出版（北京西外向东路19号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售

北京印刷六厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印張：2　5/16　字数：50千字

1957年9月北京第一版

1973年2月新一版　1973年2月第一次印刷

印数：1-30,110册　定价：0.28元

书号：15040·3041

譯者的話

卡尼博士的“多层刚架計算”是一省时而精确的方法。其优点作者已詳述于序言中，兹不贅述。譯者拟将德意志民主共和国的专家 *Albert* 在北京电力設計院介紹的实际运用卡氏方法时的优点，在这里作一补充。

在多层刚架中，若梁的劲度小于柱的劲度时，則用任何漸次接近法，即令用卡氏法亦不能避免收斂甚緩之弊。然根据卡氏法有“自动除誤”的优点（見序言优点3），所以在分析收斂甚緩的刚架时，視循环計算中分配的角变和位变力矩之递增或递减情况，可以假定一力矩数値进行計算。即在几次循环計算后，发現分配的力矩数値递增或递减相差較悬殊时，可根据递增的比例，假定一較大的数值，或根据递减的比例，假定一較小的数値，然后用此假定的数値继續計算下去（如循环計算次数很多时，在計算过程中尙可多次假定）。这样便可节約很多时間。即令假定的数値偏高或偏低（当然假定数値愈接近于实际数値的递增或递减情况更好，这是涉及到对方法运用的熟练問題），正如序言优点3所述，是不致影响最后計算結果的正确性的。

譯者譯此书时，除将原书第10頁和第20頁公式推导的注⑤和注⑦改譯入正文外，其他一律按原文譯出，全书譯完后，虽經譯者仔細校对，但限于水平，錯誤之处，犹恐难免，恳求讀者指正。

程 积 高

目　录

序　言

关于計算节点无側移的刚架已提供了不少的計算方法，其中尤以近年来为人們乐于采用的克劳斯（*Cross*）漸次接近法最为通用。

在計算多层刚架时，假定节点无側移是很不可靠的。但是在計算时，几乎只有从这一假定着手，否則，如果考虑节点側移，势必增加很多倍計算工作。由于假定节点无側移，致令风荷重的影响亦无从考虑。事实上对于静力学的計算，一方面要求达到1%的精确度，而另一方面由于未考虑节点側移引起的差誤，有时甚至改变了个别計算結果的符号，因此，促成我寻求一个如本书所介紹的适当方法，以考虑側移的影响。

这里，我想首先說明一点：漸次接近法常被錯誤的称为近似法。殊不知，所謂近似法者，是通过若干簡化的假定而只能或多或少的提供較好的近似値而已。漸次接近法則不然——当循环計算予以足够的延續时——它可提供任意理想的精确度。欲求一所謂“精确”的方法进行計算，似只有用弹性方程式求解。即令如此，其計算結果亦只可能是有限的精确度而已，因为在計算时，无論如何我們总是只能取有限的小数位进行計算。若在漸次接近法(如克劳斯法)和解弹性方程取相同的小数位时，可得完全相同的結果。如果用两个方法計算而得相同的結果，一个称为精确法另一个称为近似法，显然是不合理的。

---

[1] 关于一个精确的方法，終归是一个定义問題。如果将一个能达到任意理想精确度的計算方法称为近似法，就在数学上也是不普遍的。不然，将导致这样的荒謬地步：例如計算$\sqrt{108900}=330$，称为精确方法，而用相同方法計算$\sqrt{108901}$时，却称为近似法。这样不論是精确抑或是近似的方法，不仅取决于方法，并取决于数字，而且要从計算的結果方能判断計算方法的精确或近似。可見这是非常荒唐的。

本书介紹的方法，也是一个漸次接近法。它和其他方法比較，具有下列的优点：

1. 計算无側移节点的刚架时，在节点之間，只反复利用一个簡单的演算式，且节点計算的先后順序毫无限制。这样，不仅大量的节約了时間，而且——由于只采用同一的簡单的演算式——错誤的可能性很少。

2. 計算側移节点的刚架时，也同样非常便捷，所增加的計算工作，是微不足道的。

3. 具有“自动除誤”的优点，即在計算过程中可能产生的錯誤，可以自动修正而不影响計算結果。

4. 便于校核。校核单位(*Baupolizei*)只用最后算出的角变力矩和位变力矩而不用全部計算过程，即可在每一节点上进行計算結果的校核工作。

5. 若杆件断面或荷重在計算結束后必須改变时，不必重新进行全部刚架計算，而只将相应的改变部分在計算图中修改后，便可作补充計算。这一附加工作，只有所要改变的一小部分。

6. 对于变截面杆件——見第六章——可用一簡捷的方法进行考虑。在鋼筋混凝土工程中，杆件常有托承，用此法計算托承杆件与計算普通杆件比較，几乎不增加計算工作。然而考虑和不考虑托承的計算結果，却常有很大的差別。

对于計算特殊型式的刚架，例如連續梁和梁支承在弹性固定支柱上等，同样具有上述优点。

第一章 概 論

当刚架受荷后，刚架的节点，即会产生轉动和移动。靜力学計算的目的，就是用数字以决定刚架在受荷后产生轉动和移动的变形情况。

若刚架全部杆端挠矩为已知，則相应的变形情况即能决定，全部靜定量也能很易算出。所以本书靜力学計算的目的，就在于算出端力矩，亦即在杆端上的力矩。每一截面內都有两个大小相等、方向相反的力矩，而这里所謂端力矩，是指作用在杆端上而不是作用在节点上的力矩。

茲将本书采用的力矩符号規定如下：

杆端力矩和轉角沿順时針旋轉时（如图1）为正，反之为負。

此外，其他力矩（如节点力矩，抵抗力矩），凡沿順时針旋轉时，均一律为正。

当一外界的正力矩作用在节点上时，則节点产生一正的轉角，此节点的全部杆端亦因此而得正的力矩。

刚架杆件的节点，可用順序号1、2、3等或用 i、k、l、m 等来表示。

如图1所示，$i-k$ 杆的端点 i 和 k 的端力矩用 M_{ik} 和 M_{ki} 表示。第一个字母表示端力矩作用的杆端。

若 $i-k$ 杆的两端为完全固定时，加荷后在其两端产生的端力矩称为固定端力矩，且用 $\overline{M}_{ik}$ 和 $\overline{M}_{ki}$ 表示。一般荷重情况的固定端力矩，可从各种技术手册中查出❶。

一杆的几何記号，用該杆横截面的慣矩 J 和杆的长度 l 来表

---

❶ Beton-kalender, Stahlbau-kalender, Takabeya: Rahmentafeln.

图 1

示，此二数之比即为杆的劲度$K(K=J\div l)$。

在荷重作用下对于刚架的計算，本书也是从固定端情况开始；即外載对于刚架的影响，同时假定用外力和外力矩来抵消，俾使节点不致产生任何运动(轉动和移动)。这样，每一杆件都可当作两端固定的梁，而相应的固定端力矩便可很易算出。

保持节点的固定端情况而假定的外力和外力矩，称为抵抗力和抵抗力矩(不平衡力矩)。一俟全部固定端立矩求出后，則每一节点的抵抗力和抵抗力矩，根据平衡条件即能算出，即在任一节点 i 上相交的一組杆件的固定端力矩之代数和，必須等于节点 i 的抵抗力矩$\overline{M}_i$：

$$\overline{M}_i=\sum_{(i)}\overline{M}_{ik}。$$

（注意：抵抗力矩作用在节点上，端力矩則作用在杆端而不是在节点上，所以M_i和M_{ik}符号相同）。

第二章　节点无側移的剛架計算

角变力矩的概念

本章計算方法的基本概念——不考虑节点的側移——如下：

刚架受荷后，若无抵抗力矩的作用，則产生变形，从而使每一节点产生一定的轉角。例如我們观察任一 i — k 杆时，就会发現在杆端 i 产生了轉角τ_i，他端 k 产生了轉角τ_k，由是 i — k 杆由于外載和杆端轉动而产生的最后变形可視为下列三种变形情况的迭加（图 2 ）：

1. 杆两端固定，加荷后 i — k 杆的变形情况。
2. 杆端 k 无轉动，他端 i 产生轉角τ_i的变形情况。

3. 杆端 i 无轉动，他端 k 产生轉角τ_k的变形情况。

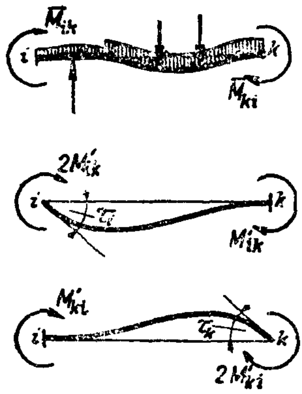


图 2

由图 2 可以看出，任一杆端的最后端力矩，是由这三种变形情况的迭加而成，亦即 $i-k$ 杆杆端 i 的最后端力矩，可用一簡单的公式表示为：

$$M_{ik}=\overline{M}_{ik}+2M'_{ik}+M'_{ki} \quad \cdots(1)$$

式中：$\overline{M}_{ik}$——由于加荷后在i—k杆的杆端i引起的固定端力矩。

M'_{ik}——由于 i—k 杆的杆端i的轉角τ_i而在 i 端产生的力矩，与轉角τ_i和杆的劲度K成正比❶。下面称此力矩M'_{ik}为近端角变力矩。

M'_{ki}——由于i—k杆他端k的轉角τ_k而在 i 端产生的力矩，同样与轉角τ_k和杆的劲度K成正比。下面称M_{ki}为远端角变力矩。

一俟固定端力矩和角变力矩求出后，則最后的端力矩M_{ik}只需——(1)式——簡单地相加卽可求得，用文字說明亦卽为：

最后杆端力矩＝固定端力矩＋两倍近端角变力矩＋1倍远端角变力矩。

我們达到了用固定端力矩和杆端角变力矩代替最后杆端力矩的目的，所以这个方法就充分显示了它曾在序言里所介紹的优越性。

計算角变力矩，如下面所介紹的，只用一个簡单的演算式，反复进行演算，直至达到任意理想之精确度为止（演算时可以不按照节点的先后順序进行）。

茲就計算过程举例說明如下（图 3）：

如图 3 所示，杆件劲度K写在各有关杆件的中間；刚架的荷重及杆件长度，从图中亦一目了然。

---

❶ 杆端 i 的角变力矩，可用下式表示：
$M'_{ik}=2E\cdot K\cdot\tau_i$($E$＝弹性系数)。

为了能将計算的数字淸晰地写在各該杆上，在图3a上进行演算。

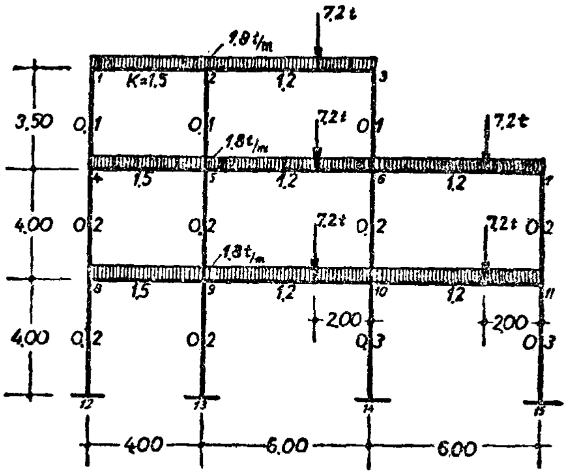


图 3

在已知荷重情况下，固定端力矩用公式計算或查表求得后，都能很快的写在图3a中横梁上方的各相应杆端上❶。

例如，計算横梁杆1—2，$l=400cm$，$q=1.8t/m$(其他4—5杆和8—9杆都是相同的荷重和相同的长度)的固定端力矩为：

左端：
$$\overline{M}_{1,2}=-\frac{ql^2}{12}=-2.40tm$$

右端：
$$\overline{M}_{2,1}=+\frac{ql^2}{12}=+2.40tm。$$

其余长度和荷重相同的各杆算出的固定端力矩如图3a所示，在左端为$-8.60tm$，右端为$+11.80tm$。

固定端力矩算出后，即可計算抵抗力矩，并写在节点的內圈中。抵抗力矩，亦即节点力矩。正如前述，抵抗力矩具有保持杆端为固定端情况的作用，且等于相交于該节点上全部杆端的固定端力矩之和。例如节点2的抵抗力矩为：

❶ 注意：固定端力矩在左端为負，右端为正。

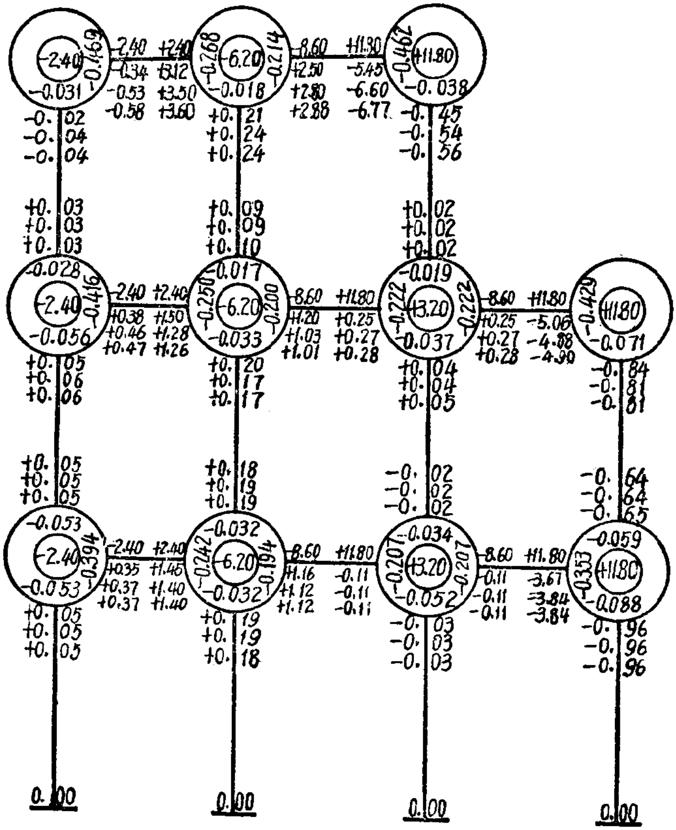


图 3a

$$\overline{M}_2 = +2.40 - 8.60 = -6.20tm$$

現在进行角变力矩的計算。首先作如下的說明：当节点轉动时，則相交于此节点上的各杆端得一相同的轉角，由于杆端的角变力矩仅和轉角及各該杆的劲度K有关，所以当刚架中只有一

个节点产生轉动时，則角变力矩也只能在相交于該节点上的各杆端变动，且和各該杆之劲度K成正比。因之，一节点的角变力矩之和为已知，即可根据相交于該节点上各相应杆之劲度比分配在各杆上，而得每一杆端的角变力矩。

我們称被观察节点的杆端为近端，此杆的他端为远端，如是每一节点上有相应的近端和远端（相交于节点上的悬臂梁可視作一远端为无穷远的杆件）。

根据平衡条件，在任一节点i上相交的一組杆件的全部杆端力矩之和应等于零，即$\sum\limits_{(i)} M_{ik}=0$，故（1）式中的端力矩$M_{ik}$可用下式表示：

$$\sum_{(i)}\overline{M}_{ik}+2\sum_{(i)}M'_{ik}+\sum_{(i)}M'_{ki}=0。$$

式中第一项$\Sigma\overline{M}_{ik}$等于节点i的抵抗力矩，用$\overline{M}_i$表示，即$\sum\limits_{(i)}\overline{M}_{ik}=\overline{M}_i$，則

$$\underset{(i)}{\overline{M}_i}+\sum_{(i)}M'_{ki}=-2\sum_{(i)}M'_{ik}。$$

从式中可以看出，若远端的角变力矩之和$\Sigma M'_{ki}$为已知，則近端的角变力矩之和$\Sigma M'_{ik}$就能算出。若远端的角变力矩是近似值时，則近端的也必然为近似数值。但是我們可以用漸次接近这一优越的方法，亦即經过反复的循环計算后，便可获得任意理想精确的結果。演算自任一节点开始时，所有远端的角变力矩$\Sigma M'_{ki}$的第一次近似值假定为零（因为开始时尙无修正的数值）。

在一节点上計算第二次近似值时，即可将节点的抵抗力矩$\overline{M}_i$与全部远端角变力矩$\Sigma M'_{ki}$的第一次近似值相加，然后用$\left(-\frac{1}{2}\right)$相乘，且将其結果（即$-\frac{1}{2}(\overline{M}_i+\Sigma M'_{ki})$）根据相交于此节点上的各杆件之劲度比分配到近端上。

为便于計算起見，称相交于一节点上的各杆件之K值比$\frac{K}{\Sigma K}$·

$\left(-\frac{1}{2}\right)$为角变分配因数，且用$\mu$表示，即$\mu=-\frac{1}{2}\ \frac{K}{\Sigma K}$(因一节点上的角变分配因数之和$\Sigma\mu$为$\left(-\frac{1}{2}\right)$，故分配因数$\mu$本身是负号)。

角变分配因数写在图3a中每一节点的两圈之間。茲就角变力矩的演算規則归納如下：

将节点的抵抗力矩$\overline{M}_i$加此节点全部的远端角变力矩$\Sigma M'_{ki}$，乘以此节点的角变分配因数$-\frac{1}{2}\cdot\frac{K}{\Sigma K}$，即得所求的近端角变力矩$M'_{ik}$，用公式表示为：

$$M'_{ik}=\mu_{ik}(\overline{M}_i+\Sigma M'_{ki})$$

利用这一簡单的公式，在各节点上反复进行演算后（从节点到节点，演算时可就任意順序进行），則全部近端角变力矩，即可获得任意理想的精确度。

現将例題图3a继續演算下去。計算角变分配因数以节点9为例，此一节点全部杆件K值之和为（图3）：

$$\Sigma K_{ik}=1.5+0.2+1.2+0.2=3.1$$

故得相交于节点9上各杆的角变分配因数为：

$$\mu_{9,8}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.5}{3.1}=-0.242 \qquad \mu_{9,5}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{0.2}{3.1}=-0.032$$

$$\mu_{9,10}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.2}{3.1}=-0.194 \qquad \mu_{9,13}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{0.2}{3.1}=-0.032$$

这些数值写在图3a中节点9上的两圈之間各相应的地方。

在图3a中注入了固定端力矩、抵抗力矩和全部角变分配因数，角变力矩已經进行过三次近似值計算（未列出計算过程）。在图中第一次近似值是从节点3开始的，是时之远端力矩假定为零。以后每次計算的角变力矩近似值写在各相应的杆端（横梁下

方）。从图中可以看出，第三次和第一次之近似值，已相当接近了。

节点到节点的先后計算顺序，不致影响所得的結果而仅影响收斂速度。比如我們沒有从节点1开始，也沒有在这一列的节点上进行演算而获得了最快之收斂性。亦即在历次演算中应从最大角变力矩$\Sigma M'_{ik}$的节点开始才会得到最快的收斂性，所以在本例中应从节点3开始。

为了說明全部計算过程，在图3a中继續进行第四次近似值計算（計算結果未列于图中）。在一节点上計算$\Sigma M'_{ik}$时（即抵抗力矩$\overline{M}_i$加全部远端角变力矩$\Sigma M'_{ki}$）总是用$\Sigma M'_{ki}$的最后一次近似值。例如节点3的$\Sigma M'_{ik}$为：

$$+11.80+2.88+0.02=14.70。$$

角变分配因数是負的，所以乘正的$\Sigma M'_{ik}$所得的近端角变力矩也是負号，即：

$$M'_{3,2}=+14.70\cdot(-0.462)=-6.80$$

$$M'_{3,6}=+14.70\cdot(-0.038)=-0.56。$$

将以上数値写在节点3上相应的各杆端，即在杆下方的-6.77和-0.56。

其次計算节点2的$\Sigma M'_{ik}$：

$$-6.20-0.58-6.80+0.09=-13.49$$

用角变分配因数相乘得：

$$M'_{2,1}=-13.49\cdot(-0.268)=+3.62$$

$$M'_{2,3}=-13.49\cdot(-0.214)=+2.89$$

$$M'_{2,5}=-13.49\cdot(-0.018)=+0.24。$$

从节点7可以看出，在該节点上各次所得的M'_{ik}沒有改变，而只在两位小数位上变动。

若在节点1和节点4上再进行演算，則勘誤也是很小的，而其余的节点甚至沒有勘誤。所以如精确度以两位小数为满足，則无继續計算的必要。

对于实际为固定的杆端，如例题中最下层的柱脚，因为在任何

变形下轉角为零，所以这些柱脚的角变力矩也为零。

这个計算方法，能够自动校核錯誤的原因是，它能将历次循环計算中可能产生的錯誤各自自动消除。由于自始至終只用一相同簡单的公式进行演算，以至几乎不可能产生符号錯誤（見每一节点），因而它的或然率和計算錯誤总是极微的。若基本数值，即抵抗力矩和角变分配因数是正确的，則在演算过程中，即令产生了錯誤也不致出現在最終的結果內。

計算角变力矩M'_{ik}是这样进行的：从角变力矩的近似值中——角变力矩在开始仅表示粗略的假定——以計算下一次的近似值而作为較好的近似值。若在演算时产生了錯誤也不能称由此而得出的角变力矩是錯誤的，它仍然或多或少地是較好的近似值。如此循环計算直至两个相銜的M'_{ik}近似值相同，并且在历次計算中同样的錯誤不是多次产生在相同的地方时，則演算即可停止，最終結果便不复有錯誤存在。

最后的角变力矩求得后，則最后的端力矩用（1）式通过簡单的相加即得❶。

为使图3a清晰起見，迭加最后的端力矩在图3b中进行。首先从图3a中将全部固定端力矩及最后的角变力矩写在图3b中各相应的杆端上，然后按照（1）式求最后端力矩，其步驟如下；为便于計算，在图3b中，首先写上固定端力矩$\overline{M}_{ik}$和1倍近端力矩M'_{ik}，然后将远端与近端角变力矩M'_{ik}及M'_{ki}之和写在下面相加即得所求的最后端力矩M_{ik}。因此在图3b中每一杆端上有三个数（柱端只有两个数，因为无固定端力矩），即固定端力矩$\overline{M}_{ik}$和近端角变力矩M'_{ik}以及杆两端角变力矩之和，将这三个数字相加后，得最后端力矩，并写在各相应杆端横綫之下。

关于校核問題，只要在图3b中列入角变分配因数及最后角变力矩，則能滿足各数值的校核要求。而无需将整个計算过程呈交校核单位（*Boupolizei*）。例如校核一节点的角变力矩，則只能在此一节点上进行演算，且校核計算得的角变力矩必須与原来注于此节

❶ 最好全部相加都有一袖珍計算器，它能相加正負数字。

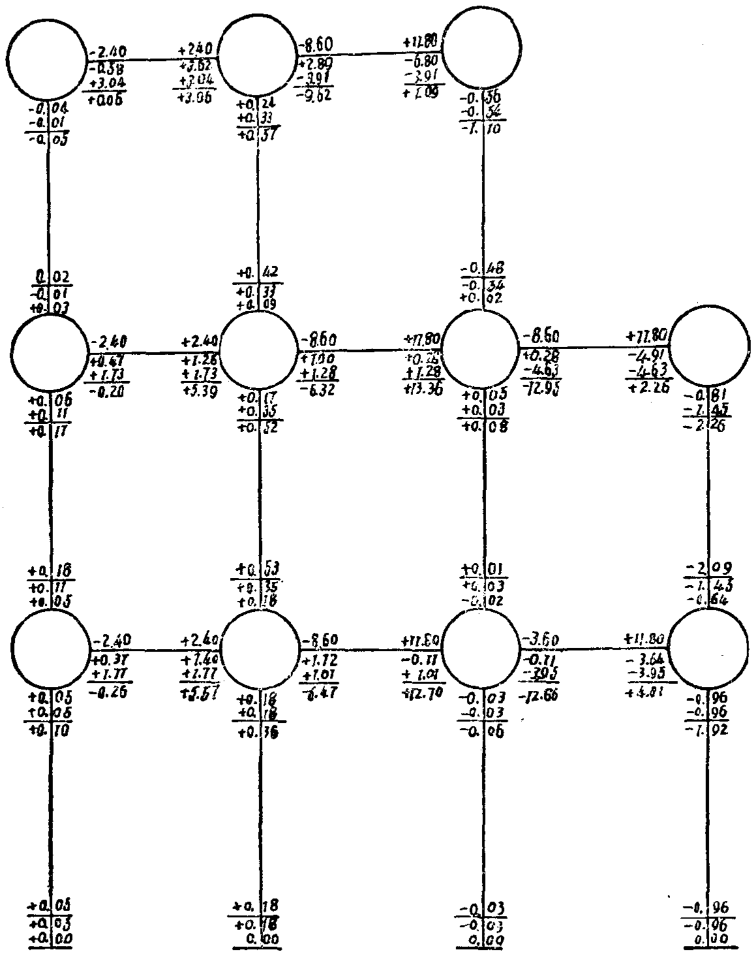


图 3b

点上的角变力矩相等。

根据平衡条件在每一节点上的端力矩之和必须等于零（无节点外力矩作用时），或有节点外力矩作用时，端力矩之和必須等于外力矩。但是如果将沒有錯誤的角变力矩在相加或抄写时弄錯了，我們亦能即刻发現，因此錯誤而使端力矩之和在相关节点