高等学校教材

机器人运动学及动力学

王庭树

西安电子科技大学出版社

高等学校教材

机器人运动学及动力学

王庭树

西安电子科技大学出版社
1990

内 容 简 介

本书共10章，第一章到第五章为机器人运动学，第六章到第八章为机器人动力学，第九章是机器人轨迹规划方法，第十章介绍实现轨迹跟踪的位置控制系统。

本书为电子机械教材编审委员会审定的硕士研究生教材，也可供本科生选修课使用。对从事机器人技术研究和使用的工程技术人员也有参考价值。

高等学校教材

机器人运动学及动力学

王 庭 树

责任编辑 杨 兵

西安电子科技大学出版社出版

西安电子科技大学印刷厂印刷

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16 印张 13 字数 300 千字

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷 印数 1-2 000

ISBN7-5606-0126-X/TP·0043 定价：2.65元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作．由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的密切配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用．

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制定了1986～1990年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划．列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题．这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行．

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会(小组)评选择优产生出来的．广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力．

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处．希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力．

电子工业部教材办公室

前　　言

本教材系按电子工业部的工科电子类专业教材 1986～1990 年编审出版规划，由电子机械教材编审委员会无线电专用机械设备编审小组征稿，推荐出版．责任编委为费时雨教授．

本教材由电子科技大学(原成都电讯工程学院)王庭树编写，由北京科技大学马香峰教授主审．编、审者均依据无线电专用机械设备编审小组审定的编写大纲进行编写和审阅．

本书为电子机械硕士研究生的教材，也可供本科生的选修课使用．本课程的参考学时数为 60 学时．本书以齐次坐标变换及其微分学为分析手段，介绍了机器人的运动学及动力学的基本理论和知识．引入了杆件坐标系的两种建立原则及其对应的两种 A 矩阵(变换矩阵)、两种确定雅可比矩阵的方法及其在分析机器人的速度和静力中的应用．在动力学中以牛顿一欧拉算法为桥梁，使读者从普通力学知识向机器人动力学分析方法过渡，用拉格朗日法建立机器人动力学模型的整体概念，引入凯恩法以扩展机器人动力学知识．最后介绍机器人轨迹规划方法以及实现轨迹跟踪的位置控制系统设计分析的基本概念．各章均附有习题．

本书编写过程中得到马香峰教授的帮助，并吸收了从事机器人研究的硕士生们提出的有益见解，这里表示感谢．由于编者水平有限，书中难免存在缺点和错误，殷切希望批评指正．

—编者—

目　　录

绪　论

一些发达的工业国家都经历过或者正在承受劳动生产率下降的危机．从劳动生产率的平均水平来看，近 30 余年来日本的劳动生产率不断获得了稳定增长，其重要原因是不间断地采用包括工业机器人在内的各种先进的生产技术．相反，美国等国家因为忽略或者拒绝应用工业机器人等先进的生产技术而使生产率增长速度缓慢，商品在国际市场上缺乏竞争能力，美国的汽车工业就是极为明显的例证．工业机器人对劳动保护及文明生产也具有特别重要的意义，适当地采用工业机器人可以节省昂贵的劳保设备和宠大的通风系统，更适合于多种危险作业(易爆、辐射、太空及深海开发等等)．

根据 1960～1977 年的统计资料，几个发达工业国的年劳动生产增长率为：美国 2.8%、英国 3.0%、西德 5.7%、日本 8.4%．由此数据可相应地看出，日本及西德当时不存在通货膨胀现象，而美国则因工业发展失调，生产率增长停滞，从而出现较大的通货膨胀．日本与西德的差异在于日本当时已开始成功地应用了机器人技术，而西德当时则处于徘徊或忽略是否在生产领域中应用机器人技术．

目前我国正在积极调整工业结构，引进先进技术，随着国民经济的发展，工业机器人的应用将有着极其广阔的前途．

一、机器人与机器人运动学及动力学

现代工业机器人来源于数控(NC)机床及处理辐射材料的操作机(Manipulator)．前者根据对被加工零件尺寸形状及切削用量的数字编码，去控制机床完成零件的形状及尺寸的加工；后者是在第二次世界大战时期用于生产原子武器时，隔着防护墙去处理辐射材料，人通过铅玻璃窗口观察，用手操作墙外的操纵机构使墙内操作机末端执行器(End–effector)的夹钳去接触和处理辐射材料．操纵机构及末端执行器均具有 6 个自由度(6 DOF)，两者由传动机构相联系，形成主从关系，末端执行器的 6 个自由度确定了夹钳在空间的位置及方向(位姿)．这就是工业机器人的原型．1947 年出现了具有位置控制系统的机械手，由于还没有力的反馈回路，因而末端执行器施加到工作对象上的力无法控制，可能出现夹持过松，不能实现工作任务，或者夹持时产生不希望的碰撞，以致损坏工作对象．随着力反馈的应用，使这种操作机(机械手)的性能得到改善．具有穿孔纸带的数控铣床问世后，在美国于 1960 年推出了第一代工业机器人(Unimate Industrial Robot)商品．用手推动此机器人完成工作任务之后，动作顺序的信息将自动地以数字形式记录于存储器中．重新启动机器人时，它则再现原有动作，去完成同样的工作任务，即实现了机器人的示教再现(Playback)功能．美国麻省理工学院(MIT)的林肯实验室第一次将接触传感器及数字计算机用于机器人．接触传感器装在夹钳上，可引导机器人按规定的接触状态去完成预定的工作任务，但还不能利用传感器及计算机去判断被抓物体的位置及方向．利用计算机去控制机器人的运动，从而决定末端执行器的位置及方向是机器人学在理论上发展的重要里程碑．MIT 的林肯实验室于 1963 年利用齐次坐标变换对块状物的位置及方向作了数

学描述，提出了利用数字信息处理物体位置及方向的可行性．由此启发了人们采用图像处理方法去代替触摩传感器来决定物体位置和方向，因为利用触摩方法决定物体位置及方向是一个动作缓慢的过程．1967年出现了装有电视摄像机的机器人，它可以实时地判别物体的位置和方向，并且可以用直角坐标来描述末端执行器的位置和方向，而不再使用其它如柱坐标、球坐标等传统描述方法．这一新概念用于机器人是美国斯坦福大学智能实验室首先实现的，从而奠定了现代机器人运动学的基础．在运动学的基础上引入牛顿力学、拉格朗日力学等，从而形成了机器人的动力学．70年代末期，在世界范围内对机器人及机器人学产生了广泛的研究兴趣，日本对机器人的应用做了大量工作，获益匪浅，已将工业机器人应用于各种工业领域，并提出了具有手眼(电眼)视觉系统的机器人，它可仔细地阅读块状构件组成结构物的装配图，判断装配顺序并按图示要求将结构物装配出来．现代的机器人正由只能完成焊接、喷涂等功能的工业机器人向装配机器人及护理、医疗机器人方向发展．这些机器人，要求末端执行器具有更好的柔顺性(Compliance)及精确的轨迹规划，因而机器人轨迹规划也成为目前一个重要研究课题．

近10余年来，人们对工业机器人的各方面进行了大量的研究工作，机械设计已趋完善。但是如何使工业机器人更为灵巧和柔顺，似乎还应由传统的刚性机械设计概念发展为新的弹性机械设计概念。目前更为现实的还是开发具有知觉的各种柔顺的末端执行器，以适应新一代工业机器人的需要。值得注意的是至今对末端执行器的研究仍然是一个极为薄弱的环节，在其应用上仍局限于传统的3种夹持器(手)，即机械式、负压吸引式、电磁式。模拟人手的多关节腱连的手指及机器人行走机构(双足及多足)的研究仍处于起步阶段。如何进一步提高机器人操作速度、动态精度等问题有待于机器人运动学及动力学的发展。

机器人的控制系统决定了机器人的智能水平、工作柔顺性及灵巧性．现代机器人的控制系统多采用分级(分层)分布式的控制方式．所谓分级是指控制系统由若干层次组成，一般可分为决策控制级和实时控制级．前者负责机器人工作任务的规划、环境的识别及轨迹的规划等；后者以伺服控制为核心，接受前者的命令，对机器人运动进行控制．前者相当于人的大脑，它提供了机器人的“自助”能力；后者与机器人的机构相当于人的肌体，它提供了机器人的运动及“条件反应”能力．所谓分布式是指后者以全局控制器去控制和协调若干局部控制器．局部控制器的数目就是机器人机构的自由度数．由这些局部控制器去控制各关节的执行器．由此可见机器人的实时控制级是整个系统机电及其它物理参数的交接匹配环节．在实时控制级中，外部环境的信息及机器人自身的动力学特性是作为内部信息反馈的，从而可为机器人提供“条件反应”能力．在决策级中，轨迹的规划完全属于运动学及动力学的范畴．机器人的运动学及动力学不仅为伺服级提供动力学特性的数学模型，也是轨迹规划的基础，它为决策控制级提供了一种必要的分析工具和手段．

对于一般的机械系统，也应从系统工程学及工程价值学的观点去解决该系统机电及其它物理参数的协调和匹配的分析与综合问题．研究这种分析与综合的方法和理论就导致了机电一体化学科的形成和发展．机器人系统就是一个极其典型的机电一体化系统，机器人运动学及动力学则为这种系统的机电一体化的分析与综合提供必要的预备理论知识．

机器人控制系统是以计算机为其支撑技术的，无论机器人的决策自助能力或者实时控制能力，都取决于计算机的计算容量及速度．在特定的容量及计算速度的条件下，则又取

决于计算方法及程序结构．因而适合于机器人的各种编程方法或机器人的计算机语言应运而生，这也成为人们的热门研究课题．

此外，对于已商品化的工业机器人的选用及功能价格比的评估方法也逐渐发展为一门实用技术．

二、机器人学

机器人学(Robotics)是一门关于设计、制造和应用机器人的学科，因而它蕴涵着十分丰富的内容．为了更明确机器人运动学及动力学在其中的地位及作用，特将机器人学所涉及的内容概括于下：

(1) 机器人运动学及动力学；

(2) 机器人的末端执行器；

(3) 机器人的行走机构；

(4) 机器人的控制系统；

(5) 机器人的传感器；

(6) 机器人的计算机编程及语言；

(7) 机器人的人一机接口技术；

(8) 机器人的人工智能；

(9) 工业机器人功能价格比的评估方法，等等．

根据以上所列举内容，并考虑第一节的分析，不难得出结论：机器人运动学及动力学是机器人学的理论基础，也是机器人学的入门知识．

三、机器人运动学及动力学

机器人运动学及动力学的主要任务是为机器人运动的控制提供分析的手段和方法，因此需要建立末端执行器、各运动构件的位置方向与各关节位移之间的关系．前者的位置方向是用 3 维笛卡尔坐标系描述的；后者是用与机器人自由度数相同的 n 维广义坐标描述的．对于各运动构件上笛卡尔坐标系的变换关系，本书采用的是齐次坐标变换，以此导出末端执行器、各运动构件与各关节的位置、速度、加速度及力(或力矩)的计算方法．例如第一个构件的位置及方向用齐次坐标矩阵 A_1 描述，第二个构件的位置及方向用齐次坐标矩阵 A_2 描述，……则第i个构件的位置及方向就是齐次坐标变换

$$T_i = A_1 A_2 \cdots A_i$$

即各齐次坐标矩阵依次连乘，便得到齐次坐标变换．如何利用齐次坐标变换描述机器人的速度、加速度、力等的关系，并借此通过各关节转动或移动去控制末端执行器的位姿以实现机器人的工作任务，这就是本课程的主要任务．由此本课程的特点为：

(1) 机器人是由多个自由度的机构组成的，机器人的自由度越多，则分析工作越复杂．

(2) 笛卡尔坐标的 3 维矢量空间与关节变量决定的n维矢量空间的相互变换，是机器

人运动学及动力学中的基本数学问题.

(3) 本书采用的变换是齐次坐标矩阵(4×4 阶)变换. 这种变换将旋转及平移变换组为一体, 规范性及规律性很强.

根据上述 3 个特点, 要求读者不要畏惧或过多地纠缠于分析过程的复杂性, 主要精力应集中于分析的规律性, 推理的逻辑性, 从而掌握机器人运动学及动力学的基本概念. 机器人运动的实时控制所需的复杂运算是靠计算机完成的, 并不要求手工进行, 只要求我们为计算机提供计算效率高的软件.

机器人机构不可避免要给分析工作带来复杂性, 实时控制时的计算量很大, 如何开发一些计算量更小的分析方法, 则要求机器人运动学及动力学不断改进和发展.

四、本书的主要内容

第一章介绍了本书所采用的基本数学工具——齐次坐标矩阵及齐次坐标变换, 以及变换方程的概念. 第二至第五章是机器人的运动学, 主要介绍机器人运动学方程的建立方法, 已知机器人末端执行器的位姿去求解各关节所需的位移(转动或移动), 这一求解过程可简称为机器人的逆运动学求解. 其中第四章引入了齐次坐标矩阵及变换的微分学, 为分析机器人速度提供了理论基础; 第五章介绍了机器人的速度及静力(力矩)的分析方法, 为运动学向动力学过渡作好了准备. 第六、七、八章分别介绍了 3 种机器人动力学的分析方法. 其中容易接受的是第六章的牛顿—欧拉动力学方法; 计算效率最高的凯恩动力学方法放在第八章; 分析能力强的拉格朗日动力学方法放在第七章. 这样的安排有利于读者吸收和基本概念的建立. 由于本书的篇幅限制, 不再介绍其它的动力学方法. 第九章是机器人轨迹的规划, 介绍了从运动学观点对机器人末端执行器在笛卡尔坐标规定的 3 维空间中的运动控制问题, 包括在关节变量空间中的规划及在笛卡尔坐标空间中的规划两种方法. 最后一章只介绍机器人位置控制的基本概念, 力图说明机器人动力学在伺服控制系统中的地位与作用. 并不企图在这一章介绍各种控制理论及任何控制器的具体设计, 因为这些问题已远远超过了机器人运动学及动力学的范围.

五、本书采用的符号

这里介绍本书所采用符号的特点. 本书使用最多的是矩阵符号, 其次是矢量和标量(数量)的符号. 变换及笛卡尔坐标系也常以矩阵的形式出现, 为了表明变换之间、坐标系之间的关系, 以及是用什么坐标系所描述的坐标系, 不得不利用符号的上、下角标, 因而本书的符号较一般科技书要复杂一些.

(1) 矩阵——用大写的正体英文字母表示, 如 A、B、C、D 等.

有时为了直接表示变换或坐标系的实在意义, 可直接用英语单词的词头, 如 CAM (电视摄像机)、COORD(坐标)、POS(末端执行器的位姿)等.

用字母 T 表示一般的变换, 用字母 R 表示只作旋转的变换, 如

T_{n} (n号坐标向 0 号坐标的变换);

${}^{1}T_5$ (5 号坐标向 1 号坐标的变换);

${}^{0}_{i+1}R$ (i+1 号坐标向 0 号坐标的旋转变换);

${}^{i-1}_{i}R$ (i号坐标向i−1 号坐标的旋转变换)。

有时为了强调某矩阵是一个笛卡尔坐标系，可在该字母外面加{ }号，如{B}(B 坐标系)、{C}(C 坐标系)等。

对于机器人各构件上固定的笛卡尔坐标系，简称为构件坐标系，为方便计可用以下符号表示：

$$\{0\}、\{1\}、\{2\}、\cdots、\{n\}$$

它表示的是 0 号、1 号、2 号、…、n号的构件坐标系。

(2) 矢量——用黑体小写字母表示，如

$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{o}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{p}$ (常用作末端执行器位姿的矢量);

$\boldsymbol{v}$、$\dot{\boldsymbol{v}}$、$\boldsymbol{\omega}$、$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ (线速度、线加速度、角速度、角加速度矢量)。

本书用 $\boldsymbol{e}$ 表示各坐标系 z 轴上的单位矢量，如

${}^{i+1}\boldsymbol{e}_{i+1}=\tilde{\boldsymbol{e}}_{i+1}$ (坐标系i+1 在其z轴上的单位矢量，用坐标系i+1 描述);

${}^{0}\boldsymbol{e}_{i+1}=\boldsymbol{e}_{i+1}$ (坐标系i+1 在其 z 轴上的单位矢量，但它在 0 号坐标系上度量)。

但要注意

$$\boldsymbol{e}_{i+1}\neq\tilde{\boldsymbol{e}}_{i+1}$$

由于矢量也可以写成矩阵形式，即写成 3×1 阶、4×1 阶、…、$n\times1$ 阶的列矢量，如

$\mathrm{q}=[q_1\ q_2\ q_3\ \cdots\ q_n]^T$ (关节的广义位置矢量);

$\mathrm{V}=[1\ \ 2\ \ 0]^T$ (3 维空间常矢量)。

所以矢量也可用大写正体英文字母表示。

为了表示矢量所属的坐标系，也与变换一样采用加前上标的方法，如

${}^{T_5}\mathrm{CAM}$ (表示摄像机装在构件 5 上);

${}^{i}\mathrm{P}_{i,\,i+1}$ (坐标系i+1 原点在坐标系i中的位置矢量)。有时为了简化书写，可以写成 $\tilde{\mathrm{P}}_{i,\,i+1}$，即

$${}^{i}\mathrm{P}_{i,\,i+1}=\tilde{\mathrm{P}}_{i,\,i+1}$$

(3) 数量——用小写斜体字母表示，如ω_x，ω_y，ω_z；x，y，z；q_1，q_2，$q_3\cdots q_n$；a，b，c等等。

第一章　齐次坐标及齐次坐标变换

机器人是一种多自由度的空间机构，是由一系列刚性构件组成的构件系统．需要有一种描述这些构件在空间上相互位置的数学方法，并用它去建立各运动构件的速度、加速度及各驱动力、力矩和负载的关系．在目前流行的方法中，本书采用齐次坐标矩阵方法，它是一种系统性及规范性很强的方法，既有利于形成机器人运动控制算法，也可用作机器人视觉的图像处理．

一、齐 次 坐 标

不同时为 0 的任意 4 个数(x_1，x_2，x_3，x_4)称为 3 维空间点的齐次坐标．

齐次坐标(x_1，x_2，x_3，x_4)与点的笛卡尔坐标(x，y，z)的关系为

$$x=\frac{x_1}{x_4},\quad y=\frac{x_2}{x_4},\quad z=\frac{x_3}{x_4} \tag{1-1}$$

齐次坐标的性质：

(1) 齐次坐标不是单值的．描述 3 维空间一个点的齐次坐标(x_1，x_2，x_3，x_4)也可以是(λx_1，λx_2，λx_3，λx_4)，只要 λ 是不为 0 的任意数即可．

(2) 只有当齐次坐标的第四个元素 x_4 不为 0 时，齐次坐标(x_1，x_2，x_3，x_4)才能确定 3 维空间唯一的点．

1. 矢量的齐次坐标

3 维空间的矢量为

$$\mathrm{V}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$$

式中　$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$——ox、oy、oz 轴上的单位矢量．

V 的齐次坐标表示式为

$$\mathrm{V}=[x\quad y\quad z\quad \omega]^T \tag{1-2}$$

式中　x、y、z、ω——齐次坐标的4个元素，即 x_1、x_2、x_3、x_4，其中 $\omega\neq 0$，常取 $\omega=1$；

T——矩阵的转置符号，即 V 为列矢量．

矢量的齐次坐标运算公式应与矢量的笛卡尔坐标运算公式不矛盾：

(1) 矢量 $\mathrm{V}=[v_1\ v_2\ v_3\ 1]^T$ 与标量 s 相乘的定义为

$$s\mathrm{V}=[sv_1\ sv_2\ sv_3\ s]^T \text{ 或 } s[v_1\ v_2\ v_3\ 1]^T \tag{1-3}$$

(2) 矢量 $\mathrm{V}=[v_1\ v_2\ v_3\ v_4]^T$ 与矢量 $\mathrm{U}=[u_1\ u_2\ u_3\ u_4]^T$ 相加和相减得合成矢量

$R=[r_1\ \ r_2\ \ r_3\ \ r_4]^T$，其中各元素由下式定义：

$$r_i=\frac{v_i}{v_4}\pm\frac{u_i}{u_4}\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 取r_4=1 \tag{1-4}$$

(3) 两矢量的数量积(点积)为

$$V\cdot U=V^TU=\frac{1}{v_4u_4}(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3)$$

$$或\quad v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3\qquad 取u_4=u_4=1 \tag{1-5}$$

(4) 两矢量的矢量积(叉积)为

$$R=V\times U=[r_1\quad r_2\quad r_3\quad r_4]^T$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
r_1&=\frac{v_2u_3-v_3u_2}{v_4u_4}或\ v_2u_3-v_3u_2,\ v_4=u_4=1\\
r_2&=\frac{v_3u_1-v_1u_3}{v_4u_4}或\ v_3u_1-v_1u_3,\ v_4=u_4=1\\
r_3&=\frac{v_1u_2-v_2u_1}{v_4u_4}或\ v_1u_2-v_2u_1,\ v_4=u_4=1\\
r_4&=1\quad 或\quad r_4=v_4u_4
\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

(5) 矢量 V 的长度为

$$|V|=\frac{\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)^{\frac{1}{2}}}{|v_4|} \tag{1-7}$$

应注意到矢量齐次坐标表示法的多值性，例如矢量 $3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 可表示为$[3\ \ 4\ \ 5\ \ 1]^T$，$[6\ \ 8\ \ 10\ \ 2]^T$，$[-30\ \ -40\ \ -50\ \ -10]^T\cdots$，即它的$x_4=1,\ 2,\ -10,\ \cdots$。为简便计，通常取$x_4=1$，对于零矢量则采用$[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$的表示方法。

2. 平面的齐次坐标表示方法

平面 P 的齐次坐标用 1×4 阶矩阵表示为

$$P=[a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4] \tag{1-8}$$

在平面 P 上的点 V(矢量)可用下式表示：

$$PV=[a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4]\,[x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4]=0$$

或

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0 \tag{1-9}$$

若取$x_4=1$，则上式就是笛卡尔坐标 3 维空间的平面方程。

令 $m=+\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ 及$x_4=\omega$ 可将(1-9)式写成

$$\frac{x_1}{\omega}\frac{a_1}{m}+\frac{x_2}{\omega}\frac{a_2}{m}+\frac{x_3}{\omega}\frac{a_3}{m}=-\frac{a_4}{m} \tag{1-10}$$

此式可解释为矢量$(x_1/\omega)\boldsymbol{i}+(x_2/\omega)\boldsymbol{j}+(x_3/\omega)\boldsymbol{k}$与矢量$(a_1/m)\boldsymbol{i}+(a_2/m)\boldsymbol{j}+(a_3/m)\boldsymbol{k}$的数量积的值等于$-a_4/m$。$-a_4/m$是坐标系$ox_1$、$ox_2$、$ox_3$的原点$o$沿平面法线方向到平面的距离。据此可以判断点V与平面P的关系:

(1) 点V在平面P上，PV=0;

(2) 点V不在平面P上，PV≠0: PV<0，则点V在平面P的下方，PV>0，则点V在平面P的上方。

对于机器人视觉的图像处理，需要投影变换，不得不使用一些新的几何元素，如无穷远的点、无穷远的直线、无穷远的平面。采用齐次坐标表示方法，就会为这些要求带来方便:

(1) 空间一点的齐次坐标，当$x_4=0$时，$[x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ 0]^T$就表示它为无穷远的点。特别是$[1\ 0\ 0\ 0]^T$、$[0\ 1\ 0\ 0]^T$及$[0\ 0\ 1\ 0]^T$，它们分别就是笛卡尔坐标系$ox$、$oy$、$oz$轴线上的无穷远点，而$[0\ 0\ 0\ 1]^T$则是此坐标系的原点。

(2) 方程$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$给定空间的一个平面，当$a_1=a_2=a_3=0$时，给定的则是一个无穷远平面;

(3) 任两个独立方程

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0$$

决定一条直线，当$a_1/b_1=a_2/b_2=a_3/b_3$时，则决定一条无穷远的直线。

二、笛卡尔坐标系的齐次坐标变换

笛卡尔坐标系$o'x'y'z'$中的点$(x',\ y',\ z')$向另一笛卡尔坐标系$oxyz$变换，变换后的坐标$(x,\ y,\ z)$由下式计算:

$$\left.\begin{aligned} x&=n_x x'+o_x y'+a_x z'+p_x \\ y&=n_y x'+o_y y'+a_y z'+p_y \\ z&=n_z x'+o_z y'+a_z z'+p_z \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

式中 p_x、p_y、p_z——坐标系$o'x'y'z'$的原点在坐标系$oxyz$中的坐标;

n_x、n_y、n_z——坐标系$o'x'y'z'$的$o'x'$轴对坐标系$oxyz$的3个方向余弦;

o_x、o_y、o_z——坐标系$o'x'y'z'$的$o'y'$轴对坐标系$oxyz$的3个方向余弦;

a_x、a_y、a_z——坐标系$o'x'y'z'$的$o'z'$轴对坐标系$oxyz$的3个方向余弦;

若$\left(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4'\right)$是$o'x'y'z'$系的齐次坐标，$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$是$oxyz$系的齐次坐标，而我们总可认为$x_4=x_4'$，则

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= n_x x_1' + o_x x_2' + a_x x_3' + p_x x_4' \\
x_2 &= n_y x_1' + o_y x_2' + a_y x_3' + p_y x_4' \\
x_3 &= n_z x_1' + o_z x_2' + a_z x_3' + p_z x_4' \\
x_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_4'
\end{aligned}\right\}
$$

将此式写成矩阵 X＝TX′形式，有

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} \tag{1-12}
$$

式中

$$
X = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4]^T
$$

$$
X' = \left[x_1' \;\; x_2' \;\; x_3' \;\; x_4'\right]^T
$$

$$
T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} R & P \\ \hdashline O & I \end{array}\right] \tag{1-13}
$$

上式 T 是一个 4×4 阶矩阵，称为笛卡尔坐标系的齐次坐标变换，它沟通了两个坐标系的关系：表示了在坐标系$o'x'y'z'$中的点 X′，经 T 变换后变成了坐标系$oxyz$中的点 X；或者说已知空间的某一确定点在$o'x'y'z'$空间的度量$\left(x_1', \; x_2', \; x_3'\right)$，经变换后得到了它在$oxyz$空间的度量$(x_1, \; x_2, \; x_3)$。对于不同空间的矢量进行运算处理，将它们均变换到同一空间去是非常必要的。

从(1–13)式的结构看，T 由 R、P、O、I 4 个子矩阵组成。除了 O 为 3×1 阶的 0 矩阵、I 为 1×1 阶矩阵外，其余两个子矩阵 P 及 R 具有明显的几何意义，其中

$$
\left.\begin{aligned}
P &= [p_x \;\; p_y \;\; p_z]^T \\
R &= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{1-14}
$$

式中　P——3×1阶矩阵，为$oxyz$坐标系原点o向$o'x'y'z'$原点o移动的位移矢量；

R——3×3阶矩阵，为$oxyz$坐标系转向与$o'x'y'z'$相吻合的旋转矩阵(详见第三节)。