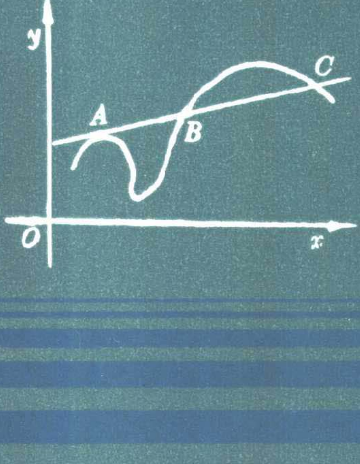
# 高等数学
# 自学考试讲义

上册




北京出版社

# 高等数学自学考试讲义

## 上　册

北京市成人教育学院 编

北　京　出　版　社

高等数学自学考试讲义

上 册

北京市成人教育学院 编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京崇文门外东兴隆街51号）

新华书店北京发行所发行

广 益 印 刷 厂 印 刷

*

787×1092 毫米 32 开本 12 印张 264,000 字

1985 年12月第1版 1985 年12月第1次印刷

印数 1－ 8,700

书号：7071·1078 定价：1.70 元

# 前 言

本书是为有志于参加高等数学自学考试的广大读者编写的．全书共十二章，分上、下两册出版，上册的内容为一元函数微积分学，下册包括空间解析几何、多元函数微积分学、级数、微分方程等．

本书是根据北京市高等教育自学考试委员会关于高等数学考试的要求，参照教育部 1983 年 12 月公布的职工高等工业专科院校《高等数学教学大纲》(草案)，并总结了北京市高等数学自学考试辅导班授课、考试等方面的经验，结合成人学习高等数学的特点编写的．

为了便于自学，在内容安排上力求做到由浅入深，由易到难，突出重点"通俗易懂"又有一定的严密性；引入概念时，尽量从具体到一般，抓住实质，讲深讲透；对例题则注意归纳分类，并着重说明解题的思路与方法。每节留有适量的习题，每章后有小结和复习题，书末附有答案．按新大纲的要求，对不不必需的内容作了删减，使读者集中精力把主要内容学好。

附录中有北京市及其他省市近几年部分高等数学自学考试试题，供读者参考．

参加编写本书的有：774 厂职工大学丘华吉、北京电力学校励金华，761 厂职工大学赵学信、北京轻工业学院张绪鹏．全书由北京市成人教育研究室张世魁同志主审．

由于编者水平有限、难免谬误和不当之处，恳请广大读者和专家指正．

**编者　1984 年 10 月于北京**

# 目　　录

# 第一章　函数及其图形

函数关系是数学分析研究的主要对象，它也是高等数学最重要的基本概念之一．本章将通过典型的例题来讨论函数概念，给出函数的一般定义，还要着重介绍函数的基本性质、基本初等函数的定义域及其图形，以及基本初等函数所具有的特性．

## § 1.1　实数及其绝对值

### 一、实数及数轴

在日常生活或科学研究中，我们常遇到各种不同的数．在初等数学中，我们已经接触到各种各样的数，在高等数学中，数也是我们研究的主要对象．人们对于数的认识是从最简单的正整数即自然数开始逐步发展的，我们所学过的数可以归纳分类如下表；

有理数是一切形如$\frac{q}{p}$的数，其中 $p$ 及 $q$ 为整数，且 $p\neq0$．如 $5$，$-2$，$\frac{2}{3}$，$0$，$-\frac{4}{5}$等．无理数则不能表达为上述$\frac{q}{p}$的形式，如$\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$\pi$，$\operatorname{tg}5$ 等．所有有理数和无理数统称为实数，在数学分析中所研究的数主要是实数．

在中学学过数轴，数轴就是一条规定了原点、长度单位

- 复数 $(a+bi)$
  - 实数 $(b=0)$
    - 有理数
      - 正有理数
        - 正整数(自然数)
        - 正分数
      - 零
      - 负有理数
        - 负整数
        - 负分数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
      - 无限不循环小数
  - 虚数 $(b\neq 0)$
    - 纯虚数 $(a=0)$　$bi$
    - 非纯虚数 $(a\neq 0)$　$a+bi$

和方向的直线．全体实数和数轴上所有的点成一一对应，即每一个实数均可用数轴上唯一的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数．图 1-1 就表示了数轴上点 $-2$、$0$、$\frac{3}{2}$、$4$ 等与实数的对应．

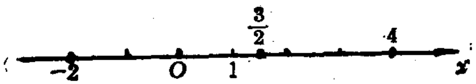



图　1-1

## 二、区间的概念

我们知道，不等式

$$x^2+x-6\leqslant 0$$

的解为 $-3\leqslant x\leqslant 2$，即 $x$ 为介于 $-3$ 和 $2$ 之间的一切实数．为了更好地表达它们，下面我们引进区间的概念．

介于某两个实数之间的全体实数称为区间，而这两个实数称为区间的端点.

区间以其两个端点是否属于区间分为如下几类：

开区间：两端点不属于该区间. 即 $a<x<b$ 的全体实数 $x$，记作 $(a、b)$. 如 $(-1,2)$ 即表示满足下列不等式的实数 $x$：

$$-1<x<2$$

在数轴上表示如图 1-2，“∘” 表示 $-1$、2 两点不在区间内.

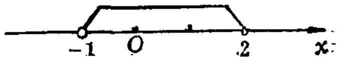


图 1-2

闭区间：$[a,b]$ 表示 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 $x$.

类似地，半开区间 $(a,b]$ 表示 $a<x\leqslant b$ 的全体 $x$，$[a,b)$ 表示 $a\leqslant x<b$ 的全体 $x$.

以上都是有限区间，关于无限区间有：

$(a,+\infty)$ 表示大于 $a$ 的全体实数，即 $a<x<+\infty$；

$(-\infty,b)$ 表示小于 $b$ 的全体实数，即 $-\infty<x<b$；

$(-\infty,+\infty)$ 表示全体实数，即 $-\infty<x<+\infty$.

读者不难理解 $[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$ 的意义，注意“$-\infty$”和“$+\infty$”是两个数学符号，不是数，所以也要用园括弧.

## 三、实数的绝对值

设 $a$ 为一个实数，$a$ 的绝对值记 $|a|$，它定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & 当\ a>0 \\ 0, & 当\ a=0 \\ -a, & 当\ a<0 \end{cases}$$

如 $|5|=5$，$|-3|=3$ 等.

在数轴上，$|a|$ 表示点 $a$ 到原点的距离. 如图 1-3，$-2$ 到原点的距离等于 2，3 到原点的距离等于 3，即

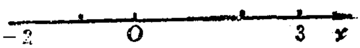


图 1-3

$|-2|=2, |3|=3.$

特别地，带有绝对值符号| |的不等式

$$|x|\leqslant 2$$

表示满足 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 的全体实数，或者说点 $x$ 到原点的距离不大于 2. 而

$$|x|>2$$

则表示 $x>2$ 或 $x<-2$ 的全体实数，或者说点 $x$ 到原点的距离大于 2.

关于绝对值的运算，有以下结论:

1° 若 $a, b, \cdots k$ 为任意实数，则

$|a+b+\cdots+k|\leqslant|a|+|b|+\cdots+|k|$;

2° 若 $a, b$ 为实数，则

$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$;

3° $|a\cdot b\cdot c|=|a|\cdot|b|\cdot|c|$;

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},\quad (b\neq 0).$$

## 习题 1-1

解下列不等式，并将解的范围用区间表示:

1, $\sqrt{(x-2)^2}>3$; 2, $x^2-5x+6>0$;

3, $|x^2-x-6|>x^2-x-6$

4, $\dfrac{x^2+x-2}{x+1}<0$

## §1.2 函数的概念

### 一、常量与变量

在观察某些自然现象或进行科学实验时，会遇到各种不同的量，有些量能保持一定的数值，称为常量；而另一些量却有变化，可取各种不同的数值，这些量称变量.

例如，园周率是常量，而时间、温度等是变量．但要特别注意，有的量在这一过程中是常量，而在另一过程中却可能是变量．如重力加速度 $g$，在地球表面的某一地方考虑，是一个常量，但在不同的地方，则 $g$ 是变量.

### 二、函数的概念

在观察某一过程时，往往会有几个量在变化着，这些变量相互之间还有一定的联系．如自由落体运动，设物体的下落时间为 $t$，下落的距离为 $S$，开始下落的时间为 $t=0$，则有

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

重力加速度 $g$ 为常量．当 $t$ 取不同的数值时，就会引起 $S$ 的变化，相应的取不同的数值.

又如边长 $a$、$b$ 固定的平行四边形，设 $a$ 与 $b$ 之间的夹角为 $\theta$，则平行四边形的面积为

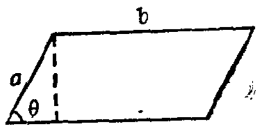



图 1-4

$$A=ab\sin\theta$$

这里，夹角 $\theta$ 和面积 $A$ 是变量，$0<\theta<\pi$，当 $\theta$ 在其取值范围内变化时，$A$ 也相应的变化．但当 $\theta$ 取定一个值时，例 $\theta=$

$\frac{\pi}{6}$，则 $A$ 的值也就随之确定：$A=\frac{1}{2}ab$.

**定义**：设在某个过程中，有两个变量 $x$ 和 $y$，如果变量 $x$ 在某个实数范围内取一个值时，变量 $y$ 按照一定的规则总有一个或多个确定的值与之对应，则称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数，记作

$$y=f(x) \quad 或 \quad f(x)$$

这时，称 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量.

当 $x$ 取某一数值，即在数轴上取某一点时，$y$ 具有确定的对应值，则称函数 $y=f(x)$ 在该点处有定义.

数轴上使函数有定义的点的全体，称为函数的定义域. 对于每一函数，要注意掌握：

1° 自变量 $x$ 的变化范围，即定义域；

2° $x$ 与 $y$ 的对应关系 $f: y=f(x)$，即已知 $x$ 怎样找到对应的 $y$ 值；

3° 函数值 $y$ 的取值范围，即函数的值域.

**例 1** 自由落体运动方程

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

中，自变量为 $t$，定义域为闭区间 $[0, T]$，其中 $T$ 为自由落体到达地面的时间，值域为 $[0, h]$，其中 $h=\frac{1}{2}gT^2$. 对应关系即式(1).

**例 2** 求下列函数的定义域与值域

1° $y=\sqrt{x^2-5x+6}$；　　2° $y=\frac{1}{|x|+x}$

**解** 1° 要使函数有定义，则要

$$x^2-5x+6\geqslant 0$$

得 $x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3$. 故函数的定义域为区间

$(-\infty, 2]$ 或 $[3, +\infty)$

其值域为 $[0, +\infty)$ .

解 2° 要使函数有定义，则要

$$|x|+x\neq 0$$

由 $|x|=\begin{cases} x, & 当\ x>0; \\ 0, & 当\ x=0; \\ -x, & 当\ x<0; \end{cases}$

有当 $x<0$ 时，$|x|+x=-x+x=0$，且 $x=0$ 时 $|x|+x=0$.

当 $x>0$ 时，$|x|+x=2x\neq 0$，故函数的定义域为 $(0, +\infty)$，这时函数的值域为 $(0, +\infty)$.

## 三、函数的表示法

1. 分析法 两个自变量之间的函数关系可以通过某个公式、或某个分析式直接表示出来．如

$$y=3x^2,\ y=\ln\sqrt{1+x},\quad S=\frac{1}{2}gt^2,\cdots$$

符号 ln 将在下一章说明.

有时，一个函数不一定能用一个分析式表达出来．分段函数是逐段用分析式表示的函数．如分段函数

$$y=\begin{cases} 2^x, & 当\ x\leqslant 0; \\ 1, & 当\ x>0; \end{cases}$$

又如

$$y=\begin{cases} 1, & 当\ x>0; \\ 0, & 当\ x=0, \\ -1, & 当\ x<0 \end{cases}$$

也是分段函数.

分析法便于理论研究，但不直观.

2. 图形法　取在平面直角坐标系中的一条曲线上每一点的横坐标代表自变量值，纵坐标代表所对应的函数值，这条曲线就称为函数的图形.

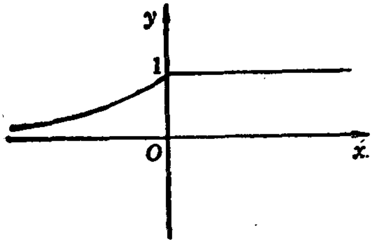



图 1-5

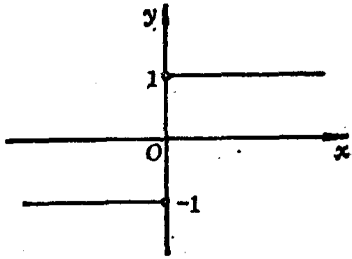



图 1-6

图 1-5 和图 1-6 分别为上述两分段函数的图形. 有时，两个变量 $x$ 和 $y$ 之间的函数关系不能用或很难用分析式子表示，也经常用图形法，如某工厂完成任务情况的产值图、病人的心电图等.

图形法比较直观，但不够精确，在理论计算中，也不方便。

3. 表格法　将一系列自变量 $x$ 的值和对应的函数 $y$ 的值列成表，这样表示函数的方法就是表格法. 如对数表、三角函数表等都是.

表格法在应用上很方便，便于查阅、计算，但不直观.

在实际工作中，常把三种方法结合起来使用.

下面几例，将进一步说明函数关系.

**例 3**　若

$$f(x)=\begin{cases}x+3, & -3\leqslant x<0\\ -2x+1, & 0\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

1) 写出函数的定义域；　2) 求 $f(-1), f(0), f(2)$.

**解**　1) 函数的定义域为 $[-3,2]$.

2) $f(-1)=(x+3)|_{x=-1}=-1+3=2$,

$$f(0)=(-2x+1)\big|_{x=0}=1,$$
$$f(2)=(-2x+1)\big|_{x=2}=-4+1=-3.$$

**例 4** 若 $f(x)=3x^2+x-1$, 求 $f\left(\frac{1}{t}\right)$, $f(x^2)$, $[f(x)]^2$, $f[f(x)]$.

**解** $f\left(\frac{1}{t}\right)=3x^2+x-1\Big|_{x=\frac{1}{t}}$

$$=3\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}-1$$

$$=\frac{3+t-t^2}{t^2},$$

$$f(x^2)=3x^4+x^2-1$$

$$[f(x)]^2=(3x^2+x-1)^2$$

$$\begin{aligned}f[f(x)]&=3[f(x)]^2+f(x)-1\\&=3(3x^2+x-1)^2+3x^2+x-1-1\\&=3(9x^4+x^2+1+6x^3-6x^2-2x)+(3x^2+x-2)\\&=27x^4+18x^3-12x^2-5x+1\end{aligned}$$

**例 5** 若 $f(x+1)=x^2-3x-7$, 求 $f(x), f\left(\frac{1}{t}\right)$

**解** 1) $f(x+1)=x^2-3x-7=x^2+2x+1-5x-8$
$=(x+1)^2-5(x+1)-3,$

$$\therefore \qquad f(x)=x^2-5x-3$$

由此 $f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{t}\right)^2-5\frac{1}{t}-3=\frac{1-5t-3t^2}{t^2}$

又法 2) 令 $x+1=\frac{1}{t}$ 有 $x=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$

$$\therefore \qquad f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{(1-t)^2}{t^2}-3\frac{1-t}{t}-7=\frac{1-5t-3t^2}{t^2}$$

## 习题 1-2

1. 求下列函数的定义域

1° $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;

2° $y=\lg(x+3)+\sqrt{x^2-2x}$;

2. 若 $f(x)=2x^2+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x}+5x$，求 $f(x)$ 的定义域及 $f(-1)$，$f(1)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(-x)$.

# §1.3 函数的特性

某些函数有以下特性:

## 一、单值性与多值性

当自变量 $x$ 在其定义域中任取一个值时，$y$ 只有一个确定的对应值，则称此函数为单值函数，否则为多值函数.

例如 $y=x^2$，$y=2^x$，$y=\sin x$ 是单值函数； $y=\pm\sqrt{x}$ 则是多值函数.

今后我们主要研究单值函数.

## 二、函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 在其定义域中满足 $f(-x)=f(x)$，即自变量取值相反时其对应的函数值相等，则 $f(x)$ 称为偶函数.若 $f(x)$满足 $f(-x)=-f(x)$，即当自变量取值相反时其对应的函数值也互为相反数，则 $f(x)$称为奇函数.

由定义可知，偶函数的图形是对称于 $y$ 轴的；而奇函数的