



996646

# 线性代数引论

(第二版)

蓝以中 赵春来 编著

北京大学出版社

北 京

## 图书在版编目(CIP)数据

线性代数引论/蓝以中,赵春来编著.—2版.—北京:北京大学出版社,1998.4

ISBN 7-301-03712-0

I. 线… II. ①蓝…②赵… III. 线性代数 IV. 0151.2

书 名:线性代数引论(第二版)

著作责任者:蓝以中,赵春来

责任编辑:王明丹

标准书号:ISBN 7-301-03712-0/O·417

出版者:北京大学出版社

地 址:北京大学校内 100871

电 话:出版部 62752015 发行部 62559712 编辑部 62752032

排 印 者:北京大学印刷厂

发 行 者:北京大学出版社

经 销 者:新华书店

850×1168 32开本 12.875印张 320千字

1998年4月第一版 1998年4月第一次印刷

定 价:16.50元

## 前 言

近年来,由于自然科学和工程技术的迅速发展,特别是由于电子计算机的普遍使用,使得线性代数得到日益广泛的应用,因而也就对综合大学和理工院校线性代数课的教学内容提出了越来越高的要求.通过线性代数课程的教学,除了让学生了解一些基本的线性代数计算问题之外,还应当进一步使他们对于线性代数的基础理论有较深的了解,以便融汇贯通地运用线性代数的工具去解决理论上和实践中遇到的各种问题.

在我国综合大学和理工院校的高等数学课程中,线性代数一般安排在微积分之后,因而学习线性代数时,学生已经有了一定程度的数学训练,但从教学实践中看,学生从微积分转到学习线性代数时,仍然感到比较困难.这其中一个主要的原因是线性代数中所研讨的 $n$ 维向量、矩阵、线性空间、线性变换,与学生在前面课程中已经熟悉的实数及其代数运算差别很大,初学者往往感到难于理解.因此,一本较适用的线性代数教材,一方面应当具有足够的理论深度,以满足近代自然科学和工程技术的需要;另一方面,又应当尽可能由浅入深,使初学者感到入门并不难,从而提高深入掌握其基本理论和基本方法的信心.

本书就是根据以上的认识编写的.既包括了与综合大学数学系线性代数课程相同的内容,在阐述上也保持了数学专业教材所应有的逻辑上的严格性;同时,又较多地照顾到非数学专业的学生和非数学专业工作者的特点,对于线性代数基本概念的引入和基本命题的阐述尽可能详尽,由具体而抽象,力求使之通俗易懂,不使初学者望而生畏.在读者理解和掌握了线性代数的基本概念和方法之后,再逐步加深内容,使达到必要的理论高度.

本书共包含八章,其中带\*号的章、节和段落是属于选讲的内容.如果教学计划中线性代数课时可达60学时左右(不包括习题课),预计可以讲完前七章的全部内容.如果仅有50学时左右,则可略去第七章和前六章中带\*号的大部分节和段落.而如果仅有30~40学时,则建议讲授第一、二章全部,第三章§1和§2(略去行列式性质的证明),第四章§1,§2以及子空间的概念,第五章§1,§2,§3,第六章§1,§2.

本书删去了 $\lambda$ -矩阵的理论.因为对于非数学专业的学生,它用处不大而又难于掌握,勉强讲授往往事倍功半.而对于数学专业的学生,这一部分内容又可以在将来的抽象代数课程中从更高的观点上得到简单明了的处理.因此,本书对矩阵的若当标准形只作了叙述而略去有关定理的证明.考虑到在实际工作中可能需要计算低阶矩阵的若当标准形,在第五章§4中添加了求二、三阶矩阵的若当标准形一段.此段内容仅供参考,可不作为教学内容.

在本书中,定理按章编号,命题和例题按节编号.在行文中,当需要跨章引用前面的命题或定理时,就指明是第几章的命题或定理.如无说明,则所引用的均是该章的命题或定理.一个命题或定理证明完毕时,以“■”号表示之.

本书是以作者近年来在北京大学讲授线性代数时的讲稿为基础写成的.在编写过程中,得到了石孙同志的热情指导与帮助,他仔细地审阅了全书,提出了许多宝贵的修改意见,从而使本书的质量得以有很大的提高,作者在此向他表示衷心的感谢.本书中吸收了北京大学数学系几何代数教研室代数小组所编《高等代数》一书中的许多习题,在此一并致谢.

由于作者水平的限制,书中不当和错误之处一定不少,诚恳地希望读者批评指正.

编 者

一九八一年元月于北京大学

## 第二版序言

本书自一九八一年出版以来,在北京大学理科大多数系被作为“线性代数”课程的教材使用,已经整整十五年了.在这期间,又由台湾高等教育出版社于一九八九年在台湾出版了繁体字版本.现在我们根据十五年来教学实践的经验,对此书作了一次全面的修订,目的是使它更加符合教学实践的要求.

在这篇序言中,首先要向读者说明的是:线性代数的研究对象是什么?根据现代数学的观点,代数学的研究对象是各种代数系统及其相互关系,即这些代数系统之间的同态映射.线性代数是代数学中一个最初等的分支,它研究一类最简单的代数系统:线性空间及其同态映射,即线性映射,特别是线性变换.对线性代数研究对象的这一观点,是统率本书总的指导思想.从开篇第一章到全书终了,所有材料都围绕这一线索组织起来,按照由具体到抽象,由特殊到一般的原则,依次展开.首先阐述具体的向量空间和矩阵的基础理论,在读者逐步适应了这些具体的研究对象之后,再过渡到抽象和一般性的线性空间、线性变换.我们希望读者充分注意全书这一总的指导思想,以便学习时处于主动的地位,不致被书中众多的定义、命题所迷惑.

作为一本教材,特别是大学一、二年级基础课的教材,其理论的阐述,概念的引入,要符合人的认识规律.代数学是一门较为抽象的学科.多年教学经验证明,不适应或不理解线性代数中一些抽象概念,是学生学习中遇到的最大困难.如何根据教育学的基本原则,把线性代数中各种抽象概念阐述的通俗易懂,使缺乏抽象数学训练的低年级学生能较好地接受这些概念,是我们编写这本书时着重考虑的一个问题.在编写本书第一版时,我们已采取了一系列

措施来帮助学生克服学习中的这个难点.十五年来的实践证明,这些措施是行之有效的.这次修订时,我们又做了一些努力,希望它能成为一本更加适用的线性代数教科书.

最后,我们要对为本书初版和第二版付出大量辛勤劳动的北京大学出版社邱淑清和王明舟同志表示衷心的感谢.

· 编 者

一九九六年十二月

# 目 录

<b>第一章 线性方程组</b> .....	(1)
引言 .....	(1)
§ 1 矩阵消元法 .....	(3)
§ 2 $n$ 维向量空间 .....	(21)
§ 3 矩阵的秩 .....	(43)
§ 4 齐次线性方程组 .....	(53)
§ 5 线性方程组的一般理论 .....	(62)
<b>第二章 矩阵代数</b> .....	(71)
§ 1 矩阵的运算 .....	(71)
§ 2 初等矩阵 .....	(86)
§ 3 逆矩阵 .....	(93)
§ 4 矩阵的分块运算 .....	(102)
<b>第三章 行列式</b> .....	(110)
§ 1 $n$ 阶行列式的定义及性质 .....	(110)
§ 2 行列式理论的应用 .....	(133)
* § 3 行列式的完全展开式 .....	(144)
<b>第四章 线性空间</b> .....	(154)
§ 1 线性空间的定义 .....	(154)
§ 2 有限维线性空间 .....	(163)
§ 3 子空间 .....	(183)
* § 4 子空间的直和、商空间 .....	(194)
<b>第五章 线性变换</b> .....	(209)
§ 1 线性变换的定义及运算 .....	(210)
§ 2 线性变换的矩阵 .....	(218)



§ 3	特征值与特征向量 .....	(233)
§ 4	若当标准形 .....	(247)
* § 5	不变子空间 .....	(261)
<b>第六章</b>	<b>双线性函数与二次型</b> .....	(267)
§ 1	双线性函数 .....	(267)
§ 2	二次型和它的标准形 .....	(280)
§ 3	实与复二次型的分类 .....	(295)
§ 4	正定二次型 .....	(302)
<b>第七章</b>	<b>欧几里得空间</b> .....	(310)
§ 1	欧几里得空间的定义和基本性质 .....	(311)
§ 2	正交变换 .....	(327)
§ 3	对称变换 .....	(331)
<b>*第八章</b>	<b>酉空间与满秩双线性度量空间</b> .....	(345)
§ 1	酉空间 .....	(345)
§ 2	正规变换与厄米特变换 .....	(353)
§ 3	满秩对称双线性度量空间 .....	(362)
§ 4	满秩反对称双线性度量空间 .....	(374)
	习题解答 .....	(381)

# 第一章 线性方程组

## 引 言

读者在中学的课程中已经熟悉了有关二元一次方程组和三元一次方程组的基本知识. 本章的任务, 是要对中学里学过的这些知识从理论上加以总结和提高.

二元一次方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (1)$$

在解析几何中我们已经知道: 在平面直角坐标系内, 每个二元一次方程代表一条直线. 由于这个原因, 一次代数方程也称为线性方程. 今后, 我们将未知量的一次方程统称为线性方程(不管未知量的数目有多少).

读者已有的关于二元和三元线性方程组的知识大致有如下两个方面:

(1) 方程组的求解方法. 在中学代数课程中已经指出: 解二元和三元线性方程组的最基本的方法是消元法(代入消元法或加减消元法). 例如, 从二元线性方程组(1)中设法消去未知量  $y$ , 得到未知量  $x$  的一个一元一次方程, 解出这个一元一次方程得到  $x$  的值, 再代回原方程组求未知量  $y$  的值. 这个方法也适用于三元线性方程组, 只是这时要想法消去两个未知量, 才能得到一元一次方程.

(2) 方程组解的状况的讨论. 在平面解析几何中, 方程组(1)的一组解代表两条直线的公共点. 因此, 不难看出, 方程组(1)

的解可能出现下列三种情况:(i) 两直线相交,这时方程组有唯一解;(ii) 两直线平行而不重合,这时方程组无解;(iii) 两直线重合,这时方程组有无穷多组解. 同样,因为在空间直角坐标系内,每个三元线性方程代表一个平面,所以,给定如下三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases} \quad (2)$$

则它的每一组解代表三个平面的一个公共点. 利用几何直观不难看出,方程组(2)的解可能出现下列三种情况:(i) 三个平面相交于一点(例如三个坐标平面相交于坐标原点),这时方程组有唯一解;(ii) 若三个平面中有某两个平行而不重合,这时方程组无解;(iii) 三个平面相交于一直线或三个平面互相重合,或两个平面重合,与第三个平面交于一条直线,这时方程组有无穷多组解.

在自然科学和工程技术中,常常需要处理几十、几百甚至成千上万个未知量的线性方程组,这就要求我们把关于二元和三元线性方程组的上述两个方面的知识推广到有  $n$  个未知量的线性方程组上去. 在这一章里,我们就要求解决这个问题. 具体地说,我们将要对  $n$  个未知量的线性方程组做如下两个方面的研究:

第一方面,是从理论上探讨下列三个问题:(1) 一个线性方程组在什么情况下有解,什么情况下无解?(2) 若有解,则有多少组解?(3) 在有許多组解(例如有无穷多组解)的情况下,解与解之间存在什么关系?

第二方面,是对有解的线性方程组探讨求解的方法,也就是把上面提到的消元法理论化、规格化,使它适用于有许多未知量的线性方程组.

由于上述第二方面的问题比较简单,所以,我们将首先探讨第二方面的问题. 即先研究线性方程组的求解方法,然后再回过头来研究线性方程组的一般理论问题.



## 矩阵消元法的原理

所谓矩阵消元法,是以下面的定义和一个命题作为理论基础的一种解线性方程组(1)的方法.

**定义** 方程组(1)做如下三种变换:

- (i) 互换两个方程的位置;
- (ii) 把某一个方程两边同乘一个非零常数  $c$ ;
- (iii) 把某一个方程加上另一方程的  $k$  倍.

上述三种变换中的每一种都称为线性方程组(1)的**初等变换**.

应当指出:线性方程组的初等变换是可逆的.也就是说,如果经过一次初等变换把方程组(1)变成一个新方程组,那么,新方程组必可经一次初等变换变为原方程组(1).这可以具体讨论如下:

1. 如果互换方程组(1)中第  $i, j$  两方程的位置,则对新方程组再互换  $i, j$  两方程的位置就变回原方程组(1);
2. 如果把方程组(1)的第  $i$  个方程乘以非零常数  $c$ ,那么,只要把新方程组的第  $i$  个方程乘以  $1/c$  就变回原方程组(1);
3. 如果把方程组(1)的第  $j$  个方程加上第  $i$  个方程的  $k$  倍,那么,只要把新方程组的第  $j$  个方程加上第  $i$  个方程的  $-k$  倍就变回原方程组(1).

显然,如果方程组(1)经过若干次初等变换化为一个新方程组,那么,新方程组也可以经若干次初等变换化为原方程组(1).另外还应指出,在做初等变换的过程中,方程组中方程的个数既不增加,也不减少.

**命题 1.1** 设方程组(1)经过某一初等变换后变为另一个方程组,则新方程组与原方程组同解.

**证** 设方程组(1)有一组解

$$x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n, \quad (2)$$

代入(1)之后得到  $m$  个恒等式



倍,得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

(iv) 再把上面的方程组中第 2, 3 两方程对换位置,得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

(v) 把上面的方程组的第 3 个方程加上第 2 个方程的 -2 倍,得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_3 = 7. \end{cases}$$

最后所得的方程组具有这样的特点:自上而下看,未知量的个数依次减少,成为阶梯形状(上面用虚线标出阶梯形). 只要从它的第 3 个方程解出  $x_3$ ,代入第 2 个方程解出  $x_2$ ,再代入第 1 个方程解出  $x_1$ ,就得到方程组的解

$$x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{3}, \quad x_3 = \frac{7}{3}.$$

根据命题 1.1,上面各个步骤中所得的每一个方程组都与原方程组同解,故最后方程组的这一组唯一的解就是原方程组的唯一解.

上面这个简单例子代表了用消元法解线性方程组的一般方法和计算格式.它的基本思想是:反复利用方程组的初等变换以把方程组转化成阶梯形状的方程组.

读者不难发觉到,在上面的运算过程中,只是对方程组的系数进行运算,而未知量  $x_1, x_2, x_3$  在整个过程中未参加任何计算.因此,每一步都把它们逐一写出完全是多余的累赘.在计算中完全可以把它们先隐去.只是这时要注意不要打乱了系数的排列顺序.基于这一认识,我们把例 1 的方程组简化成如下的 3 行 4 列长方表

格

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

这个表格称为一个 3 行 4 列矩阵, 简称为  $3 \times 4$  矩阵. 它的每个横排称为行, 竖排称为列. 现在, 它的每一行代表原方程组的一个方程, 第 1, 2, 3 列分别代表各方程中  $x_1, x_2, x_3$  的系数, 第 4 列代表常数项.

于是, 例 1 的解方程的各个步骤现在可简写成如下形式(用箭头  $\rightarrow$  表示一次初等变换)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

等到把矩阵变成阶梯形后, 再写出它代表的方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_3 = 7. \end{cases}$$

求解最后的阶梯形方程组即得原方程组的全部解. 这种方法就称为矩阵消元法.

在熟悉了矩阵消元法的思路 and 计算格式之后, 在实际计算时可把几次初等变换一步完成.

## 例 2 解方程组



$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

**解** 利用矩阵消元法

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ & \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中第 1 个箭头表示利用第 1 行消去第 2, 3, 4 行中  $x_1$  的系数; 第 2 个箭头表示: 把第 2 行加到第 4 行, 然后以  $(-1)$  乘第 2 行, 最后再以  $(1/4)$  乘第 3 行, 等等. 在计算中要注意初等变换的先后次序, 以免混乱, 出现错误. 例如, 在上面第 2 个箭头的计算中, 把第 2 行加到第 4 行后, 第 4 行已经变成  $(0 \ 0 \ 4 \ 7)$ , 只能以它为基础接下去再做变换. 如果忽略这一点, 还用原来的第 4 行又加到第 2 行, 把整个矩阵变成

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

这就错了.

现在把最后阶梯形矩阵对应的方程组写出