

SHUXUE ZIXI YU FUDAO

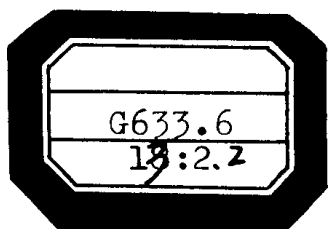
数学 自习与辅导

高中代数
(第二册)

顾鸿达 蔡武冈 闻沂威 编



上海科学技术出版社



数学自习与辅导

(高中代数)

(第二册)

顾鸿达 蔡武冈 闻忻威 编

上海科学技术出版社

063525

数学自习与辅导

(高中代数)

(第二册)

顾鸿达 蔡武冈 闻忻威 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路45号)

总发行所上海发行所发行 上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 9 字数 197,000

1987年5月第1版 1987年5月第1次印刷

印数: 1—96,000

统一书号: 13119·1413 定价: 1.20元

出版说明

《数学自习与辅导》是配合各类中学学生和自学青年进行文化课学习的课外读物。高中部分共六个分册。

本书的出版,旨在指导读者通过自习的方式,加深理解数学概念,熟练掌握基本解题思路和方法,进而使读者在把握知识重点、难点、关键和提高综合运用知识的能力等方面,都有所得益。

本书为高中代数第二册。

由于时间仓促,疏漏之处在所难免,恳请读者批评指正。

目 录

第一章 反三角函数和简单三角方程	1
一、反三角函数	1
二、简单三角方程	42
综合练习题	58
自我检查题	61
第二章 数列与数学归纳法	64
一、数列	64
二、数学归纳法	87
综合练习题	97
自我检查题	101
第三章 不等式	105
综合练习题	147
自我检查题	154
第四章 行列式和线性方程组	157
综合练习题	184
自我检查题	189
第五章 复数	194
一、复数的概念	194
二、复数的运算	202
三、复数的三角形式	212
综合练习题	230
自我检查题	233
习题答案与提示	236

第一章 反三角函数和 简单三角方程

本章内容分为两部分：反三角函数和简单三角方程。

这两部分均属中学数学内容的难点，但若注意抓住与旧知识的区别和联系，就能化难为易。反三角函数是反函数，学习时将反函数的性质、与原函数的关系等知识结合起来，同时考虑将反三角函数转化为三角函数问题；三角方程是方程，既具有代数方程的一般性，又具有三角函数的特性。学习时掌握其一般性和特殊性解之。

一、反三角函数

1.1 反正弦函数

【学习指导和例题】

运用三角函数值研究角，既要由角求得其三角函数值，又要根据三角函数值求角的大小。从三角函数值整体变化上，我们讨论了三角函数的性质；反过来，由三角函数值的变化所引起相应角的总体变化，即是反三角函数所研究的范围。反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数，它们研究的方法类似，将反正弦函数研究透了，其它几个也可顺利地得到解决。因此，学习反正弦函数时，不仅要知道研究所得之结果，而且要掌握研究的方法。

当集合 A 到 B 的一个映射, 对于 A 中每一个原象, B 中有唯一的象与之对应, 而 B 中的每一个象在 A 中都有不同的原象, 称为一一映射, 当确定一个函数的映射是一一映射时, 此函数有反函数。前面, 学过的指数函数, 确定它的映射是一一映射, 有反函数——对数函数。但正弦函数确定它的从 $(-\infty, +\infty)$ 到 $[-1, 1]$ 的映射不是一一映射, 对应于同一个三角函数值, 有无穷多个角的值与其对应, 不存在反函数。使一个三角函数值, 有唯一的一个角的值与其对应, 选择一个区间建立由它到 $[-1, 1]$ 的一一映射, 此区间必须是正弦函数的单调区间, 而且包含 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 应为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。这样从 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 到 $[-1, 1]$ 确定的正弦函数是一一映射, 存在逆映射, 也就有反函数, 称为反正弦函数, 记为 $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。

学习本章最重要是掌握反三角函数的概念, 明确与三角函数的区别。本节, 就是要掌握反正弦函数的概念, 区别于正弦函数。

对反正弦函数概念的掌握, 表现在对于记号 $y = \arcsin x$ 的认识, 如果对反正弦函数记号掌握以下三点, 有关反正弦函数的问题都能迎刃而解。

- (1) $\arcsin x$ 是一个角的量数,
- (2) 这个角的正弦值是已知的, 为 x ,
- (3) 这个角的取值范围是在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。

这三点可以表示为设 $\alpha = \arcsin x$, $\sin \alpha = x$, 且 $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。设了 α , 根据以上三点规定, 就可将反正弦函数

的有关问题,转化为有关正弦函数的老问题了,当反正弦问题难以理解或难以解决时,都可以用此法,转化为老问题来解决。这也是学好整个反三角函数的关键方法。

如 $y = \arcsin x$ 的奇偶性和增减性的研究,利用此法即可得结果。

由 $y = \arcsin x$, 则 $x = \sin y, x \in [-1, +1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 由于定义域和值域为对称区间, $x \in [-1, +1], \therefore -x \in [-1, +1]$, 且 $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $-y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 且 $x = \sin y$ 为奇函数, 令 $\alpha = \arcsin(-x)$, 则 $\sin \alpha = -x$, 即 $x = -\sin \alpha = \sin(-\alpha)$, 得 $-\alpha = \arcsin x$, 即 $\alpha = -\arcsin x$, 则 $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, 故 $y = \arcsin x$ 为奇函数。

由 $x = \sin y$ 是增函数, 即 x 与 y 同增同减, 故 $y = \arcsin x$ 为增函数。

由 $y = f^{-1}(x)$ 和它的原函数 $y = f(x)$ 的图象关于 $y = x$ 对称, 可得 $y = \arcsin x$ 的图象, 因为它与原函数 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图象关于 $y = x$ 对称, 见图 1-1。

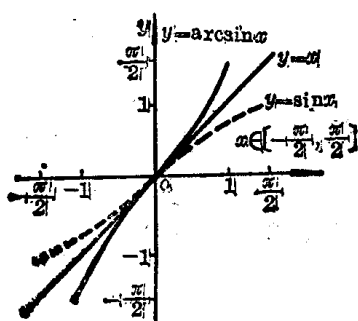


图 1-1

由图所示,图象关于原点对称,函数为奇函数;图象自左至右上升,即随着自变量增加,函数值也增加,为增函数。

例 1 下列哪个式子没有意义:

(1) $\arcsin \frac{\pi}{3}$; (2) $\arcsin \frac{2}{e}$ (e 为自然对数的底);

(3) $\arcsin \frac{2ab}{a^2+b^2}$ ($ab>0, a, b \in R$);

(4) $\arcsin(2\lg \sin 38^\circ)$.

解: (1) $\because \frac{\pi}{3} > 1$, 而 $y = \arcsin x$ 的定义域为 $[-1, 1]$,
 $\therefore \arcsin \frac{\pi}{3}$ 无意义. (2) $\because 0 < \frac{2}{e} < 1$, $\therefore \arcsin \frac{2}{e}$
 有意义. (3) 由 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $ab > 0$, 得 $0 < \frac{2ab}{a^2 + b^2}$
 ≤ 1 , $\therefore \arcsin \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ 有意义. (4) $0 > 2\lg \sin 38^\circ$
 $= \lg \sin^2 38^\circ \geq \lg \sin^2 30^\circ = \lg 0.25 = \bar{1}.a$ (a 为正尾数) > -1 ,
 $\therefore$ 这个式子有意义. 故此题仅 (1) 无意义. 这里特别注意 $\sin \frac{\pi}{3}$
 是有意义的, 而 $\arcsin \frac{\pi}{3}$ 无意义.

例 2 求下列各式的值:

(1) $\arcsin \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)$; (2) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$;

(3) $\sin \left[\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$; (4) $\arcsin(\sin 1)$.

解:

(1) $\arcsin \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\pi}{12}$.

(2) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

$$(3) \sin \left[\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(4) \arcsin(\sin 1) = 1.$$

说明：本例求反正弦函数值，当自变量值为正时，即找出锐角或 $\frac{\pi}{2}$ ，使这角的正弦值为自变量值；当自变量为负值时，可利用奇函数性质，将负号提出函数记号外，化自变量为正解之，见(2)。对 $\sin(\arcsin x) = x$ ， $\arcsin(\sin x) = x$ ，特别要注意它们成立的条件：当 $|x| \leq 1$ 时， $\sin(\arcsin x) = x$ 成立；当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ 时， $\arcsin(\sin x) = x$ 才成立。

例 3 求下列各式的值：

$$(1) \sin \left[\arcsin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]; \quad (2) \arcsin(\sin 1.5);$$

$$(3) \arcsin \left(\sin \frac{11}{7} \pi \right); \quad (4) \arcsin(\sin 10).$$

解：

$$(1) \because \left| -\frac{\pi}{4} \right| < 1, \therefore \sin \left[\arcsin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = -\frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \because 0 < 1.5 < \frac{\pi}{2}, \therefore \arcsin(\sin 1.5) = 1.5.$$

$$(3) \because \sin \frac{11}{7} \pi = \sin \left(2\pi - \frac{3}{7} \pi \right) = -\sin \frac{3}{7} \pi, \\ 0 < \frac{3}{7} \pi < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \arcsin \left(\sin \frac{11}{7} \pi \right) = \arcsin \left(-\sin \frac{3}{7} \pi \right) \\ = -\arcsin \left(\sin \frac{3}{7} \pi \right) = -\frac{3}{7} \pi.$$

$$(4) \because 3\pi < 10 < 3\pi + \frac{\pi}{2}, \therefore 0 < 10 - 3\pi < \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin 10 &= \sin[3\pi + (10 - 3\pi)] \\ &= \sin[\pi + (10 - 3\pi)] = -\sin(10 - 3\pi), \\ \text{则 } \arcsin(\sin 10) &= \arcsin[-\sin(10 - 3\pi)] \\ &= -\arcsin[\sin(10 - 3\pi)] = -(10 - 3\pi) = 3\pi - 10.\end{aligned}$$

本例(1)中的 $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 是三角函数值, 不可误认为弧度数, 故 $\left|-\frac{\pi}{4}\right| < 1$, 就有 $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{\pi}{4}$. 而且 $\arcsin(\sin x) = x$, 仅当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时才成立, 故(2)成立; 但(3), (4)不满足条件, 故利用诱导公式, 使反正弦的自变量转化为相应的锐角正弦值解之.

例 4 求下列各式的值:

$$(1) \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5}\right); \quad (2) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{3}{5}\right);$$

$$(3) \cos 2\left(\arcsin \frac{3}{5}\right); \quad (4) \cos\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5}\right).$$

解: (1) 设 $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$, 则 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 故

$$\cos \alpha > 0, \text{ 得 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}.$$

$$(2) \text{ 设 } \alpha = \arcsin \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{则 } \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{3}{5}\right) &= \cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) \\ &= \cos \alpha = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

$$(3) \text{ 设 } \alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right), \sin\alpha = \frac{3}{5},$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos 2\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) &= \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}. \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 设 } \alpha = \arcsin \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}, \cos\alpha = \frac{4}{5},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \cos\left[\frac{1}{2}\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)\right] &= \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}. \end{aligned}$$

例 5 以 x 表示下列各式:

$$(1) \operatorname{tg}(\arcsin x), x \in [-1, +1];$$

$$(2) \sin[2\arcsin x], x \in [-1, +1];$$

$$(3) \operatorname{tg}[2(\arcsin x)], x \in [-1, +1].$$

解: (1) 设 $\alpha = \arcsin x$, 则 $\sin \alpha = x$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
 $\cos \alpha > 0$, 则 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$,

$$\therefore \operatorname{tg}(\arcsin x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(2) 如(1)所设:

$$\sin(2\arcsin x) = \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

$$(3) \text{ 由(1)所设, 得 } \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\begin{aligned}\therefore \operatorname{tg}(2\arcsin x) &= \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \\ &= \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}.\end{aligned}$$

例 6 求下列函数的定义域、值域:

(1) $y = \arcsin(x^2 + x)$; (2) $y = \arcsin(10^x)$;

(3) $y = \sqrt{\arcsin(\lg x)}$;

(4) $y = \arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

解: (1) 由

$$\begin{aligned}-1 \leq x^2 + x \leq 1 &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{cases} \\ &\Rightarrow x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right],\end{aligned}$$

又 $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$, $\therefore -\frac{1}{4} \leq x^2 + x \leq 1$,

由反正弦函数为增函数, 可得

$$\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) \leq \arcsin(x^2 + x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

故函数 $y = \arcsin(x^2 + x)$ 的定义域为

$$\left[\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right],$$

而其值域为 $\left[\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right), \frac{\pi}{2} \right]$.

(2) $\because 10^x > 0, x \in R$, 由 $10^x \leq 1$, 得 $x \leq 0$, 而 $0 < 10^x \leq 1$, 则 $0 < \arcsin(10^x) \leq \frac{\pi}{2}$.

故函数 $y = \arcsin(10^x)$ 的定义域 $(-\infty, 0]$, 值域 $(0, \frac{\pi}{2}]$.

(3) 由

$$\begin{aligned} \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \lg x \leq 1 \\ \arcsin(\lg x) \geq 0, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \lg x \leq 1 \\ \lg x \geq 0, \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 \leq \lg x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 10. \end{cases} \end{aligned}$$

而 $0 \leq \lg x \leq 1$, 则 $0 \leq \sqrt{\arcsin(\lg x)} \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

故函数 $y = \arcsin(\lg x)$ 的定义域 $[1, 10]$, 值域为 $[0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}]$.

$$(4) \text{ 由 } \begin{cases} -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq x + \frac{1}{2} \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

则 $\arcsin(-1) \leq \arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq \arcsin 0$,

$\arcsin 0 \leq \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq \arcsin 1$,

故 $\arcsin(-1) \leq \arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$\leq \arcsin 1,$$

$$\text{即 } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2}.$$

因此函数 $y = \arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

例7 比较下列各组数的大小:

$$(1) \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{与} \quad \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right);$$

$$(2) \arcsin(\sin 9) \quad \text{与} \quad \arcsin(\sin 10);$$

$$(3) \arcsin a^2 \quad \text{与} \quad \arcsin 2a.$$

解: 比较两个反正弦函数值的大小, 利用反正弦函数是增函数的性质, 自变量大的, 相应函数值也大. 则自变量正的正弦值大于0, 也大于自变量为负值的反正弦值; 自变量同号时, 判别其大小即可.

$$(1) \because -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}, \quad \therefore \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right).$$

$$(2) \because 9 < 3\pi, 10 > 3\pi, \quad \therefore \sin 9 > 0, \sin 10 < 0, \\ \text{故 } \arcsin(\sin 9) > \arcsin(\sin 10).$$

(3) 自变量是变量, 仅当变量取值使两反正弦函数式都有意义时, 才可比较. 先求公共定义域,

$$\begin{cases} a^2 \leq 1 \\ |2a| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq a \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

当 $a^2 > 2a$, 即 $a > 2$ 或 $a < 0$ 时, 在公共定义域 $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$

内有 $\arcsin a^2 > \arcsin 2a$,

当 $a=0$ 时, $\arcsin a^2 = \arcsin 2a$,

当 $a^2 < 2a$ 时, 即 $0 < a < 2$, 在公共定义域 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 时有 $\arcsin a^2 < \arcsin 2a$.

基本练习题 1.1

1. 下列哪个等式不成立:

(1) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; (2) $\sin(\arcsin 1) = 1$;

(3) $\arcsin(\cos \pi) = -\frac{\pi}{2}$; (4) $\sin(\arcsin \pi) = 0$.

2. 求下列各式的值:

(1) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$; (2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(3) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(4) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$;

(5) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$; (6) $\sin\left[2\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$;

(7) $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$;

(8) $\cos\left[\frac{\pi}{3} + 2\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$.

3. 试比较下列每组数的大小:

(1) $\arcsin \frac{1}{2}$ 与 $\arcsin \frac{1}{3}$; (2) $\arcsin(\sin 7)$ 与 $\arcsin(\sin 8)$;

(3) $\arcsin a$ 与 $\arcsin 2a$; (4) $\arcsin \frac{1}{2}a$ 与 $\arcsin a^2$;

(5) $\arcsin a$ 与 $\arcsin a^{\frac{1}{2}}$.

4. 写出下列函数的定义域、值域:

$$(1) y = \arcsin 2x; \quad (2) y = 2\arcsin x;$$

$$(3) y = \arcsin \sqrt{x}; \quad (4) y = \arcsin \left(\frac{x^2}{2} - x \right);$$

$$(5) y = \arcsin(2^x); \quad (6) y = \sqrt{\arcsin \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right)}.$$

5. 求下列各式的值, 其中 $x \in [-1, 1]$:

$$(1) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right); \quad (2) \sin(\pi + 2\arcsin x);$$

$$(3) \sin(3\arcsin x); \quad (4) \sin(n\pi + \arcsin x), n \in \mathbb{Z};$$

$$(5) \cos(n\pi + \arcsin x), n \in \mathbb{Z}; \quad (6) \operatorname{tg}(n\pi + \arcsin x), n \in \mathbb{Z}.$$

6. 求下列各式的值:

$$(1) \arcsin \left[\sin \left(-\frac{\pi}{7} \right) \right]; \quad (2) \arcsin \left[\sin \left(-\frac{15}{7}\pi \right) \right];$$

$$(3) \arcsin[\sin(-10)]; \quad (4) \arcsin \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right];$$

$$(5) \arcsin \left[\operatorname{tg} \left(-\frac{7}{4}\pi \right) \right]; \quad (6) \arcsin[\cos(-10)].$$

1.2 反余弦函数

【学习指导和例题】

与正弦函数一样, 确定余弦函数从 $(-\infty, +\infty)$ 到 $[-1, 1]$ 的映射不是一一映射, 要建立余弦函数的反函数, 选择含有锐角的单调区间 $[0, \pi]$, 则从 $[0, \pi]$ 到 $[-1, 1]$ 确定余弦函数的对应就是一一对应, 它的逆对应所确定的由 $[-1, 1]$ 到 $[0, \pi]$ 的函数称为反余弦函数, 记作 $y = \arccos x$, 定义域 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 原函数 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上为减函数, 反函数与原函数同增减, 则 $y = \arccos x$ 为减函数; 而其定义域非对称区间, $x \in [0, \pi]$, 则 $-x \notin [0, \pi]$, 故 $y = \arccos x$ 为非奇非偶函数。

$y = \arccos x$ 与 $y = \cos x (x \in [0, \pi])$ 的图象关于 $y = x$

• 12 •