

系统科学丛书

13.17
6-1
右卡

数学模型与工业自动控制

第一卷 总论与模型的建立

李国平 宋瑞玉 范文涛编著

湖北人民出版社

系 统 科 学 丛 书

数学模型与工业自动控制

第 一 卷

总论与模型的建立

李国平 宋瑞玉 范文涛编著

湖 北 人 民 出 版 社

系统科学丛书
数学模型与工业自动控制
第一卷
总论与模型的建立

李国平 宋瑞玉 范文涛编著

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米16开本 34印张 6插页 835,000字

1978年10月第1版 1978年10月第1次印刷

印数：1—10,000

统一书号：13106·38 定价：5.30元

序

《数学模型与工业自动控制》这套书,按现有计划,准备分五卷出版。第一卷,包括总论、数学基础与模型的建立;第二卷,叙述轧钢过程的数学模型;第三卷,介绍决定性系统的控制理论;第四卷,介绍随机系统的滤波、控制与识别理论以及化工反应模型;第五卷,主要论述有关供电网络系统的模型与控制问题。

为了给从事采用电子数字计算机实现工业生产过程自动化的具体工作的同志、有关专业教学工作者提供一个较为系统和便于应用与查阅的资料,除了主要介绍以状态空间为基础的现代控制理论外,也用相当的篇幅介绍了水电站、轧钢、冶金以及化工蒸馏等工业系统的具体数学模型。至于古典控制论方面的内容,因国内外有关文献较多,所以本书提及得很少。

在编写的过程中,中国科学院数学研究所、武汉大学数学系、南开大学数学系、东北工学院金属压力加工系、武汉钢铁公司钢铁研究所、冶金部钢铁研究院等单位的许多同志为我们提供了不少宝贵的意见和资料,黄天永、汪咬元同志也为该书的编写和定稿做了很多工作,国家建委综合局、冶金部、湖北省委和湖北省科委的有关领导对本书的编写工作给予了热情地鼓励 and 大力支持,在此一并致谢。

书中缺点错误一定不少,恳请读者批评指正,以便再版时修改。

编 者

一九七七年五月

目 录

第一篇 总 论

第一章	总论	1
§ 1	模型的分类	3
§ 2	控制问题的形成	15
§ 3	控制方法按反馈性质的分类	22
§ 4	离散反馈控制	27
§ 5	连续最优控制	34
§ 6	连续滤波最优控制	49
§ 7	离散系统的滤波控制——卡尔曼滤波	57
§ 8	多级控制	75
结语		76

第二篇 数学基础知识

第二章	矩阵和矢量	78
§ 9	矩阵与有关术语的定义	78
§ 10	矩阵的运算法则	89
§ 11	矢量和矢量空间	98
§ 12	矩阵分析中几个术语的定义	105
第三章	坐标变换	113
§ 13	Jordan 标准型	113
§ 14	特征值各不相同系统的初步研究	114
§ 15	矩阵的对角化	122
§ 16	把具有多重特征矢量系统的系数矩阵化到 Jordan 标准型	129
§ 17	几个特殊矩阵的 Jordan 标准型	136
§ 18	自由动力系统的运动	144
第四章	矩阵分析	148
§ 19	平方矩阵的函数	148
§ 20	Sylvester 内插公式	156
§ 21	二次型与厄米型	162
§ 22	关于二次型、厄米型的定性、半定性的 Sylvester 判据	170

第五章	矩阵的广义逆	173
§ 23	方程 $AX=C$ 求解的分析与广义逆矩阵的定义	173
§ 24	矩阵广义逆的性质	178
§ 25	线性方程组的求解	181
§ 26	广义逆的直接算法	183
§ 27	广义逆的迭代算法	191
第六章	动力系统方程的简化——系统的分离	197
§ 28	拉氏变换法与系统的传递函数表示	201
§ 29	以常微分方程描述的系统的状态空间表示	214
§ 30	用传递函数的部分分式展开法求常微分方程状态空间表示的简化方程	239
§ 31	差分方程描述系统的状态空间表示	254
第七章	状态空间方程的求解	260
§ 32	线性矢量矩阵微分方程的性质与形式解	260
§ 33	线性非时变矢量矩阵微分方程的求解	269
§ 34	e^{At} 的计算方法	274
§ 35	把状态方程经拉氏变换后通过计算传递函数求解	279
§ 36	动力系统的脉冲响应	288
§ 37	矢量矩阵差分方程的求解	301
§ 38	二阶状态方程的连续解法	307
§ 39	矩阵 Riccati 方程的求解	320

第三篇 理想系统数学模型的建立

第八章	稳态模型	332
§ 40	数学模型建立的一般原理与方法	332
§ 41	导出模型的几种常用方法	337
§ 42	用回归法建立线性统计模型	343
§ 43	最优线性模型的选择与逐步回归法	378
§ 44	稳态控制模型的理论方法	393
§ 45	标称点即最优工况的寻求与计算	400
第九章	动态模型与机电系统	416
§ 46	分析力学概要	417
§ 47	机电系统的动力学方程	454
§ 48	应用——一般电机数学模型的拟定	472
§ 49	机电系统的线性模型	484
§ 50	系统模型的模块构造法	508
§ 51	水力发电站系统模型的拟定	514

第一篇 总 论

第一章 总 论

当前,冶金、电力、化工、交通等工业体系中采用数字控制计算机来控制生产过程的系统研究及其工业性试验的工作已经提上日程。实践表明,电子数字控制计算机的运用,不仅在宇宙航行、飞机与船舶导航、无线电控制等方面发挥了重要的作用,在工业系统生产过程的控制方面也正在日益显示出它的巨大作用。随着控制计算机的运用带来的生产过程自动化水平的提高,产品的质量、数量以及衡量生产活动的各种经济指标都将显著改善。

历史上生产过程自动化的发展,大体可以分为如下两个阶段:

第一阶段——“低成本自动化”或者“简单自动化阶段”。这一阶段是在生产的各个环节上,实现局部自动化。也就是说,实现在没人或者很少有人参与下完成过程所需的个别控制操作。其主要的控制对象是单体设备,至于各单体设备之间的自动化联系,一般则不予考虑或者不是考虑重点。并且,因不同国家工业发展特点的不同而有所区别。如英国,受设备更新的限制,在这方面取得了较好的成绩。日本对低成本自动化也给予了足够的重视并取得了相当的发展。我国的广大工人、技术人员和革命干部在党的领导下,一再掀起技术革新、技术革命的高潮,各行各业都在这一方面做出了优异成绩。这一阶段的工作,是使工业发展走向更高级的自动化所不可缺少的技术与物质准备。

第二阶段——以电子数字计算机为主体的对生产过程进行集中控制和全面管理的综合自动化。它的控制对象已不再光是控制单体设备,而是对一个工序、一条作业线、一个车间以至整个工厂的控制。近年来,又从一个工厂的控制发展到对一个整个联合企业的集中管理。这种控制一般叫“多级控制”,比较大的联合控制系统则称为体系控制。

一般来说,生产过程采用计算机控制的一个最大特点是它能使被控系统处于“人们所拟定”的“最优工作状态”,从而使生产中的各种经济指标得到相当的改善。这种控制方法得到了很快的发展,是当前控制科学所研究的主要内容。

正是由于这个原因,在近代的大规模生产系统的建设中,用于生产控制设备的投资,由过去的30%增加到50~60%。这就是说,生产设备投资的重点越来越放到过程控制的自动化设备上了。这是由如下的一些生产发展中的客观需要所决定的:

1. 由于生产技术不断发展,控制彼此不相衔接的设备的工作需要由较过去多得多的操纵人员参与才能实现。但是,要求这么多的操纵人员在很短的时间内,用各自的手动操作,尽快地找到相互匹配的控制量以适应外界条件不断的变化是很难做到的,而只有求助于系统过程控制自动化水平的提高。

2. 由于技术水平和生理条件的限制,不同操纵人员的操作水平是不稳定的。就是同一名操纵人员,在八小时的一班之内的操纵效果也有相当的差异,一般规律是两头高,中间低。这

种现象叫做人为因素对操作的影响。这种影响在创造生产价值比较高的工厂,必须引起注意。要使高水平的操作保持稳定,也必须提高过程控制的自动化水平。

3. 现代工业生产的主要经济指标是产量高,速度快,质量好,消耗少。我们自然要求尽快达到这种高指标的生产状态。但是,在速度很快的情况下,即使是一个熟练工人把生产过程从一个非正常状态调整到正常状态所花的时间的经济价值也是相当大的。从而要求用一种“好”的调整系统,以便尽量减少对系统状态调整的时间,保证生产过程的正常运行。

4. 在一些对操作工人的身体有损害的工艺生产过程,比如水泥、矿山、耐火材料、化工……等厂的一些工种部门中,必须采用提高自动化水平的办法来改善工作条件,以加强劳动保护,这是我国社会主义的国家制度优越性所决定的。我国的自动化工作者在党的领导下,正努力协助广大工人、技术人员、干部完成这一光荣的历史任务。

正是这些社会生产的实际需要,推动了生产过程自动化工作的迅速发展。实际上,控制论已经出现近三十年了,但把控制论的基本观念和结果实用于生产却还只是第二次世界大战以来的近二十年的事。而全面地搬到工业生产上来的工作到更近才出现。这种局面的到来是与计算机的发展分不开的。今天,人们对于计算技术已再不陌生,认为把计算机用于控制生产是“锦上添花”的想法也已经消失。可以说,在生产过程中采用计算技术实现控制的自动化课题的提出与解决,正是上述社会生产实际的需要与可能两者互相推动的结果。

必须着重指出,在生产过程的控制中,计算机本身只能说是一种控制的工具。尽管它的作用相当于人工控制时,站在生产设备之前的人的一部“人工大脑”,但光有这个“人工大脑”仍然不能对生产进行控制。绝不是每一个具有健康的大脑的人都可以控制一个生产过程。但是,只要一个人非常精通了一个生产过程的全部设备,全部工艺的全部规律特性以及这项生产的要求指标和完成这个指标的有效步骤之后,这个人就可以使用他自己的大脑按他的大脑掌握的上述知识和过程中由他的眼睛所观察到并报告了他的大脑的现场数据,有条不紊地进行控制。电子计算机要代替人完成过程控制,也必须在它进行工作之前,由设计者赋与它生产过程的全部设备、工艺的全部规律、特性,并为它安装好象人眼一样随时报告现场数据的检测仪表以及根据这些得来的数据干预过程的方法、步骤等的全部知识。也就是说,在计算机进行工作之前,从事自动化工作的人员必须按控制论的理论、方法,有针对性地研究好过程的规律和全套工艺理论,并安装好传动系统(当然还要研究传动系统的规律)和检测仪表、收集资料、拟定控制方案。一句话,就是要把人工控制时操作人员的全部知识写成数学形式的一套语言并按计算机的指令系统编成有关程序放入机器。控制论给这个本来是人工操作时一样必需的全部知识与办法的数学形式的翻版取了个名字,叫做数学模型。解这个数学模型得来的一套具体算式,就被称为控制算法。计算机就是根据这一套——数学模型和它的算法——来制定控制方案进行控制的。否则,即使把计算机装进了设备体系,它也仍然谈不上操作和控制。

现在,我们来看看,拟定计算机的控制方案需要考虑哪些方面的内容。一般来说,如下的一些方面是不可少的。

- (1) 综合分析可以真正用于工程计算的工艺理论;
- (2) 分析实际工艺过程的试验数据;
- (3) 根据生产的实际要求,分清主要的矛盾因素,拟定控制过程的主要经济指标和控制过程的要点;
- (4) 分析工艺过程的检测系统,权衡它在精度上是否满足新的控制系统的要求;

(5) 根据控制要点, 确定是采用静态还是动态控制系统, 并按模型拟定的传统方法, 初步判定控制系统的规模;

(6) 根据生产过程的实际需要与可能, 选择采用何种最优技术(需注意的是, 在工业生产上, 不必过分强调最优控制, 以防止系统过分复杂, 使得系统的整定时间太长而弄巧成拙);

(7) 仔细分析以确定在控制系统中是否一定要采用随机处理的技术. 一般来说, 在模型中出现随机输入时, 计算机的容量和速度的要求要提高很多. 所以, 对于一个实际控制系统来说, 要权衡它是否出现随机输入, 应该做大量的测试工作之后再下结论;

(8) 控制模型和算法拟定之后, 应先在一般的通用计算机上做“模拟试验”, 以观察该模型计算周期的大小, 再按生产过程的实际需要和这个数据确定待装的控制计算机的指标. 自然, 在确定机器的指标时, 还应为将来模型改进与发展留下适当的余地;

(9) 按照过程数学模型的内容, 拟定过程控制系统的总体设计, 在此应确定:

- a. 模型的全貌;
- b. 采用静态控制还是动态控制;
- c. 检测系统的设计和精度要求;
- d. 试验设计方案;
- e. 显示与打印系统.

(10) 过程的工艺以计算机控制去实现的完成步骤.

在此基础上, 再进行施工设计.

上述十个课题, 是生产过程实现计算机控制涉及并且必须完成的内容. 对这些课题做出明确的回答, 或者说有一个比较系统的概念, 将不是三言两语所能做到的. 要把这些问题的思路搞得清楚一些, 必须从过程控制的数学模型入手. 我们说, 过程的数学模型及其算法的制定问题, 是过程的计算机控制的核心, 是研究生产过程控制问题的一项很麻烦的工作. 我们将从此出发对控制系统所涉及的内容分章回答. 这就是拟写本书的目的.

§ 1 模型的分类

控制技术的研究对象可以说是五花八门, 每一对象也有它具有自己特点的“模型”. 但大体上可以统分为静态与动态两大种类的形式. 而每一类中又包含多种. 兹就各种类的要点作一概述.

静态模型 在生产过程中, 生产的基本条件(比如设备、原料以至温度等气候条件)一般讲是希望不变, 并且实际上往往确是变化很小的. 这样, 我们就可用这样一种被视为稳定的生产条件为背景总结实测数据, 用统计方法拟定“模型”. 这种模型自然与时标无关. 这就是静态模型的客观依据.

对一般的工艺生产过程来说, 变量是各种各样的. 我们可以选择一组主要的变量集合 $x_1, x_2, \dots, x_n$; 一共 n 个, 组成自变量矢量 X . 因变量集合 $y_1, y_2, \dots, y_p$; 共 p 个, 以 Y 矢量表示. 一般说过程中这些变量波动的幅度都不太大, 故使用线性回归方法以拟构这些变量彼此相联的方程组是合理的. 考虑到统计误差项 $e(e_1, e_2, \dots, e_p)$ 的存在, 我们可以写成如下形式的线性回归方程组:

[illegible]

或者写成矩阵形式:

$$Y = AX + e \quad (1-2)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix},$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

在这种最常见的线性统计模型中, e 为误差项. 它是由各方面的原因造成的. 一般认为它具有固定的特性: 平均值为 0, 协方差为 σ .

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{pi} \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix},$$

$$e_i = \begin{bmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ \vdots \\ e_{ni} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

来确定系数矩阵

$$\hat{Y} = AX$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - AX_i$$

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N e_i^T e_i \\ &= \sum_{i=1}^N (Y_i - AX_i)^T (Y_i - AX_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p \left(Y_{ji} - \sum_{k=1}^n a_{jk} X_{ki} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^N \left(Y_{ji} - \sum_{k=1}^n a_{jk} X_{ki} \right)^2 \end{aligned} \quad (1-3a)$$

为最小。式中的 y_{ji} 是 Y 的第 j 个分量的 i 次观察值; x_{ki} 是 X 的第 k 个分量的第 i 次观察值。如令

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1N} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{p1} & y_{p2} & \cdots & y_{pN} \end{bmatrix} = [Y_1 Y_2 \cdots Y_N]$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nN} \end{bmatrix} = [X_1 X_2 \cdots X_n]$$

则公式 1-3a 可以写成

$$J = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^N \left(y_{ji} - \sum_{k=1}^n a_{jk} x_{ki} \right)^2 = \text{Tr}(\bar{Y} - A\bar{X})^T (\bar{Y} - A\bar{X}) \quad (1-3b)$$

这里 Tr 为矩阵的迹, 要选择矩阵 A 使 J 值为最小, 这只要按微分学原理对公式 (1-3b) 取关于 A 的偏导数并使为零。即有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial A} &= \frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[(\bar{Y} - A\bar{X})^T (\bar{Y} - A\bar{X})] \\ &= \frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[\bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{X}^T A^T \bar{Y} - \bar{Y}^T A \bar{X} + \bar{X}^T A^T A \bar{X}] = -2(\bar{Y} - A\bar{X}) \bar{X}^T = 0 \end{aligned} \quad (1-4)$$

从而得到:

$$A = \bar{Y} \bar{X}^T (\bar{X} \bar{X}^T)^{-1} \quad (1-5)$$

以上是静态控制模型 $Y = AX$ 的建立方法中最常见的一种, 被称为静态控制模型的统计回归拟定法。

建立静态控制模型的第二个重要方法是把已知参量间的理论关系在其所谓标称点的附近作代劳展开, 得到 $Y = AX$ 型的控制模型, 但这时又必需事先求解函数方程的标称点 (即方程的根), 这里我们介绍一种在求标称点问题中经常使用的所谓牛顿-拉夫逊 (Newton-Raphson) 法。

先考虑由一个方程约束的单变量的静态系统, 它的标准状态点由方程

$$f(x) = 0 \quad (1-6)$$

的根所刻划。

求此方程的根的所谓牛顿-拉夫逊法的实质就是选择一个适当的 $x^{(0)}$ 出发, 用第 n 次迭代的近似解 $x^{(n)}$ 在曲线 $f(x)$ 上的点 $[x^{(n)}, f(x^{(n)})]$ 处的切线与 X 轴的交点作第 $n+1$ 次的近似解 $x^{(n+1)}$ 。由图 1-1 得:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} \quad n=0, 1, \dots \quad (1-7)$$

反复利用这个递推公式, 当满足适当的收敛条件时, 就可得 (1-6) 的根。

我们把 $f(x^{(n)} + \varepsilon)$ 在 $x^{(n)}$ 附近对 ε 用泰勒级数展开, 就得

$$f(x^{(n)} + \varepsilon) = f(x^{(n)}) + \varepsilon f'(x^{(n)}) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x^{(n)}) + \dots \quad (1-8)$$

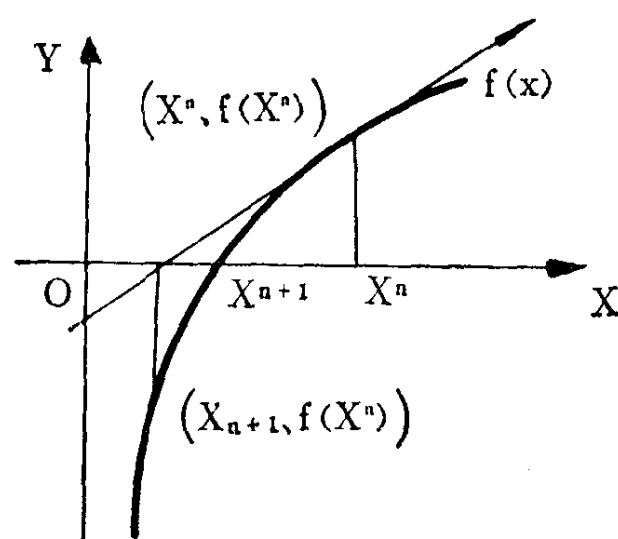


图 1-1 牛顿-拉夫逊法图示

略去比 ε^2 还高的(无穷小)项,就有

$$f(x^{(n)}) + \varepsilon f'(x^{(n)}) = 0 \quad (1-9)$$

从而有

$$\varepsilon \approx -\frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} \quad (1-10)$$

这和(1-7)是一致的。现在,我们把上述的方法推广到有较多方程式约束的多(状态)变量的静态控制系统的情况。

考虑方程组:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots\dots\dots &\dots \\ f_p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

满足此方程组(1-11)的解 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ 称为工艺过程的标定点(或者理想点)。过程开始时,系统中的自变量和因变量并不等于标定点的值。所谓静态控制的任务就是要使系统保持在标定点的附近运转。设系统的瞬时状态值为 $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$, 我们可以假定它与标称点相距 ΔX , 这样就可标定点的附近点 X' 展开 $f_i, i=1, 2, \dots, p$, 而得如下的矩阵方程:

$$f(X'') = \begin{bmatrix} f_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \\ f_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \\ \vdots \dots\dots\dots \vdots \\ f_p(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial X_1} & \frac{\partial f_p}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = 0 \quad (1-12)$$

自然因取到一阶项,由第一等式决定的 X'' 还不是标称点组公式(1-12)被解出之后,作为一个修正量,就得到如下的一组关系:

$$x''_1 = x'_1 + \Delta x_1, x''_2 = x'_2 + \Delta x_2, \dots, x''_n = x'_n + \Delta x_n.$$

显然 $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ 比 $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ 更接近于标称点的真值 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ 。为了使系统的状态从不正常的点 $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 变为正常,这个方法一直要重复使用到满足收敛条件:

$$\text{Max}\{|x_1^{m+1} - x_1^m|, |x_2^{m+1} - x_2^m|, \dots, |x_n^{m+1} - x_n^m|\} < \varepsilon$$

为止。这里, ε 是一个人为规定的小数; m 表示迭代的次数。

作为现代控制系统模型研究的现状,静态模型的上述两个方法的第二种,除了前面提到过的化工蒸馏等情形外,已较少使用。而且由于在控制系统中静态模型使用起来不太方便,所以对它的专门研究也减少了。

动态模型 我们知道,任何事物都是处在不断地运动、发展和变化之中,所以把一个系统的参量依存关系作静态模型处理是不切实际的。由于每一个系统都有驱动输入,系统的状态都处在这种外部输入所引起的变化之中。比如牛顿定律 $F=ma$, 就是我们所熟悉的动态系统的实例。为此,我们必须研究系统的动态模型。

一般来说, 一个实际工艺过程描述状态的因变量——即状态变量是由一定个数的分量组成的状态变量 $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示. 输入变量 $U(u_1, u_2, \dots, u_m)$ 也是由一定个数的分量集合所组成. 在不考虑存在外部干扰时, 描述系统动态性质的状态方程——亦即模型公式有如下标准形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2m}u_m \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nm}u_m \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

或者写成矩阵形式:

$$\dot{X} = AX + BU \quad (1-14)$$

这里

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix},$$

其中, A 称为 $n \times n$ 维的状态矩阵, B 为 $n \times m$ 维的控制矩阵; X 为 n 维的状态矢量, U 为 m 维的控制矢量. 在当前所有研究控制过程的数学模型以及各种滤波技术的文献中, 都使用 (1-14) 一类的形式. 我们将看到, 这种形式在使用和运算上是方便的. 在运算上已有了固有的程序.

公式 (1-14) 的形式是从大量工艺过程研究所涉及的实际课题中抽象出来的. 从一个控制系统中微小的三极管, 到一个完整的控制器; 从一个生产工序到一个车间、一个工厂、一个联合企业, 都可以用上述形式描述系统的动态过程模型. 在现代化的钢带轧机上, 状态矩阵 A 的维数达到 102×102 . 一般来说, 可以由状态矩阵的维数大小判定模型的计算时间. 以公式 (1-14) 来代替 (1-13) 不仅是写法上简单了, 更主要的是当我们从逻辑上描述控制方法时, 它带来了极大的简明性. 如果用公式 (1-13) 来进行逻辑上的推理与描述, 那将麻烦得无法进行. 这种烦琐的计算, 必然大量地掩盖控制论的活生生的思想.

这里只是谈到了动态系统的标准动态模型形式. 在实际的生产过程中, 还有别的值得广泛研究的形式. 我们来分析一下炼铁高炉的冶炼情况. 当我们改变高炉上部焦炭装入的配比时, 大约得在 1~2 小时后, 炉底熔池才会以发烧的方式反映出来. 这种现象在任何一个超距作用的物质系统中都存在着, 在控制论上称之为延迟. 当然, 在状态上亦有延迟. 此时系统的状态方程式应分别为:

$$\dot{X} = AX(t) + BU(t-\tau) \quad (\text{燃料延迟}) \quad (1-15)$$

$$\dot{X} = A_1X(t) + A_2X(t-\tau) + BU(t) \quad (\text{状态延迟}) \quad (1-16)$$

$$\dot{X} = A_1X(t) + A_2X(t-\tau) + BU(t-\tau) \quad (\text{燃料和状态都有延迟}) \quad (1-17)$$

公式 (1-14) ~ (1-17) 中的状态矩阵 A 和控制矩阵 B 都是常数矩阵, 即 A 、 B 中的元都与时间无关. 这种以常矩阵描述的系统, 是在近代的控制装置上遇得最多并且较易于处理的. 我们称这种系统为非时变系统.

当 A 与 B 矩阵中的元素同时间 t 变化时, 我们就称这系统是时变系数模型系统, 简称为时变系统. 我们可以仿前写出时变系统的几种动态模型的方程式:

a. 标准时变动态模型方程

$$\dot{X} = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (1-18)$$

b. 具有状态延迟的时变动态模型方程

$$\dot{X} = A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t-\tau) + B(t)U(t) \quad (1-19)$$

c. 具有外力延迟的时变动态模型方程

$$\dot{X} = A(t)X(t) + B(t)U(t-\tau) \quad (1-20)$$

d. 具有状态和外力延迟的时变动态模型方程

$$\dot{X} = A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t-\tau) + B_1(t)U(t) + B_2(t)U(t-\tau) \quad (1-21)$$

上面提到的这些模型都是线性的，即导数项与状态矢量和控制矢量—— X ， U 只是一次相依。但一般来说，工艺过程的动态相依关系则多半是非线性的，即形如下式：

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ \dot{X}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

写成矩阵形式，则为

$$\dot{X} = F(X \cdot U \cdot t) \quad (1-23)$$

函数关系 $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t)$ 都不一定是线性的。可能有许多很特别的函数关系存在，这种关系在控制上是很难实现的。所以必须对它进行线性化的处理。作这种线性化处理的根据是：当生产的工艺过程是处于正常操作之下时，变量偏离理想点的量值，一般是不会太远的，因而就可以把 $f_i(X \cdot U \cdot t)$ 在它的理想点附近按泰勒系数展开，而仅取其线性项，而把其余的高阶无穷小量当误差处理。这就是惯用的线性化方法及其可行的基础。当然，也还有其它的形式。

但是又什么是(1-23)式描述的系统的理想点呢？这是以在该点系统状态接近或者达到稳态为根据而确定的。据此可知，在该理想态的标定点必然满足方程：

$$\frac{dX}{dt} = F(X \cdot U \cdot t) = 0 \quad (1-24)$$

为了从公式(1-24)很快解出标定点的值，我们在前面介绍了牛顿-拉夫逊方法。当然还有其它的方法。这里我们先假设式(1-24)的解为 X_0, u_0 ，我们就可以把(1-23)式做线性化表示了。用这种方法处理的系统，一般称为变分动态系统。

我们假定 X 及 u 是 X_0, u_0 的周围一个小邻域中的点的值，则 $F(X \cdot u \cdot t)$ 的展开式为：

$$\begin{aligned} F(X \cdot U \cdot t) &= F(X_0 \cdot U_0 \cdot t) + \left(\frac{\partial F(X \cdot U \cdot t)}{\partial X} \right)_{X_0, u_0} \delta X(t) \\ &\quad + \left(\frac{\partial F(X \cdot U \cdot t)}{\partial u} \right)_{X_0, u_0} \delta u(t) + 0(\delta^2 X(t), \delta^2 u(t)) \end{aligned} \quad (1-25)$$

它等价于下式：

$$\begin{aligned} f_1(X \cdot U \cdot t) &= f_1(X_0 \cdot u_0 \cdot t) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1(t) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2(t) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \delta x_n(t) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \delta u_1(t) + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \delta u_2(t) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \delta u_m(t) + 0(\delta^2 X(t), \delta^2 u(t)) \\ f_2(X \cdot U \cdot t) &= f_2(X_0 \cdot u_0 \cdot t) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1(t) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_2(t) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \delta x_n(t) \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \delta u_1(t) + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \delta u_2(t) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \delta u_m(t) + 0(\delta^2 X(t), \delta^2 u(t)) \end{aligned}$$

⋮

$$f_n(X \cdot U \cdot t) = f_n(X_0 \cdot U_0 \cdot t) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \delta x_1(t) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \delta x_2(t) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \delta x_n(t) \\ + \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \delta u_1(t) + \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \delta u_2(t) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \delta u_m(t) + O(\delta^2 X(t), \delta^2 u(t)) \quad (1-26)$$

这里 $O(\delta^2 X(t), \delta^2 u(t))$ 是级数展开的余项。在线性化的过程中，它被略去。再注意 X_0, u_0 为标定点的值，即有

$$f_1(X_0 \cdot U_0 \cdot t) = f_2(X_0 \cdot U_0 \cdot t) = \cdots = f_n(X_0 \cdot U_0 \cdot t) = 0.$$

于是(1-26)可写成：

$$\delta \dot{X}(t) = A(t) \delta X(t) + B(t) \delta u(t) \quad (1-27)$$

这里

$$\delta \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1(t) \\ \delta \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \delta \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \delta X(t) = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \\ \vdots \\ \delta x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \delta U(t) = \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \\ \vdots \\ \delta u_m(t) \end{bmatrix},$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

其中 $A(t)$ 是 $n \times n$ 维的状态矩阵， $B(t)$ 是 $n \times m$ 维的控制矩阵。由于线性化时略去了高次的小量 $O(\delta^2 X(t), \delta^2 U(t))$ ，必然为状态方程带来了误差。以后将说明如何把这一部分误差，归入到误差处理中去统一解决。

现在来看考虑了误差的系统模型。已经提到，在非线性的状态方程中有误差项 $O(\delta^2 X(t), \delta^2 u(t))$ ，此外，系统中各控制元件的热效应，过程状态测量上仪表的不准等都会不可避免的带来误差。为了处理上的方便，我们把这些综合量 $\varphi(t)$ 看成一个具有正态分布的白噪声（有时，我们也可把 $\varphi(t)$ 看成一个外部扰动）。假定它的统计平均为 0，协方差为一常数 σ 或者是随时间变化的 $\sigma(t)$ ；这时，系统的动态模型就可写为：

$$\dot{X} = A(t) X(t) + B(t) U(t) + \varphi(t) \quad (1-28)$$

在一些控制精度要求较高的系统，把 $\varphi(t)$ 当白噪声处理还不能满足要求，就把它看成一个有色噪声。此时假定 $\varphi(t)$ 是由一个白色噪声 $V(t)$ 所驱动的线性系统的输出。这就得到一般我们所说的所谓伴随模型系统：

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= A(t) X(t) + B(t) U(t) + \varphi(t) \\ \dot{\varphi} &= m(t) \varphi(t) + V(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

如果假定：

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad \bar{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & m(t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}(t) = \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{U}(t) = \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

则(1-29)可写为:

$$\dot{\bar{X}} = \overline{A(t)} \bar{X}(t) + \overline{B(t)} \bar{U}(t) \quad (1-31)$$

这里的 $V(t)$ 有它自己的统计性质.

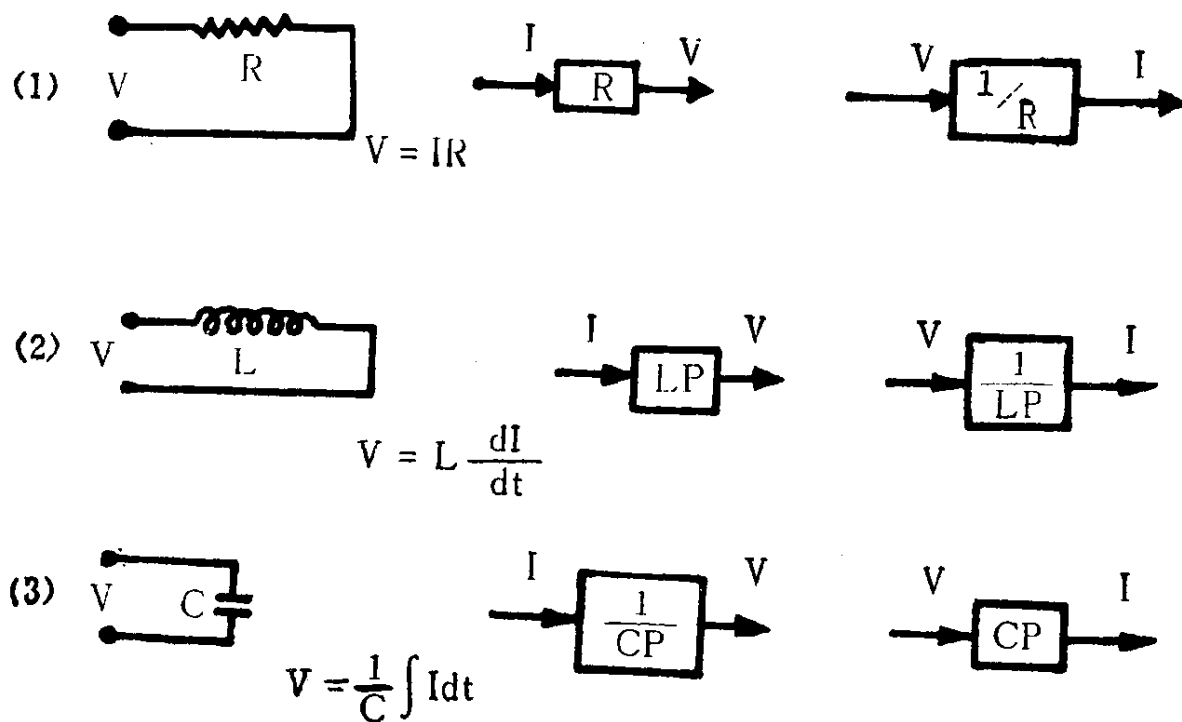
关于模型的拟定方法,乃是本书讨论的主要内容. 这里凡未涉及的内容,本书将有专章按不同的生产过程分别介绍.

模型方程的流形图表示 流形图亦称流程图. 实际上就是一般讲的方框图. 在控制理论和控制方案的研究中,为逻辑上明晰起见,不是把被讨论系统动态方程的每一个参数都一古脑的表示出来,而是把系统按一定的规律进行简化,用逻辑方框图以替代所描述的系统. 当我们掌握了这种形象表示的图示与系统结构相互转化的规律之后,就可以容易地从较为直观的逻辑框图想象到系统的真实结构. 这个办法叫做系统的流形图表示法. 它是从过去的电气调整理论那里借鉴来的.

由于经常是不同的物理系统有着在形式上统一的动态方程,我们就自然地可以把在电气方面这类系统研究的方法搬到一般的控制研究上来,变成控制系统的流形图. 当前,经过控制理论研究的发展,控制系统的这种以方框描述一个复杂系统的前后逻辑联系的流形图得到了很大的简化. 为了我们方便地掌握这个方法,我们还是用 RLC 电路的动态过程来入手研究.

我们知道,在电气网络中,是对系统方程进行拉氏变换后,用所谓的传递函数关系来绘制方框图. 对 RLC 电路,我们可以根据以下的基本准则给出网络的传递函数.

(1)、(2)、(3) 电路的运动方程和变量通过系统的相互传递函数的方框图分别是:



这里,

$$p = \frac{d}{dt}, p^{-1} = \int dt$$

是对系统进行拉氏变换时使用的微分与积分运算符号.

对于这三个电路,这是明显的.

让我们用这三个基本电路的传递函数关系与方框图来研究如下的——图1-2a所示的—— RLC 网络系统:

只要我们把把这个网络的 L, R, C 段分别应用上面的 (1)、(2)、(3) 情形的方框图,我们就

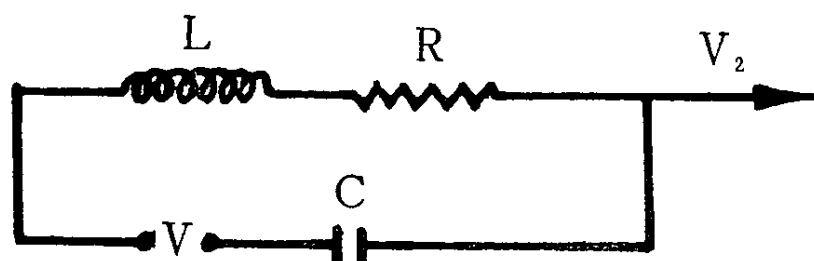


图 1-2a RLC 网络系统

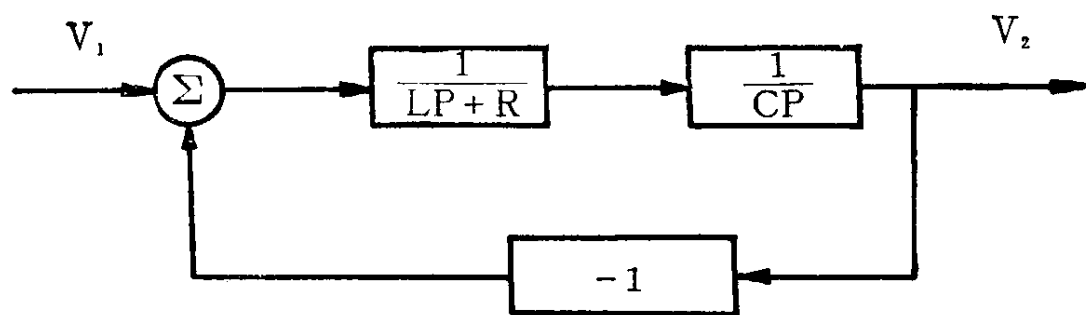


图 1-2b 相等于图 1-2a 的传递函数方框图

可画出图 1-2b 相应于图 1-2a 的传递函数的方框图。从而，我们可以写出 V_1 与 V_2 的传递函数关系：

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{V_1}{V_2}\right) &= 1 + CP(LP + R) \\ \left(\frac{V_2}{V_1}\right) &= 1/(LCP^2 + RCP + 1) \end{aligned} \right\} \quad (1-32)$$

公式(1-32)在自动调节中是专为计算系统的过程用的。但是，我们现在采用的方法，则多半不采用传递函数，而是想使用系统的动态方程把它直接转化成标准的模型方程，即我们使用的是所谓的状态空间方法。

请注意，对于前面列举的(1)、(2)、(3)三种简单的 RLC 电路来说，没有必要采用态空间的方法来处理它，但在系统的电阻 R 、电感 L 、电容 C 较大而且带有不同的增益放大系数时，采用“态空间”技术就显得格外方便。

试看图 1-2a，得知， V_1 由下式表示：

$$L \frac{dI}{dt} + RI + V_c = V_1 \quad (1-33)$$

因为在电容 C 上，电流 I 是等于 $\frac{dq}{dt}$ 的。这里 q 为电荷。所以，有

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_1 \quad (1-34)$$

所以，一般来讲，上述的 RLC 系统是一个二阶微分系统。为讨论方便，我们把它写成标准形式：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = r(t) \quad (1-35)$$

这里 m , f , k 是由系统本身的特征决定的常数。

或者再把(1-35)改写为：

$$\ddot{x} + \left(\frac{f}{m}\right)\dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = \frac{1}{m}r(t) \quad (1-36)$$