北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

高等代数简明教程

上册

蓝以中 编著

北京大学出版社

北京大学数学教学系列丛书

高等代数简明教程

（上　册）

蓝以中　编著

北京大学出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等代数简明教程.上册/蓝以中编著.—北京:北京大学出版社,2002.8

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-05370-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.蓝…　Ⅲ.高等代数-高等学校-教材　Ⅳ.015

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第022932号

书　　　名:高等代数简明教程(上册)
著作责任者:蓝以中　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-05370-3/O·0524
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn　　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
排　版　者:高新特激光照排中心　62637627
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
890×1240　A5 开本　12.5 印张　350 千字
2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
印　　　数:0001—4000 册
定　　　价:18.50 元

《北京大学数学教学系列丛书》编委会

普通高等教育“十五”国家级规划教材

内 容 简 介

本书是综合大学、师范院校“高等代数”课程教学用书。编者以其三十余年教学经验为基础，经与多位专家反复磋商，对高等代数教材作了系统、全面的改革。此教材有以下两个特色：一是贴切课堂教学和学生自学的实际，精心设计了多个层次，由浅入深，从具体到抽象，由生动直观到理性推理，使学生较为顺利地进入代数学的抽象领域；第二个特色是以代数学的研究对象和基本思想、基本方法作为全书的主线，本书全部内容，包括一些基本定理的证明，都按这个原则安排，从而保证学生受到较充分的代数学训练，在理论上达到足够的深度和高度。其科学内容符合作为现代代数学入门课程的教材所应达到的水准。

全书共十二章，分上、下两册出版。上册（第一章至第五章）是线性代数的基础教材，内容包括向量空间、矩阵、行列式、线性空间与线性变换、双线性函数与二次型。下册（第六章至第十二章）包括三方面内容：一是带度量的线性空间及Jordan标准形，这是线性代数较深入的知识；二是有理整数环及一元、多元多项式环；三是选讲内容：n维仿射空间与n维射影空间，张量积与外代数。本书每个章节都安排了相当数量的习题作为课外练习或习题课上选用，其中的计算题在书末附有答案，较难的题则有提示。

本书可作为综合大学、高等师范院校数学系、力学系、应用数学系大学生“高等代数”课程的教材或教学参考书，也可供理工科大学生阅读，对于青年教师、数学工作者本书也是很好的教学参考书或学习用书。

作 者 简 介

蓝以中　北京大学数学科学学院教授。1963年毕业于北京大学数学力学系，长期从事高等代数、线性代数等课程的教学工作。

序　言

自 1995 年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效。2001 年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了 30 多门研究生普选基础课程（其中数学系 18 门），重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合，我们进行了有组织的教材建设。计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考，记录了我们教学实践的足迹，体现了我们教学改革的成果，反映了我们对新世纪人才培养的理念，代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展，数学的基本理论更加深入和完善，而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛，而且活跃于生产力第一线，促进着技术和经济的发展，所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学，正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化，数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素，将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区，但要十分稳重和积极；人才培养无止境，既要遵循基本规律，更要不断创新。我们现在推出这套丛书，目的是向大家学习。让我们大家携起手来，为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张 继 平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前　言

高等代数是综合大学和师范院校数学院（系）本科生的三门主要必修基础课（分析，几何，代数）之一，在教学计划中属于关键性的课程．编写一本符合现代科学发展水平的合格的高等代数教材，无疑是一项重要的工作．在从事这项工作时，首先要解决的问题是：代数学作为数学科学的三大理论支柱之一，它的研究对象是什么？关于这一点，段学复院士于 1962 年在为范德瓦尔登的“代数学”中译本所写的序言中指出：“一百多年来，尤其是本世纪以来，随着数学的发展以及应用的需要，代数学的研究对象以及研究方法发生了巨大的变革．一系列新的代数领域被建立起来，大大地扩充了代数学的研究范围，形成了所谓近世代数学．它与以代数方程的根的计算与分布为研究中心的古典代数学有所不同，它是以研究数字、文字和更一般元素的代数运算的规律及各种代数结构——群、环、代数、域、格等——的性质为其中心问题的．”这里所说的观点，是中外数学家普遍认同的．因此，它自然应当是我们编写代数学的入门课程——高等代数教材的基本指导思想．为了使学生在两个学期的教学中对现代代数学的研究对象，基本思想和基本方法有一个初步但又是清楚的认识，我们认为下列几个基本问题是在教材编写和课堂教学中必须首先解决的．

1．什么是贯穿高等代数教学的主干线？

经典代数学的研究课题是各类代数方程的求解问题．但是很容易看出，线性方程的解本质上是向量空间和矩阵理论的一个简单的应用．自 Galois 的理论问世以后，又使人们认识到一元高次代数方程的求根本质上是域的结构理论，特别是域扩张和域的自同构群的理论的应用．由此人们逐渐认识到，代数的基本研究对象应当是各类代数系统及其相互关系（态射）．高等代数作为代数学的入门课程，应当是以中学代数知识（即经典代数学中方程的求解问题）为出发点，

将学生逐步引导到现代代数学的基本研究对象上来.这应当就是贯穿高等代数课程的主干线.具体说,就是从研究线性方程的理论入手,引导出向量空间和矩阵的基础理论,在此基础上再过渡到抽象的线性空间(一类最简单的代数系统)及其态射(线性映射,特别是线性变换)的理论.从研究中、小学中熟悉的整数理论,经过总结提高成为有理整数环,再过渡到一元与多元的多项式环.通过高等代数课程的教学,使学生初步接受抽象代数学的基本思想,并接受抽象代数学基本方法的初步训练.这应当是此课程教学的基本要求.

2. 在教学中如何贯彻认识论或教育学的基本原则?

作为大学低年级的入门课程,其理论的阐述应当符合人的认识规律,即由浅入深,从具体到抽象,由形象直观到理性思维,例如,通过分析线性方程组结构的直观上的特点导出向量空间和矩阵及其运算的基本理论,以具体的齐次线性方程组有无非零解来导出向量组线性相关与无关的抽象概念等等.在学生熟悉了具体的向量空间和矩阵之后,再过渡到抽象的线性空间和线性映射理论.通过学生熟练掌握的整数及其运算上升到有理整数环,以具体的有理整数环为范例阐述因子分解理论及商环理论(不给出一般定义),再过渡到一个或多个不定元的多项式环.在本教材中,我们遵循这个原则来处理各个章节中基本概念的引入及基本理论的展开.

在一些线性代数教材中,通过三维几何空间来引入一般向量空间.这一做法有如下缺点:首先,现在高等代数与解析几何常常并列开,学生在学习线性代数前并未熟悉三维几何空间中的向量理论(仅在中学物理中知道力、速度等向量的简单概念),不能作为较踏实的出发点.而且从教学实践看,学生学习三维几何空间的向量理论并不是很轻松就掌握的.但更重要的一点是,从三维几何空间推广到高维空间(特别是任意数域 K 上的向量空间)是许多学生难于接受的,因为现实空间只到三维为止,他们难以理解为什么会有 n 维空间.而从线性方程组结构来引入一般向量空间最为自然,从教学实践中看,学生易于接受.因此,三维几何空间在本课程中应作为线性空间一个重要、直观的例子来使用,而不宜作为整个理论的出发点.

3. 在高等代数课程中，学生应受到哪些最基本的训练？

除了与其他数学课程共同的基本训练(如逻辑思维能力等)之外，从高等代数课程本身的特点来看，似乎有以下几个方面是最主要的，应当贯穿课程始终的.

1) 代数学基本思想的训练. 代数学具有高度抽象性和一般性. 所研究的代数系统，其元素及代数运算都未有具体内容，而仅要求满足一定的运算法则，这是概括了许多具体的客观事物的共性之后形成的非常一般的规律，从而有广泛的应用. 这种抽象思维的训练，不但在数学各个方向是需要的，在其他学科及实际工作中也都是很重要的. 这是提高学生整体素质的一个重要方面. 从事抽象思维训练，是代数学的特有的优点，在本课程教学中应当紧紧抓住这一点.

2) 代数学基本方法的训练. 培养学生在抽象线性空间内处理理论问题的能力. 能把较具体的问题如线性方程组，矩阵领域的问题转化为抽象线性空间和线性变换领域的问题来处理；又会把抽象领域的问题具体化(如计算线性变换特征值转化为解代数方程). 初步学习抽象代数中普遍使用的基本方法，如线性空间的子空间的运用(在群论、环论、模论、线性结合与非结合代数中的子群、子环、子模、子代数等等的应用都是这一普遍方法的体现)，商空间的应用(对应于一般情况下商群、商环、商模、商代数的使用).

3) 线性代数基本计算，特别是求解线性方程组，求逆矩阵，计算行列式，求线性变换特征值与特征向量，用正交变换化实对称矩阵成对角形等等数字计算的训练.

4) 矩阵与多项式技巧的运用，特别是分块矩阵的使用.

5) 综合运用分析、几何、代数方法处理问题的初步训练.

4. 如何处理基本理论与实际应用之间的关系？

高等代数的理论知识在数学、自然科学、工程技术以至经济人文等领域都有广泛的应用. 在教材中适当加入一些实际应用的知识和好的例题是必要的，也有助于学生提高学习本课程的积极性和兴趣. 但它作为一年级的基础课程，仍应以基本知识和基本方法的训练为

主，以期提高学生的整体素质．在本课程中不可能也没有必要花过多的精力去研究实际问题的应用．

5．矩阵论在本课程中处于何种地位？

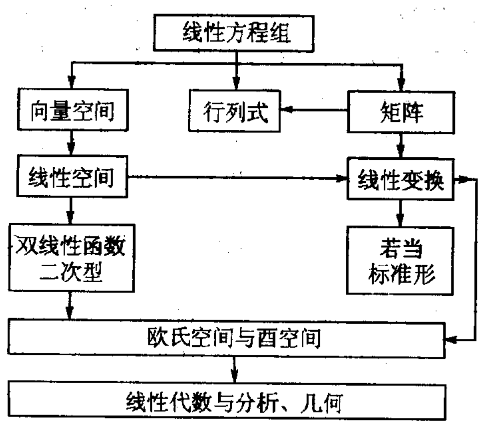
矩阵是重要的数学工具，有广泛的应用．在本课程中应包含适度的使用矩阵工具（技巧）的训练．但它不是主干线，不应占太大分量，冲击主干线．有两点要特别提出：

1）矩阵是线性映射（变换）在取定基后的具体表现形式．矩阵论的许多问题如特征值、特征向量，相抵、相似、合同等等都可以在线性空间中很直观、简明地处理．作为数学系学生，应训练从更高观点（而不是单从计算技巧上）处理这些问题．

2）有些领域矩阵使用很多，应由该方向在高等代数课基础上酌情补充讲授有关内容．本课程作为低年级大学生的基础课，应侧重基础理论，基本思想，基本方法的训练，不可能包打天下，讲授后面课程需要的一切知识．

下面对本教材的框架结构作一说明．此教材由三大部分组成．

第一部分：从线性方程组引出向量空间和矩阵，再抽象为线性空间和线性变换，再利用双线性函数和二次型在线性空间中引入度量，建立度量线性空间（欧氏空间与酉空间）及其中依赖于度量的特殊线性变换的理论，可用下面框图表示其结构．



第二部分：从中、小学的整数知识总结归纳为有理整数环，再用多项式与整数在运算中的共性(有加、乘两种运算，有带余除法等)，说明这运算所产生的基本理论(整除性、因子分解等等)仅依赖于其满足的运算法则，从而导出不定元的抽象一元多项式环，再进一步讨论多元多项式环，图示如下：

$$\boxed{\text{有理整数环}} \longrightarrow \boxed{\text{一元多项式环}} \longrightarrow \boxed{\text{多元多项式环}}$$

在第二部分的教学中，实际上已经形成了环，特别是多项式环的基本思想，这就为将来在抽象代数课中学习环的理论打了基础.

第三部分：线性空间的张量积与外代数.

本教材按每周课堂讲授 4 学时(另加 2 学时习题课)，共两个学期，每学期 18 周安排教材内容. 如果学时不足或学生程度不够，则删去教材中带 * 号的章节. 在每个章节中都安排了相当数量的习题作为课外作业或在习题课上选用，其中的计算题在书后附有答案，较难的题则有提示.

本教材在编写过程中得到北京大学数学科学学院领导的大力支持. 院长张继平教授邀请学院中长期从事代数学科研与教学工作的徐明曜、赵春来、王杰、方新贵几位教授对教材编写的总体设想及大纲作了细致的讨论，提出了许多宝贵的意见. 徐明曜、王杰两位教授把他们过去使用过的部分讲义提供给编者参考. 赵春来教授对教材进行了细心的审阅，又提出了许多中肯的修改意见. 特别是，学院领导邀请著名数学家项武义教授前来北京大学就高等代数教学的改革问题进行了多次座谈与讨论，使编者从中得到许多启发. 编者在此向他们表示诚挚的感谢.

本教材编写自始至终都得到北京大学出版社刘勇同志的热情支持. 北京高新特激光照排中心唐开宇同志为本教材的排版及多次修改付出了辛勤的劳动，在此一并致射.

编　者

2001 年 12 月

于北京大学

目　录

第一章　代数学的经典课题

引　言

代数学是一个历史悠久的数学分支,它有着十分广泛的应用领域.从本来的意义上说,代数学研究数和它的加、减、乘、除四则运算(统称代数运算).因此,代数学的知识渗透到人类的生产实践、社会实践以至日常生活的一切领域.它的基本知识是每个人都需要具备的.从小学到中学的12年启蒙或普及教育中,代数是贯穿始终的一门主课.从中学毕业出来的青年学生,已经对数及其四则运算有了丰富的感性认识和初步的理论知识.

但是,在这个人人熟悉的,粗看起来似乎颇为简单的领域中,其实蕴含着十分丰富、十分深奥的知识.其中许多课题至今仍然远远没有被人们弄清楚.举一个典型的例子:大约在1637年,法国数学家Fermat断言,对于大于2的整数n,三个未知量x,y,z的代数方程$x^n+y^n=z^n$没有正整数解.这个问题中,只牵涉到正整数的加法与乘法(乘方)运算,可说是再简单不过了,具有初中一年级代数知识的人都能看明白.但是它历经350余年,无数第一流的数学家为之绞尽脑汁,才于1994年被Princeton大学的数学家Wiles使用现代最深奥的数学理论得出解答.这一例子说明,植根于数及其四则运算的理论这一片沃土上的代数学,在经过漫长的发展过程之后,无疑已成为一个内容十分丰硕的理论学科.

高等代数是代数学的入门课程,它的任务是阐述代数学的一些基础知识,使读者了解代数学的研究对象,初步掌握代数学的基本思想和处理问题时特有的一套基本方法.在本教程中,我们大致从两个方面来进入这个课题.

首先,从生产实践和自然科学理论中,自然地产生了求解代数方

程的问题，它就是代数学的经典课题. 例如，根据牛顿第二运动定律，物体所受的力 F，它的质量 m 和产生的加速度 a 之间存在关系 $F=ma$. 如果已知物体的质量 m 和所受的力 F，求加速度 a，这就是一元一次方程的求解问题. 又比如，一个以初速 v_0 在水平面上作匀加速运动的物体，它的加速度 a，运动时间 t 和移动的距离 S 满足

$$S = v_0t + \frac{1}{2}at^2.$$

如果已知 S, v_0, a，求运动时间 t，这就是求一元二次方程的根. 数学史表明，早在中世纪人们就已经找到解一元一次、二次代数方程的一般方法. 到欧洲的文艺复兴时代，又找到一元三次、四次方程的求根公式. 但是随后数学家们就碰到难题了. 在数百年时间内，他们苦苦寻求五次以上代数方程的求根公式，却总是遭到失败. 直到 1832 年，法国数学家 Galois 才找到了一个高次代数方程有根式解(即用该方程的系数经加、减、乘、除及开方运算表示它的全部根)的判别准则，完满地解决了高次代数方程根的理论课题. 根据 Galois 的理论，五次以上的一般代数方程没有求根公式. Galois 的工作中最值得注意的是，他不是局限在数的四则运算的范围内考察问题. 他跳出这个圈子，考察 n 次方程的 n 个根的某些置换所组成的集合 G，规定 G 内两个置换的"乘积"是对根的集合逐次进行这两个置换. 于是他在一个并非由数组成的集合 G 内定义了一种新的代数运算：乘法(它完全不同于数的乘法). 他发现这种乘法也具有与数的乘法相类似的某些运算法则(例如满足结合律等等). 这个新的具有乘法运算的集合我们现在把它称为该高次代数方程的 Galois 群. Galois 证明：高次代数方程有没有根式解取决于它的 Galois 群的结构. 这样，人们的认识发生了一个质的飞跃，那就是为了研讨数及其代数运算中所包含的深刻规律，我们必须跳出数及其四则运算的框框，去研究一个更一般的集合及其中应有的代数运算. 这样，代数学发生了一个革命性的变化：从研究代数方程的求根这一经典课题解脱出来，变成研究一个一般的集合(其元素可以完全抽象，没有具体内容)，在其中存在一种或若干种代数运算(这种运算不同于数的四则运算，甚至可以是抽象定义的)，同时要求这些运算要满足一定的运算法则. 这样的一个

体系我们称之为一个**代数系统**.现代的代数学的研究对象就是各种各样的代数系统以及它们之间的相互关系.

Galois 的理论有相当的深度和难度,我们没有可能在高等代数这一入门课程中来讲授它.但是我们却发现,如果考察一类较简单的代数方程:多元一次代数方程组的问题,它也把我们引导到同样的领域中去.也就是说,当我们讨论多元一次代数方程组(读者在中学代数课程中已经熟知二元一次联立方程组和三元一次联立方程组)的理论问题时,我们同样发现,我们也必须跳出数及其四则运算的范畴,去研究一个由并非普通的数所组成的集合,在这个集合的元素之间也存在某些运算并满足相应的运算法则,它们于是也成为一种代数系统,而多元一次联立代数方程组的理论课题也由这个代数系统的理论完满解决.这样,它就把我们引导到现代代数学的殿堂之中.这就是本书所要着重讨论的**线性代数**理论.

现在我们来阐述从数及其四则运算的理论进入现代代数学的另一条途径.我们知道,整数是数的系统中最简单又是最基本的一类数.如果考察全体整数所成的集合 Z,那么,在 Z 内可以做加法、减法和乘法,但除法却不是总可以进行.于是要讨论用一个非零整数 a 去除另一个整数 b 时,何时商 $\frac{b}{a}$ 还是一个整数?这就产生了 Z 内的整除理论,随之又产生了因子分解理论.与此同时,在讨论高次代数方程时,需要考察全体多项式(一般形式可表示为 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$)所组成的集合 P,在这个集合内同样可以做多项式的加法、减法和乘法,但除法却不是总可以进行.于是同样要讨论何时用一个非零多项式 $f(x)$ 去除另一个多项式 $g(x)$ 可以除尽的问题.这就是多项式集合 P 内的整除理论.当然,随之而来的是 P 内的因子分解理论.Z 和 P 是两个元素完全不同的集合,其中的加法、减法、乘法的具体内容也完全不同.但我们发现,这些代数运算满足相同的运算法则.而且,在这两个集合内研究的理论课题和所得的结果也是惊人地相似.这就启发我们:可以研究一个一般的集合,其中的元素可以作加法运算及其逆运算减法,又可以作乘法运算(但不一定能作逆运算除法),同时这两种运算满足一定运算法则(类似于整数,