测量误差理论新探

周江文　欧吉坤　杨元喜 等　著

$$\underset{nm}{A}X_0 = L + \Delta$$

$$\begin{bmatrix} R & G^{\mathrm{T}} \\ G & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\Delta} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -RL \\ w \end{bmatrix}$$

地 震 出 版 社

国家自然科学基金资助项目

测量误差理论新探

周江文　欧吉坤　杨元喜　等著

地震出版社

1999

内 容 提 要

本书是论述测量误差和数据处理新理论和新方法的一部文集，内容涉及五部分：一、拟合法则；二、特征化方法及系统误差模式；三、平差因子与可靠性研究；四、抗差理论和方法；五、测量极值问题及分布密度逼近。大多数内容是以往未曾涉及或未深入研究的。本书内容丰富，反映了相关领域的研究水平。

本书可供测绘、计量、地震、数理统计、化学、医药、生物等专业从事误差理论和数据处理的科技人员及高等院校相关专业的师生参考。

测量误差理论新探

周江文 欧吉坤 杨元喜 等著

责任编辑：吴 冰

责任校对：耿 艳

地震出版社 出版发行

北京民族学院南路9号

北京地大彩印厂印刷

全国各地新华书店经售

850×1168 1/32 4.875印张 131千字

1999年11月第一版 1999年11月第一次印刷

印数 001—700

ISBN 7-5028-1697-6/O·29

(2190) 定价：10.00元

前　　言

本书对以下几个方面进行了探讨：

拟合法则；

特征化方法及系统误差模式；

平差因子与可靠性研究；

抗差理论和方法；

测量极值问题及分布密度逼近。

其中大多是以往未涉及或未深入研究的。例如“粗差的拟准检定法”，将粗差探测中传统的假设检验改向粗差的直接估计，作了有益的尝试；提出了经验（规律）与线性规划解法相结合求解测量极值问题的通解和优解的新思路；推演了利用“部分延续”模式处理系统误差问题的解式；提出一种新的、统一的可靠性度量指标；论证了粗差修正和剔除的等价性；探讨了分布密度逼近方法，等等。因此试图用“新探”二字来反映该书的特点。

大地测量学随着新技术的飞速发展发生了极大的变化，观测数据与误差理论虽有广泛的基础，但也必须与新兴的计算机算法同步前进。

本书是国家自然科学基金资助项目“数据与误差理论的拓展”的一部分。该书的出版还得到中国科学院动力大地测量学开放研究实验室以及地震出版社的大力支持，编辑吴冰同志付出了很多辛劳，中国科学院测量与地球物理研究所柴艳菊同志协助打印本书的初稿。作者一并表示衷心感谢。

著者于武昌

1999 年 5 月

Research on The Theory of Observation Data and Errors

Preface

The following topics are treated in this works:

The rule of fitting.

The method of characterization and problems with systematic errors.

The adjustment factor and reliability.

The theory and method of removing gross errors.

The extreme problem in surveying and the distribution approximation.

As an example, the paper "Quasi – Accurate Detection of gross errors" tries to estimate directly the gross errors, in contrast with the traditional way through hypothesis test.

With the fast development of new technique, geodesy undergoes radical changes. While the theory of data and errors has wide basis in various sciences, it should be matched with the newly suggested computer algorithm.

The authors

May, 1999

目　　录

CONTENTS

·拟 合 法 则·

论拟合法则

周江文

摘　　要

在大量的数据处理问题中，适当地运用拟合法则，可以把某些本来不定的秩亏问题变为相对可定的问题，得出有价值的结果。本文认为此法有更多的推广余地。

关键词： 秩亏问题　拟合法则　拟合推估　选群拟合

一、基本问题

在数据处理理论中，通常数据原量确定，而取值 $\boldsymbol{L}$（观测值）不确定。确定值为 $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\Delta}$，$\boldsymbol{\Delta}$ 表示偶（然误）差，为随机量。不失普遍性，可设 $\boldsymbol{\Delta}$ 的期望 $\mathrm{E}\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{0}$，其分布函数不必明确，简记为 $\boldsymbol{\Delta}\approx\boldsymbol{0}$。偶差群的分布以 $\boldsymbol{0}$ 为中心。为简单记，以下假设观测值 $\boldsymbol{L}$ 等权。

观测与其原量 $\boldsymbol{X}$（优解 $\hat{\boldsymbol{X}}$）之间有观测方程：

$$\underset{nm}{\overset{m}{\boldsymbol{A}}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\Delta}\qquad \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{V} \tag{1}$$

式中，$\underset{nm}{\overset{m}{\boldsymbol{A}}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 列满秩系数阵；$\boldsymbol{V}$ 是余差向量。方程组相容。

原量 $\boldsymbol{X}$ 未知，$\boldsymbol{\Delta}$ 不全知，这是秩亏问题。为求优解，通常

附加约束 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$（范数，以平方和为代表）极小。相容组 $\boldsymbol{V}$ 的分布尽可能靠近$\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{V}$ 拟合于$\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{\Delta}\approx\boldsymbol{0}$。要求偶差群的分布以 $\boldsymbol{0}$ 为中心，这样是自然的，称为拟合法则。如果 $\boldsymbol{\Delta}$ 服从正态分布，即 $\boldsymbol{\Delta}\sim N(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I})$，这里 $\boldsymbol{I}$ 是单位阵，$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$ 极小等价于 $\boldsymbol{V}$ 的联合概率密度极大，这称为概率法则。如果不作正态假设，两者要加以区别。

$\boldsymbol{\Delta}$ 元素只在单一方程中出现，不如 $\boldsymbol{X}$ 由多观测确定，所以 $\boldsymbol{V}$ 不应视为 $\boldsymbol{\Delta}$ 的优解，可由优解 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 通过观测方程算得。

为求秩亏问题的确定解，可指定若干 $\boldsymbol{\Delta}$ 元素为$\boldsymbol{0}$，称为全合(exact fitting)（或附和）。不过，单值全合不如多值拟合，强制性大，也可能破坏观测方程组的相容条件。

二、拟合推估

如未知量中既有确定未知量 $\boldsymbol{X}$，也有随机未知量 $\boldsymbol{Y}$，已知 $\mathrm{E}\boldsymbol{Y}$，观测方程：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \underset{nr}{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}\end{bmatrix} \tag{2}$$

式中，$\underset{nr}{\boldsymbol{B}}$ 表示$\boldsymbol{B}$是$n\times r$ 列满秩阵；未知量 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 和$\boldsymbol{\Delta}$ 的估值表示为 $\hat{\boldsymbol{X}}$、$\hat{\boldsymbol{Y}}$ 和 $\boldsymbol{V}$，$\mathrm{E}\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{Y}$ 的期望。

该问题常称为拟合推估（collocation，包括 Bayes 问题，后者中有 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{L}_{Y}+\boldsymbol{\Delta}_{Y}$ 形式的观测方程）。求解时通常取拟合法则

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} + (\hat{\boldsymbol{Y}} - \mathrm{E}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{Y}} - \mathrm{E}\boldsymbol{Y}) = \text{极小} \tag{3}$$

在 $\boldsymbol{\Delta}$、$\boldsymbol{Y}$ 均属正态随机量假设下，它使 $\boldsymbol{V}$、$\hat{\boldsymbol{Y}}$ 联合出现的概率密度极大。作为概率法则，这样做有一定的意义。不过，对 $\boldsymbol{Y}$ 来说，是小子样，其统计意义甚微。作为拟合法则，须注意求量 $\boldsymbol{Y}$ 是取值（Realization），区别于期望 $\mathrm{E}\boldsymbol{Y}$，两者拟合与题设是矛盾的。因此，如果（$\boldsymbol{A}$　$\boldsymbol{B}$）列满秩，宁可视 $\boldsymbol{Y}$ 为确定未知量，按常法求解 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}$，只采用法则 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$ 极小。

三、选群拟合

在秩亏问题求解中，拟合法则往往起着非常有效的作用。求量或少数异常量可以采用选群（相应求量近似等于0）拟合法估求。下面以拟稳平差[1]和粗差检定[2]为例，说明拟合法则在许多问题中可以推广应用。

（1）拟稳平差的观测方程

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{\Delta} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A\hat{X}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V}$$

式中，$\boldsymbol{X}$ 代表点的位移；$\boldsymbol{A}$ 秩亏。$\boldsymbol{X}$ 无定解，通常 $\boldsymbol{X}$ 中有部分拟稳点 $\boldsymbol{X}_0 \approx \boldsymbol{0}$，这时可在 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0$ 极小法则下求解。

具体做法，先在 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$ 为极小下作出 $\boldsymbol{X}$ 的法方程（最小二乘通解的等价方程）：

$$\underset{mm}{\overset{m-t}{\boldsymbol{N}}}\underset{m}{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}, \qquad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \text{ 秩亏} \tag{5}$$

式中，上标 t 代表问题的必要基准数。分 $\boldsymbol{X}$ 为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \underset{m_0}{\boldsymbol{X}_0} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_0$（$m_0$ 维）分别代表非稳定点和拟稳点的位移。将 $\boldsymbol{X}_1$ 约化后得到 $\boldsymbol{X}_0$ 的约化法方程：

$$\overset{m_0-t}{\boldsymbol{M}}\underset{m_0}{\boldsymbol{X}_0} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{6}$$

式中，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{\alpha}$ 见参考文献［1］。

然后在 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0$ 极小法则下求得

$$\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{M}^{m}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

$\boldsymbol{M}^{m}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的最小范数逆。求 $\boldsymbol{X}_0$ 不是我们的目的，而是为了将 $\boldsymbol{X}_0$ 回代法方程求得 $\boldsymbol{X}_1$，在拟稳基准下的 $\boldsymbol{X}_1$ 位移。比较不同期的 $\boldsymbol{X}_1$，可以发现 $\boldsymbol{X}_1$ 的变化规律。

这种选群（$\boldsymbol{X}_0$）拟合的方法较之全合（强制附和）或全网

拟合（伪逆解法），既有相对稳定的基准，又保持观测结构不受歪曲，具有明显的优点。它把本来不定的问题变为相对可定的问题。

（2）粗差检定的观测方程

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{\Delta} \tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 m；$\boldsymbol{X}$ 为未知；$\boldsymbol{\Delta}$ 为不全知，这是秩亏问题。为了检定 $\boldsymbol{\Delta}$ 中可能的粗差，记 $\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_0 \end{bmatrix}$，选 $\boldsymbol{\Delta}_0 \approx 0$，先以

$$\underset{m}{\overset{n-m}{\boldsymbol{R}}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{RA} = 0) \tag{9}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 是 n 维单位阵。式（9）左乘式（8），消去 $\boldsymbol{X}$，得到

$$\boldsymbol{R\Delta} = -\boldsymbol{RL}$$

和法方程（5）相当（它实际由观测方程衍生，是 $\boldsymbol{\Delta}$ 应满足的方程，可称误差方程），因此有完全相同的算法，可以通过 $\boldsymbol{\Delta}_0$ 的拟合求 $\boldsymbol{\Delta}_1$，从而分辨出粗差。

（3）式（8）中，$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{\Delta}$ 均未知，属秩亏问题，最小二乘法（或绝对和极小法等）设 $\boldsymbol{\Delta} \approx 0$，取全体 $\boldsymbol{\Delta}$ 拟合以求 $\boldsymbol{X}$。因此这些广为接受的估计方法实亦为选群拟合之例。

参 考 文 献

[1] 周江文，监测网的拟稳平差，中国科学院测量与地球物理研究所专刊，2，1980。

[2] 欧吉坤，粗差的拟准检定法，测绘学报，28（1），1999。

On The Rule of Fitting

Zhou Jiangwen

Abstract In many problems of data processing, by appropriate use of the method of fitting, indefinite rank-deficiency problems can be converted into relatively definite ones, giving valuable results. The paper suggests more attention to be paid to the method.

Keywords: rank-deficiency problems, rule of fitting, collocation, selected group fitting.

粗差的拟准检定法（QUAD法）[①]

欧吉坤

摘　要

以往对付粗差的各种方法都是以余差（残差）为研究对象。本文提出一种全新的研究思路和方法，从真误差入手。真误差与观测值有确定的解析关系，但关系式的系数阵是秩亏的。本文借鉴周江文的"拟稳平差"思想，提出"拟准观测"的概念，附加"拟准观测的真误差范数极小"的条件，解决了关于真误差的秩亏方程组求确定解的问题，推导了粗差的拟准检定法算式。该方法依据真误差估值的分布特征，检测粗差准确可靠，不仅能有效地同时定位多个粗差，估计其大小，而且能严密地评定估值精度。它适合于过去用最小二乘法（LS）的各种学科领域处理粗差。文章最后简要介绍两个算例，说明拟准检定法实施过程和效果。

关键词： 真误差　最小二乘法　抗差估计　假设检验　粗差检测

一、前　言

粗差是指离群的大误差[1]。由于科学技术的发展对测量精度要求越来越高，人们对测量数据中的粗差影响也越来越重视。近二三十年来，众多学者提出了多种抗御粗差干扰的方法，归纳起来，大致可分为两类：一类是以假设检验为基础的粗差探测、

---

① 本项研究得到国家自然科学基金（49574203）、中科院资源与生态环境研究重点项目（K2957-sl-401）、攀登项目子课题"中国大陆主要活动带现今地壳运动及动力学研究"以及中科院动力大地测量学开放研究实验室的项目联合资助。

辨识和修正的方法，如 Cook 等人的余差分析[2]，Baarda 的 Data Snooping[3]等；另一类是抗差估计（Robust Estimation），如数理统计学界的 Huber[4]、Hampel 以及 Rousseeuw 等为抗差 M 估计奠定了理论基础，Caspary[5]，Kubik 等将该方法引入测量界。近年来我国测量学者对该方法的研究不断深入，周江文、黄幼才、杨元喜等作了系统研究，并形成了抗差最小二乘法概念[6]。

第一类方法，文献［7］也作了详细介绍和讨论。当存在多个粗差时，假设检验容易受到干扰，有时不能准确地发现粗差。第二类方法的关键是选择适当的抗差权函数。严密的精度分析还有待进一步深入研究。

以往的方法都是以观测值的余差（又称残差）为研究对象。

余差是指参数估值的函数与线性观测方程中的观测值之间的差值。最小二乘（LS）余差受到双重因素的制约，即，不仅受到观测值中粗差的影响，而且还受到系统结构强度的影响。由于 LS 起着平摊误差的作用，余差的大小并不能直接反映粗差大小。

本文提出一种全新的检测粗差的思路和方法，从研究观测值的真误差入手。真误差与观测值之间存在确定的解析关系。然而关系式的系数阵是秩亏的。1980 年周江文提出了拟稳平差理论[8,9]，较好地解决了形变监测分析中的秩亏问题。拟稳平差贯穿一种辨证思想，突出选群拟合而非强制。借鉴这种思想，笔者提出了“粗差的拟准检定法”（英文缩写 QUAD 法）。

本文首先建立关于真误差的数学模型。在提出“拟准观测”概念的基础上，推导了拟准检定法的有关算式。最后分析了两则算例，说明拟准检定法的实施过程和效果。

二、数学模型

设有线性化观测方程组

$$\underset{nm}{\overset{m}{A}}X_0 = L + \Delta \tag{1}$$

在本文中，矩阵的上标表示矩阵的秩，下标表示矩阵的维数。通常讨论式（1）的估值形式为

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 是系数阵；$\boldsymbol{X}_0$ 是 m 维向量，代表未知参数的真值，$\hat{\boldsymbol{X}}$ 为其估值；$\boldsymbol{L}$ 是 n 维观测值向量；$\boldsymbol{\Delta}$ 是观测值向量的真误差；$\boldsymbol{V}$ 是观测值 $\boldsymbol{L}$ 的余差。本文仅讨论单位权情况。

令 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，称 $\boldsymbol{J}$ 为平差因子阵[6]，它是投影矩阵。$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}$（幂等），$\boldsymbol{JA}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{J}$ 的秩为 m。它的正交补投影记为 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}$（$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位阵），$\boldsymbol{R}$ 亦幂等，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{RA}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{R}$ 的秩为 $n-m$。

因 $\boldsymbol{JAX}_0=\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\Delta})$，有

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J})\boldsymbol{\Delta} = -(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J})\boldsymbol{L}$$

或

$$\underset{nn}{\overset{n-m}{\boldsymbol{R}}}\boldsymbol{\Delta} = -\boldsymbol{RL} \tag{2}$$

这是关于真误差 $\boldsymbol{\Delta}$ 和观测值 $\boldsymbol{L}$ 的确定关系式，也可看成关于 $\boldsymbol{\Delta}$ 的线性方程组。方程组（2）是秩亏的，秩亏数 $d=n-(n-m)=m$，从数学上讲，解这类秩亏方程组并不困难。但从客观实际的角度，应当强调所采用的解法要有明确合理的物理意义。

三、粗差的拟准检定法

大量观测数据的统计分析表明，粗差在数据中出现是少数。一般情况，含粗差的观测数占总数据量的 1% ~ 10%[4]，大部分观测数据是正常的。我们把基本正常但尚待确认的观测称为拟准观测。显然，相应的真误差数值相对较小是辨识拟准观测的必要条件。

设选择了 r 个拟准观测，$r>d=m$，相应的真误差为 $\boldsymbol{\Delta}_r$，非拟准观测的真误差为 $\boldsymbol{\Delta}_1$。在如下条件下，求解秩亏方程（2）。

$$\|\boldsymbol{\Delta}_r\|^2 = \boldsymbol{\Delta}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_r = \min \tag{3}$$

为了说明求解由式（2）和式（3）组成的联合方程组的意

义，先讨论一般情况，即在式（2）基础上，附加适当要求的条件，得到如下方程组

$$\begin{cases} \underset{nn}{\overset{n\ m}{R}}\Delta = -RL + \varepsilon & (4a) \\ \underset{mn}{\overset{m}{G}}\Delta = w & (4b) \end{cases}$$

式中，$\varepsilon = R\Delta + RL = R(\Delta + L)$ 是拟合残差，G 是系数阵；w 是 m 维常数向量。

式（4b）是 Δ 需要满足的 m 个独立条件，假设 R 和 G 的行向量是线性无关的。

构造拉格朗日函数，并求条件极值，得到法方程

$$\begin{bmatrix} R & G^{\mathrm{T}} \\ G & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\Delta} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -RL \\ w \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中，$\hat{\Delta}$ 和 $\hat{k}$ 分别是真误差 Δ 和拉格朗日参数向量 k 的估值。

利用本文附录推导的结果，解得

$$\begin{bmatrix} \hat{\Delta} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & G^{\mathrm{T}} \\ G & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -RL \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & A(GA)^{-1} \\ (A^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -RL \\ w \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中，

$$M = (R + G^{\mathrm{T}}G)^{-1} - A(A^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}GA)^{-1}A^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

展开式（6）得

$$\hat{\Delta} = -MRL + A(GA)^{-1}w = -(R + G^{\mathrm{T}}G)^{-1}RL + A(GA)^{-1}w \tag{8}$$

$\hat{\Delta}$ 的权逆阵（或称协因数阵）为

$$Q_{\hat{\Delta}} = (R + G^{\mathrm{T}}G)^{-1}R(R + G^{\mathrm{T}}G)^{-1} \tag{9}$$

由附录中式（A.6），$RMR = R$，有

$$\varepsilon = R\hat{\Delta} + RL = -RL + RL = 0$$

显然，$\hat{\Delta}$ 满足方程（2）。

现在讨论两种特殊情况：