电视大学

匡萃心 丁竹君 编

高等数学期末考试题解答和评注

1979 — 1985

海 洋 出 版 社

电 视 大 学

高等数学期末考试题
解答和评注

1979—1985

匡萃心　丁竹君　编

海 洋 出 版 社

1986年 • 北京

内容简介

本书内容分两部分：第一部分是电视大学历届高等数学期末考试试题及补考试题；第二部分是试题的详尽解答和各种典型题的评注。

本书可供电视大学、职工大学、夜大学的学员以及自学“高等数学”的读者使用，也可供电视大学辅导教师以及理工科院校的教师和学生参考。

责任编辑：盖广生 张 侠
责任校对：刘兴昌

电视大学高等数学期末考试题
解答和评注
1979—1985
匡萃心 丁竹君 编

海 洋 出 版 社 出 版（北京市复兴门外大街1号）
新华书店北京发行所发行 人民卫生出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32开 印张：8¼ 字数：180千字
1986年10月第一版 1986年10月第一次印刷
印数： 10,800

统一书号：7193·0830 定价：1.50元

前　言

本书收集了中央广播电视大学七九、八〇、八二、八四级高等数学期末统考试题和补考试题，并逐题作了较详细的解答。对于重点考题的解题思路、计算方法以及学生容易出现错误的地方加了评注。

本书按照电大高等数学的教学要求，着重于帮助学生弄清概念、开阔思路，培养分析问题和解决问题的能力。特别是对于自学“高等数学”的读者，本书将有助于提高自学能力，准确地掌握解题的基本方法。

本书主要供电视大学、职工大学、夜大学学生以及广大自学者使用，也可供电视大学专、兼职辅导教师，以及理工科院校师生参考。

本书中七九级、八〇级试题解答及评注部分由丁竹君同志执笔，八二级、八四级试题解答及评注部分由匡萃心同志执笔。

由于水平有限，时间仓促，书中不妥和错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

1985年12月

目　录

第一部分　历届考试及补考试题

第二部分　试题解答及评注

第一部分
历届考试及补考试题

七九级第一学期高等数学

期末考试试题

一、求导数〔12 分〕

(1) 设 $y=x\ln x$，求y'；

(2) 已知参数方程 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ 求 y'_x.

二、证明 $y=(\arcsin x)^2$ 满足方程 $(1-x^2)y''-xy'=2$.〔6 分〕

三、求下列极限〔18 分〕

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+10}{2n^2-1}$， (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$.

四、求下列不定积分〔34 分〕

(1) $\displaystyle\int\frac{1+x}{\sqrt{x}}dx$； (2) $\displaystyle\int\sin x\cos x\,dx$；

(3) $\displaystyle\int\ln(1+x)dx$； (4) $\displaystyle\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$；

(5) $\displaystyle\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx$.

五、用微分作图法，描绘函数 $y=1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}$的图形.〔18 分〕

六、有甲、乙两厂，甲厂位于一直线形河岸的岸边，乙厂离河岸 40 公里，乙厂到岸的垂足与甲厂相距 50 公里. 两厂

要在此岸边合设一供水站. 从供水站到甲厂和到乙厂的水管费分别是每公里 $3a$ 元和 $5a$ 元. 问此供水站应设在岸边的何处,才能使水管费用最省?(其中 a 为常数,且甲乙两厂在河的同侧)〔12 分〕

七九级第一学期高等数学
期末补考试题

一、求下列函数的极限〔18 分〕

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+5x^2}{x^4-10x^2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

二、求下列函数的导数或微分〔18 分〕

(1) $s=\sin(\omega t+\varphi)$　(ω,φ 为常量), 求 $\dfrac{ds}{dt}$;

(2) $y=\ln\cos x$,求 y',y'';　　(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$,求 dy.

三、求下列不定积分〔24 分〕

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{x}dx$;　　(2) $\displaystyle\int(x+1)e^x dx$;

(3) $\displaystyle\int\sin^2 3x\cos 3x dx$;　　(4) $\displaystyle\int\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 dx$.

四、〔12 分〕

(1) 求由方程 $xy+\ln y=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 y';

(2) 求由上面方程 ($xy+\ln y=1$) 所表示的曲线在点 $M(1,1)$ 处的切线方程.

五、用微分作图法描绘函数 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 的图形.〔17 分〕

六、今要盖一底面积为长方形的仓库,所备材料只能垒一条长 20 米的围墙,为使仓库的底面积尽量大些,仓库的一面墙借用其他墙壁,问仓库的长和宽各应为多少才能使仓库的底面积最大?〔11 分〕

七九级第二学期高等数学
期末考试试题

一、计算〔27 分〕

(1) 设 $z=\sqrt{x}\sin(x+y)$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 设 $u=\mathrm{arctg}\,xy$, $x=s+2t$, $y=3s-t$,求 u'_s, u'_t;

(3) 设 $u=f(xy,x^2+y^2)$,求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

二、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-2xz+x^2+y^2=1$ 确定,求曲面在点 (1,1,1) 处的切平面方程.〔11 分〕

三、计算〔20 分〕

(1) $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 为 $y=x$, $x=0$, $y=1$ 围成的三角形区域;

(2) $\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Ω 为球形区域 x^2+y^2+

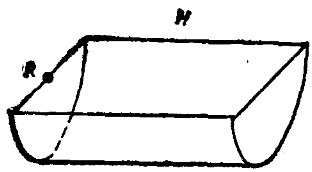
$x^2 \leqslant 1$.

四、利用格林公式计算曲线积分 $\oint_C 2x^2y\,dx + x(x^2+y^2)\,dy$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，取反时针方向.〔10 分〕

五、设锥面壳 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 具有变密度 $\mu(x,y,z)=z$，试求其质量.〔10 分〕

六、设有平面力场 $\boldsymbol{F}=(x^2-2xy)\boldsymbol{i}+(y^2-2xy)\boldsymbol{j}$. 求一质点在此场中沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $(-1,1)$ 移到点 $(1,1)$ 所作的功.〔10 分〕

七、有一槽形容器，底是半圆柱形，其长为 H，截面是半径为 R 的半圆，横放在水平地面上，其表面积为 S_0，试用拉格朗日乘数法求出 R 与 H 的值，使得此容器的容积最大.〔12 分〕



七九级第二学期高等数学期末补考试题

一、〔16 分〕

(1) 设 $f(x,y)=e^{-x}\sin(x+2y)$，求 $f'_x\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$f'_y\left(0,\right.$

$\left.\frac{\pi}{4}\right)$;

(2) 设 $\theta=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$，求 $\frac{\partial\theta}{\partial x},\frac{\partial\theta}{\partial y}$。

二、设 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$，其中 φ,ψ 为可微函数，证明 $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$. 〔10 分〕

三、〔22 分〕

(1) 计算二重积分 $\iint\limits_D x^3y\,dx\,dy$，$D$ 为抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x$ 围成的区域.

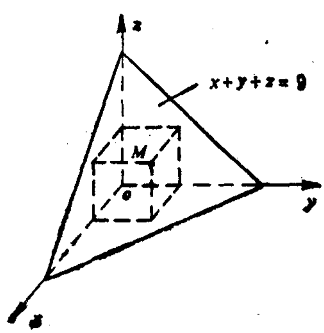
(2) 试用柱面坐标计算积分 $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dV$，其中 Ω 为抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 与 xoy 平面围成的区域.

四、证明曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,2)}3x(x+2y)dx+(3x^2-y^3)dy$ 与积分路径无关，并求其值. 〔13 分〕

五、计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma\frac{z^2}{a^2}dS$，其中曲面 Σ 为上半球面：$x^2+y^2+z^2=a^2,z\geqslant0$. 〔13 分〕

六、求球面 $x^2+y^2+z^2=169$ 在点 $M_0(3,4,12)$ 处的切平面和法线方程. 〔13 分〕

七、一个长方体的三面在坐标面上，与原点相对的顶点 M 在平面 $x+y+z=9$ 上，求这长方体的最大体积. 〔13 分〕



八〇级第一学期高等数学

期末考试试题

一、求下列函数极限〔12 分〕

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$。

二、求下列函数的导数或微分 〔18 分〕

(1) $y=(x\sqrt{x}+5)e^{-x}$，求y'；

(2) $y=\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$，求 dy；

(3) $x^4+y^4-2x^2y^2=5$，求 y'.

三、填空（将结果填在括号内，不写过程）〔20 分〕

(1) $\ln(1+x)$ 的泰勒公式是：$\ln(1+x)=($ $\quad$ $)+o(x^2)$；

(2) 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 在点 $M(\frac{p}{2},p)$ 处的切线方程是（ ）；

(3) $y=x+e^{-x}$ 的渐近线方程是（ ）；

(4) 当$x=\pm 1$时，函数$y=x^3+3px+q$ 达到极值，那么，$p=($ $)$.

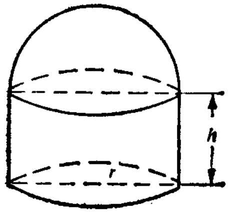
四、计算下列积分 〔24 分〕

(1) $\displaystyle\int\frac{2x^2+\sqrt{x}}{x}dx$； (2) $\displaystyle\int\sin^2 2x\cos 2x\,dx$；

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$； (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+9}$.

五、用微分学方法作函数$y=1+\dfrac{2-2x}{x+1}$的图形.〔16 分〕

六、有一密闭容器，下端为直圆柱形，上部是半球形. 设此容器的容积等于V（常数），问直圆柱形的底半径r与高h为何值时，该容器表面积最小？（球面积$=4\pi r^2$）〔10 分〕



八〇级第一学期高等数学

期末补考试题

一、求极限 〔18 分〕

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+4x}-3}{x-2}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{2-\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}}{1-\cos^2x}$.

二、填空（不写过程，把结果填在括号内）〔16 分〕

(1) 若 $f(x)=x^2+2$，则有 $f(2^x)=($　　$)$；$[f(2^x)]'_x=$ (　　).

(2) $\sqrt{1+x}=($　　$)+o(x)$；

(3) 椭圆$\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$处的切线方程是(　　).

三、〔14 分〕

(1) 证明函数 $y=e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足方程 $y''=xy'+y$;

(2) 求由方程 $x^2+xy-y^2=1$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的一、二阶导数.

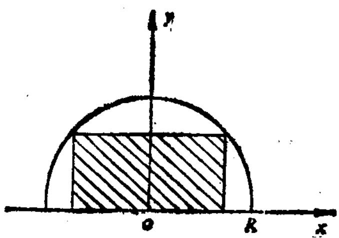
四、求下列积分 〔24 分〕

(1) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$;　　(2) $\int_0^1 xe^{-x}dx$;

(3) $\int_0^\pi \sin^3\frac{x}{2}dx$;　　(4) $\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

五、用微分学方法作函数 $y=\frac{x}{4-x^2}$ 的图形. 〔16 分〕

六、在半径为 R 的半圆内嵌入矩形，问矩形的长、宽为何值时面积最大？〔12 分〕



八〇级第二学期高等数学
期末考试试题

一、求过点 $M(1,2,1)$ 平行于直线 $\begin{cases}x-5y+2z=1\\ z=2+5y\end{cases}$ 的

直线标准方程.〔10 分〕

二、求下列多元函数的偏导数〔20 分〕

(1) $u=\cos x\sin y$,求$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial u}{\partial y}$,$\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$.

(2) $u=f(ax+by,cx^2+dy^2)$,a,b,c,d 为已知常数,求$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial u}{\partial y}$.

三、〔26 分〕

(1) 求微分方程 $y'\operatorname{tg}x-y\ln y=0$ 的通解.

(2) 求微分方程 $(1+x)\mathrm{d}y+(y+x^2+x^3)\mathrm{d}x=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

(3) 求解线性微分方程 $y''+4y=\frac{1}{2}\cos 3x$.

四、将函数 $f(x)=e^x(x+1)$ 在点$x=0$ 处展开成泰勒级数(即展成 x 的幂级数),并指出收敛区间.〔10 分〕

五、〔24 分〕

(1) 计算曲线积分$\int_L(1-x^2)y\mathrm{d}x+x(1+y^2)\mathrm{d}y$,其中$L$是沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 逆时针方向;

(2) 计算二重积分$\iint\limits_D e^y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$为 $y=\ln x$ 与 x 轴以及直线 $x=2$ 围成的平面区域;

(3) 计算三重积分$\iiint\limits_V(x^2+y^2)^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$V$是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的空间区域.

六、〔10 分〕(任选一题,若两题都做选其一给分)

(1) 求由抛物面 $z=\frac{H}{R^2}(x^2+y^2)$与平面 $z=H$ 所围成