高等学校教材



# 概率论与数理统计教程

（第三版）

沈恒范

高等教育出版社

# 概率论与数理统计教程

（第三版）

沈恒范

高等教育出版社

(京)112号

本书是《概率论讲义》(第二版)的修订本，这次修订主要是参照高等学校工科数学课程教学指导委员会于1993年审订的《概率论与数理统计课程教学基本要求》进行的，它既适用于基本要求中概率多统计少，又适用于概率少统计多两种类型，因而对高等工科院校各专业都能适用.

本书分十章叙述，内容是：随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析.

本书叙述详细，结构合理，行文流畅，例题较多，书末还附有习题答案，便于教学.本书还可供职工大学、函授大学及工程技术人员阅读.

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计教程/沈恒范编著. —3版. —北京：高等教育出版社，1995
ISBN 7-04-005172-9

I. 概… II. 沈… III. ①概率论-教材②数理统计-教材 IV.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第00983号

高等教育出版社出版
新华书店总店北京发行所发行
文字六〇三厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 11 字数 280 000
1966年4月第1版
1995年5月第3版 1995年5月第1次印刷
印数0001— 17112
定价 7.00 元

# 第三版序言

本书是《概率论讲义》(第二版)的修订本,并从这一版起,把书名改为《概率论与数理统计教程》.

这次修订主要是参照高等学校工科数学课程教学指导委员会于 1993 年审订的《概率论与数理统计课程教学基本要求》(以下简称《本课程教学基本要求》)进行的. 根据不同专业的需要,《本课程教学基本要求》分为两种类型: I 类侧重于概率论,II 类侧重于数理统计.本书叙述了上述两种类型教学基本要求的所有内容;此外,还有少量超出《本课程教学基本要求》的内容,分别用 * 号表出,仅供读者参考.

本书讲述数理统计中有关统计量的计算时,强调利用具有统计计算功能的袖珍电子计算器进行计算;为此,尽可能把各种统计量化为便于用电子计算器计算的形式,这样就避免了繁琐的列表计算,节省了计算的工作量. 当然,具备一定条件的高等工科院校若能选用或研制适合本课程内容的数理统计计算软件,进行计算机辅助教学,开设数理统计实验课,安排学生利用计算机解题,则本课程的教学手段就更趋于现代化了.

讲授本书全部内容(不包括带 * 号的部分)约需 64 学时.注意到《本课程教学基本要求》两种类型的参考学时都不超过 52 学时,所以使用本书作为教材时应按照 I 类或 II 类教学基本要求适当选讲所需要的内容.

本书编写过程中,得到湖北汽车工业学院数学教研室全体同志的支持与协助,徐希贤副教授、米清河副教授、张传慰、黄明等同志为本书的初稿提供了不少有益的建议. 本书由高等学校工科数学课程教学指导委员会审阅,王明慈教授(主审)、富景隆教授、孙

家永教授等委员提出了若干宝贵的意见。上述所有建议和意见对提高本书的科学性和教学适用性都起了重要的作用，编者谨致以诚挚的谢意。

限于编者的水平，本书难免还存在某些缺点和错误，诚恳希望读者批评指正。

沈恒范

1993年12月

# 第二版序言

本书第一版自1966年出版以来，曾被很多高等学校选用为教材或教学参考书．这次修订主要是根据各校在教学过程中提出的意见，并参照高等学校工科数学教材编审委员会1980年审订的《工程数学教学大纲(草案)》有关概率论部分进行了修改和补充。

考虑到某些专业设置《概率论与数理统计》课程的需要，适当增加了数理统计的基本内容，把第一版的最后一章补充改写成现在的第六、七、八、九各章．对其余章节也作了必要的修订，同时对第一版中某些习题答案和印刷错误进行了校正。

本书编写和修订过程中，得到吉林工业大学数学教研室全体同志的支持和帮助，罗舜英同志参加了修订工作，黄耀宏、刘承胤、赵忠柏等同志对修订稿提出了不少有益的意见，编者谨致以诚挚的谢意。

限于编者的水平，本书一定还存在不少缺点和错误，希望读者批评指正。

沈恒范

1982年4月

# 目　　录


**第一章　随机事件及其概率** ········ 1

§1.1　随机事件及其频率·概率的统计定义 ········ 1

§1.2　样本空间 ········ 5

§1.3　事件的关系及运算 ········ 7

§1.4　概率的古典定义 ········ 12

§1.5　概率加法定理 ········ 17

§1.6　条件概率·概率乘法定理 ········ 20

§1.7　全概率公式与贝叶斯公式 ········ 24

§1.8　随机事件的独立性 ········ 28

§1.9　独立试验序列 ········ 34

§1.10　概率论的公理化体系 ········ 37

习题一 ········ 41

**第二章　随机变量及其分布** ········ 46

§2.1　随机变量的概念 ········ 46

§2.2　离散随机变量 ········ 48

§2.3　超几何分布·二项分布·泊松分布 ········ 51

§2.4　连续随机变量 ········ 60

§2.5　随机变量的分布函数 ········ 64

§2.6　连续随机变量的概率密度 ········ 69

§2.7　均匀分布·指数分布·正态分布 ········ 73

§2.8　随机变量函数的分布 ········ 79

习题二 ········ 86

**第三章　随机变量的数字特征** ········ 90

§3.1　数学期望 ········ 90

§3.2　随机变量函数的数学期望·关于数学期望的定理 ········ 94

§3.3　方差与标准差 ········ 9,

§ 3.4　某些常用分布的数学期望及方差………………………………… 102
§ 3.5　原点矩与中心矩………………………………………………… 109
习题三 ………………………………………………………………… 111
**第四章　多维随机变量**……………………………………………… 114
§ 4.1　二维随机变量的分布…………………………………………… 114
§ 4.2　边缘分布………………………………………………………… 119
§ 4.3　条件分布………………………………………………………… 121
§ 4.4　随机变量的独立性……………………………………………… 124
§ 4.5　二维随机变量的数字特征……………………………………… 126
§ 4.6　随机变量函数的数学期望·关于数字特征的定理…………… 129
§ 4.7　相关系数………………………………………………………… 132
§ 4.8　二维正态分布…………………………………………………… 136
§ 4.9　二维随机变量函数的分布……………………………………… 139
习题四 ………………………………………………………………… 150
**第五章　大数定律与中心极限定理**………………………………… 154
§ 5.1　切比雪夫不等式………………………………………………… 154
§ 5.2　切比雪夫定理…………………………………………………… 156
§ 5.3　伯努利定理……………………………………………………… 159
§ 5.4　中心极限定理…………………………………………………… 161
习题五 ………………………………………………………………… 167
**第六章　数理统计的基本知识**……………………………………… 170
§ 6.1　总体与样本……………………………………………………… 170
§ 6.2　统计量…………………………………………………………… 173
§ 6.3　数理统计中的某些常用分布…………………………………… 179
§ 6.4　正态总体统计量的分布………………………………………… 185
习题六 ………………………………………………………………… 192
**第七章　参数估计**…………………………………………………… 195
§ 7.1　参数的点估计…………………………………………………… 195
§ 7.2　正态总体参数的区间估计……………………………………… 202
§ 7.3　两个正态总体均值差与方差比的区间估计…………………… 210
*§ 7.4　非正态总体参数的区间估计…………………………………… 217

习题七 …………………………………………………………… 221
**第八章 假设检验**……………………………………………… 225
§8.1 假设检验的基本概念…………………………………… 225
§8.2 正态总体参数的假设检验……………………………… 231
*§8.3 非正态总体参数的假设检验…………………………… 239
§8.4 分布律的假设检验……………………………………… 241
习题八 …………………………………………………………… 246
**第九章 方差分析**……………………………………………… 250
§9.1 单因素试验的方差分析………………………………… 250
§9.2 双因素无重复试验的方差分析………………………… 257
§9.3 双因素等重复试验的方差分析………………………… 265
习题九 …………………………………………………………… 271
**第十章 回归分析**……………………………………………… 276
§10.1 回归分析的基本概念及最小二乘法 ………………… 276
§10.2 线性回归方程 ………………………………………… 279
§10.3 线性相关的显著性检验 ……………………………… 282
§10.4 利用线性回归方程预测和控制 ……………………… 289
§10.5 非线性回归分析 ……………………………………… 291
§10.6 多元线性回归分析 …………………………………… 298
习题十 …………………………………………………………… 304
**习题答案** ……………………………………………………… 308
**附录**…………………………………………………………… 331

# 第一章　随机事件及其概率

## §1.1　随机事件及其频率·概率的统计定义

概率论是研究随机现象（偶然现象）的规律性的科学．

人们在自己的实践活动中，常常会遇到随机现象．例如，远距离射击较小的目标，可能击中，也可能击不中，每一次射击的结果是随机（偶然）的．自动车床加工出来的机械零件，可能是合格品，也可能是废品．进行实验时，把得到的实验数据在坐标图纸上用点表示出来，我们可以看到，这些点（假设它们足够多）通常不是位于一条曲线上，而是散布在某一带形区域内，这就是所谓实验点的随机散布．

在事物的联系和发展过程中，随机现象是客观存在的．但是，在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性又始终是受事物内部隐藏着的必然性所支配的．

现实世界上事物的联系是非常复杂的，一切事物的发展过程中既包含着必然性的方面，也包含着偶然性的方面，它们是互相对立而又互相联系的，必然性经常通过无数的偶然性表现出来．

科学的任务就在于，要从看起来是错综复杂的偶然性中揭露出潜在的必然性，即事物的客观规律性．这种客观规律性是在大量现象中发现的．

在科学研究或工程技术中，我们会经常遇到，在不变的条件下重复地进行多次实验或观测．抽去这些实验或观测的具体性质，就得到概率论中试验的概念．所谓试验就是一定的综合条件的实现，我们假定这种综合条件可以任意多次地重复实现．大量现象就是很多次试验的结果．

当一定的综合条件实现时，也就是在试验的结果中，所发生的

现象叫做事件．如果在每次试验的结果中，某事件一定发生，则这一事件叫做必然事件；相反地，如果某事件一定不发生，则叫做不可能事件．

在试验的结果中，可能发生，也可能不发生的事件，叫做随机事件（偶然事件）．例如，任意抛掷硬币时，徽花向上是随机事件；远距离射击时，击中目标是随机事件；自动车床加工机械零件时，加工出来的零件为合格品是随机事件；等等．

通常我们用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示随机事件，而用字母 $U$ 表示必然事件，$V$ 表示不可能事件．

**例** 已知一批产品共 100 个，其中有 95 个合格品和 5 个次品．检查产品质量时，从这批产品中任意抽取 10 个来检查，则在抽出的 10 个产品中，"次品数不多于 5 个"这一事件是必然事件 $U$；"次品数多于 5 个"这一事件是不可能事件 $V$；而事件 $A$："没有次品"；$B$："恰有 1 个次品"；$C$："有 2 个或 3 个次品"；$D$："次品数少于 4 个"等等都是随机事件．

用数字表示大量现象中的规律性时，联系到下面的概念．

设随机事件 $A$ 在 $n$ 次试验中发生了 $m$ 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 叫做随机事件 $A$ 的相对频率（简称频率），记作 $W(A)$；用公式表示如下：

$$W(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

显然，任何随机事件的频率是介于 0 与 1 之间的一个数：

$$0 \leqslant W(A) \leqslant 1. \tag{1.2}$$

对于必然事件，在任何试验序列中，我们有 $m=n$，所以必然事件的频率恒等于 1：

$$W(U)=1. \tag{1.3}$$

对于不可能事件，我们有 $m=0$，所以不可能事件的频率恒等于 0：

$$W(V)=0. \tag{1.4}$$

经验证明，当试验重复多次时，随机事件$A$的频率具有一定的稳定性；就是说，在不同的试验序列中，当试验次数充分大时，随机事件$A$的频率常在一个确定的数字附近摆动。

例如，我们来看下面的实验结果，表中$n$表示抛掷硬币的次数，$m$表示徽花向上的次数，$W=\frac{m}{n}$表示徽花向上的频率。

| 实验序号 | $n=5$ | | $n=50$ | | $n=500$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $m$ | $W$ | $m$ | $W$ | $m$ | $W$ |
| 1 | 2 | 0.4 | 22 | 0.44 | 251 | 0.502 |
| 2 | 3 | 0.6 | 25 | 0.50 | 249 | 0.498 |
| 3 | 1 | 0.2 | 21 | 0.42 | 256 | 0.512 |
| 4 | 5 | 1.0 | 25 | 0.50 | 253 | 0.506 |
| 5 | 1 | 0.2 | 24 | 0.48 | 251 | 0.502 |
| 6 | 2 | 0.4 | 21 | 0.42 | 246 | 0.492 |
| 7 | 4 | 0.8 | 18 | 0.36 | 244 | 0.488 |
| 8 | 2 | 0.4 | 24 | 0.48 | 258 | 0.516 |
| 9 | 3 | 0.6 | 27 | 0.54 | 262 | 0.524 |
| 10 | 3 | 0.6 | 31 | 0.62 | 247 | 0.494 |

从上表我们可以看出，当抛掷硬币的次数较少时，徽花向上的频率是不稳定的；但是，随着抛掷硬币次数的增多，频率越来越明显地呈现出稳定性。如上表最后一列所示，我们可以说，当抛掷硬币的次数充分多时，徽花向上的频率大致是在0.5这个数的附近摆动。

类似的例子可以举出很多。这说明随机事件在大量重复试验中存在着某种客观规律性——频率的稳定性。因为它是通过大量统计显示出来的，所以称为统计规律性。

**由随机事件的频率的稳定性可以看出，随机事件发生的可能性可以用一个数来表示。这个刻划随机事件$A$在试验中发生的可能性大小的、介于0与1之间的数叫做随机事件$A$的概率**，记作

$P(A)$. 概率的这个定义通常称为概率的统计定义.

当试验次数充分大时,随机事件 $A$ 的频率 $W(A)$ 正是在它的概率 $P(A)$ 的附近摆动. 在上面的例子中,我们可以认为徽花向上的概率等于 0.5.

直接估计某一事件的概率是非常困难的,甚至是不可能的,仅在比较特殊的情况下才可以计算随机事件的概率. 概率的统计定义实际上给出了一个近似计算随机事件的概率的方法: 我们把多次重复试验中随机事件 $A$ 的频率 $W(A)$ 作为随机事件 $A$ 的概率 $P(A)$ 的近似值,即当试验次数 $n$ 充分大时,

$$P(A) \approx W(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.5}$$

因为必然事件的频率恒等于1,所以**必然事件的概率等于一**:

$$P(U) = 1. \tag{1.6}$$

又因为不可能事件的频率恒等于 0, 所以**不可能事件的概率等于零**:

$$P(V) = 0. \tag{1.7}$$

这样,任何事件 $A$ 的概率满足不等式

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \tag{1.8}$$

应该指出,随机事件的频率是与我们已进行的试验有关的,而随机事件的概率却是完全客观地存在着的. 在实际进行的试验中, 随机事件的频率可以看作是它的概率的随机表现. 随机事件的概率表明, 试验中综合条件与随机事件之间有完全确定的特殊的联系,它从数量上说明了必然性与偶然性的辩证的统一.

还应指出, 随机事件的概率反映了大量现象中的某种客观属性, 这种客观属性是与我们认识主体无关的. 不应该把概率看作认识主体对于个别现象的信念程度. 有时一个人说某事件"可能发生"或"很少可能发生",这仅表示说话的人对该事件发生的可能性的一个判断而已. 因为个别现象不是发生,就是不发生,所以就个别现象来谈概率是没有任何现实意义的.

## §1.2 样本空间

为了深入理解随机事件，我们来叙述试验的样本点与样本空间的概念.

在不变的条件下重复地进行试验，虽然每次试验的结果中所有可能发生的事件是可以明确知道的，并且其中必有且仅有一个事件发生，但是在试验之前却无法预知究竟哪一个事件将在试验的结果中发生.

试验的结果中每一个可能发生的事件叫做试验的样本点，通常用字母 $\omega$ 表示.

试验的所有样本点 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots$ 构成的集合叫做样本空间,通常用字母 $\Omega$ 表示. 于是,我们有

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}.$$

**例 1** 设试验为任意抛掷一枚硬币,则有样本点:

$\omega_1$ 表示“徽花向上”,$\omega_2$ 表示“字向上”.

于是样本空间是由两个样本点构成的集合:

$$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}.$$

**例 2** 设试验为从装有三个白球(记为 1,2,3 号)与两个黑球(记为 4,5 号)的袋中任取两个球.

(1) 如果观察取出的两个球的颜色,则有样本点:

$\omega_{00}$ 表示“取出两个白球”,

$\omega_{11}$ 表示“取出两个黑球”,

$\omega_{01}$ 表示“取出一个白球与一个黑球”.

于是样本空间是由三个样本点构成的集合:

$$\Omega_2'=\{\omega_{00},\omega_{01},\omega_{11}\}.$$

(2) 如果观察取出的两个球的号码,则有样本点:

$\omega_{ij}$ 表示“取出第 $i$ 号与第 $j$ 号球”$(1\leqslant i<j\leqslant 5)$.

于是样本空间是由 $C_5^2=10$ 个样本点构成的集合:

$$\Omega_2''=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{23},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35},\omega_{45}\}.$$

这个例子表明，试验的样本点与样本空间是根据试验的内容而确定的。

**例 3** 设试验为观察放射性物质在一段时间内放射的粒子数，则有样本点：

$$\omega_i \text{ 表示“放射 } i \text{ 个粒子”} \quad (i = 0,1,2,\cdots).$$

于是样本空间是由可数无穷多个样本点构成的集合

$$\Omega_3 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}.$$

**例 4** 设试验为测量车床加工的零件的直径，则有样本点：

$$\omega_x \text{ 表示“测得零件的直径为 } x \text{ 毫米”} (a \leqslant x \leqslant b).$$

于是样本空间是由不可数无穷多个样本点构成的集合

$$\Omega_4 = \{\omega_x | a \leqslant x \leqslant b\}.$$

现在我们说明随机事件与样本空间的关系。

在例 2 中，设随机事件 $A$ 表示“取出的两个球都是白球”，则对于样本空间 $\Omega_2'$ 来说，我们有

$$A = \{\omega_{00}\};$$

而对于样本空间 $\Omega_2''$ 来说，我们有

$$A = \{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}.$$

这表明随机事件 $A$ 是样本空间 $\Omega_2'$ 或 $\Omega_2''$ 的一个子集。

在例 3 中，设随机事件 $B$ 表示“放射性物质在一段时间内放射的粒子数不超过 10 个”，则我们有

$$B = \{\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{10}\}.$$

这表明随机事件 $B$ 是样本空间 $\Omega_3$ 的一个子集。

由此可见，**任一随机事件 $A$ 都是样本空间 $\Omega$ 的一个子集，该子集中任一样本点 $\omega$ 发生时事件 $A$ 即发生。**

因为样本空间 $\Omega$ 中任一样本点 $\omega$ 发生时，必然事件 $U$ 都发生，所以 $U$ 是所有样本点构成的集合；这就是说，**必然事件 $U$ 就是样本空间 $\Omega$。**

因为样本空间 $\Omega$ 中任一样本点 $\omega$ 发生时，不可能事件 $V$ 都不发生，所以 $V$ 不是任何样本点的集合；这就是说，**不可能事件 $V$ 是**

**空集**.

应该指出,试验的任一样本点 $\omega$ 也是随机事件,今后我们将称试验的样本点为试验的基本事件. 显然,**基本事件就是样本空间 $\Omega$ 的仅由单个样本点构成的子集**.

## §1.3 事件的关系及运算

为了研究随机事件及其概率,我们需要说明事件之间的各种关系及运算.

正如§1.2 中已经指出的,任一随机事件都是样本空间的一个子集,所以事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算是完全类似的. 在下面的讨论中,我们叙述事件的关系及运算时所用的符号也是与集合的关系及运算的符号基本上一致的.

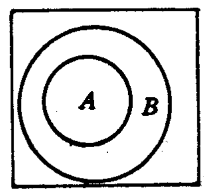


图 1

(1) 如果事件 $A$ 的发生必然导致事件 $B$ 的发生,则称事件 $B$ 包含事件 $A$,或称事件 $A$ 包含于事件 $B$,记作

$$B \supset A \text{ 或 } A \subset B.$$

例如,在图 1 中,设事件 $A$ 表示点随机地落在小圆内,事件 $B$ 表示点随机地落在大圆内,则我们有 $A \subset B$.

(2) 如果事件 $B$ 包含事件 $A$,且事件 $A$ 包含事件 $B$,即

$$B \supset A \text{ 且 } A \supset B;$$

也就是说,二事件 $A$ 与 $B$ 中任一事件的发生必然导致另一事件的发生,则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等,记作

$$A = B.$$

(3) "二事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一事件发生"这一事件叫做事件 $A$ 与事件 $B$ 的和,记作

$$A \cup B.$$

例如,在图 2 中,设试验是让点随机地落在矩形区域内,事件

$A$表示点落在左边的圆内(图 2($a$))、事件$B$表示点落在右边的圆内(图 2($b$)),则事件$A\cup B$表示点落在任一圆内(图 2($c$))。

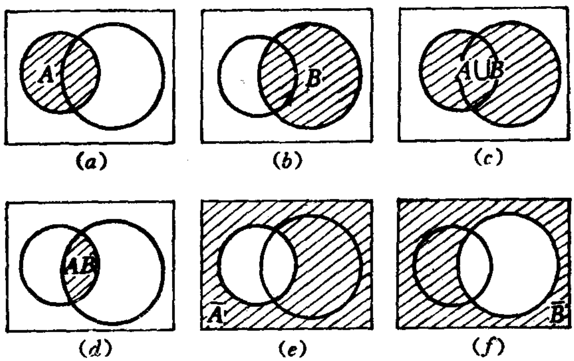


图 2

"$n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一事件发生"这一事件叫做事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记作

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\left(\text{简记为 }\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right).$$

(4) "二事件$A$与$B$都发生"这一事件叫做事件$A$与事件$B$的积,记作

$$A\cap B\quad\text{或}\quad AB.$$

例如,在图 2 中,事件$A\cap B$就表示随机点落在二圆的公共部分内(图 2($d$))。

"$n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生"这一事件叫做事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积,记作

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\ \text{或}\ A_1A_2\cdots A_n\left(\text{简记为}\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right).$$

(5) 如果二事件$A$与$B$不可能同时发生,即

$$AB=V,$$

则称二事件$A$与$B$是互不相容的(或互斥的)。