

# 数学物理方法

周学圣 张九思

山东科学技术出版社

# 数学物理方法

周学圣 

山东科学技术出版社

鲁新登字-05号

## 数学物理方法

周学圣 张九思

\*

山东科学技术出版社出版

(济南市玉函路 邮政编码250002)

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

\*

787×1092毫米32开本 11.875印张 250千字

1993年11月第1版 1993年11月第1次印刷

印数:1—1000

ISBN 7—5331—1303—9

O·54 定价 6.50元

## 前 言

这本教材是在作者授课讲义的基础上,经多次修改而成的。教材特别注意数学理论与物理概念的结合。凡属重要的概念、方法或公式,均从数学原理、物理意义、量纲分析、解题思路等各个侧面进行了分析讨论。对容易疏忽、误解以致产生错误的地方,均作了分析以引起注意。为了加深对基本概念和方法的理解,扩大知识面,凡对各章节内容融会贯通而需要引伸的地方,有的安排在习题中,有的作为思考题而提出问题。

本书作为山东工业大学的教材使用多次,北方交通大学、沈阳机电学院、济南大学也曾作为研究生、本科生教材使用过,并提出一些修改意见。北方交通大学凌德筠教授、西安交通大学张自力教授、北京邮电学院童勤模教授、沈阳机电学院卢鹤初教授都曾详细审阅了部分原稿,提了许多宝贵意见,谨向他们深表谢意。

山东大学欧阳亮教授、山东工业大学王济诚教授详细地审阅了本书,提出了许多宝贵意见,向他们表示深切的谢意。

本书以解题方法为主,并注意到系统的完整性,基本常用的内容和方法比较丰富,也可作为工程技术人员、理工科大学有关教师、学生的参考书。教材一至四章由周学圣编写,五至七章,附录 I、II、III,全书的习题及解答由张九思编写。

本教材按60~70学时编写。

编 者

1993年6月

# 目 录

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| <b>第一章 概论</b> .....             | 1   |
| 第一节 偏微分方程的基本概念 .....            | 1   |
| 第二节 三类基本方程的建立 .....             | 7   |
| 第三节 定解条件 .....                  | 18  |
| 第四节 定解问题 .....                  | 27  |
| 习题一 .....                       | 32  |
| <b>第二章 分离变量法</b> .....          | 34  |
| 第一节 有界弦的自由振动 .....              | 34  |
| 第二节 有界弦的强迫振动 $\delta$ 函数 .....  | 49  |
| 第三节 有界杆的热传导问题 .....             | 59  |
| 第四节 齐次化问题 冲量法 .....             | 71  |
| 第五节 Green函数法 .....              | 82  |
| 第六节 二维Laplace方程与Poisson方程 ..... | 85  |
| 第七节 特殊函数 .....                  | 96  |
| 第八节 特殊函数的应用 .....               | 121 |
| 习题二 .....                       | 135 |
| <b>第三章 积分变换法</b> .....          | 141 |
| 第一节 Fourier积分 .....             | 141 |
| 第二节 Fourier变换 .....             | 145 |
| 第三节 Fourier变换的应用 .....          | 157 |
| 第四节 重Fourier变换及其应用 .....        | 172 |
| 第五节 降维法 .....                   | 182 |
| 第六节 Fourier正余弦变换 .....          | 189 |

|               |                                             |            |
|---------------|---------------------------------------------|------------|
| 第七节           | Laplace 变换及其应用 .....                        | 200        |
| 习题三           | .....                                       | 217        |
| <b>第四章</b>    | <b>椭圆型方程的Green函数法 .....</b>                 | <b>223</b> |
| 第一节           | Green公式与调和函数.....                           | 223        |
| 第二节           | 边值问题的适定性 .....                              | 232        |
| 第三节           | 第一边值问题的Green函数解法.....                       | 238        |
| 习题四           | .....                                       | 251        |
| <b>第五章</b>    | <b>保角变换法 .....</b>                          | <b>253</b> |
| 第一节           | 解析函数的概念 .....                               | 253        |
| 第二节           | 保角变换的概念 .....                               | 263        |
| 第三节           | 某些常用的保角变换 .....                             | 266        |
| 习题五           | .....                                       | 283        |
| <b>第六章</b>    | <b>一阶线性偏微分方程组 .....</b>                     | <b>285</b> |
| 第一节           | 方程组的分类与化简 .....                             | 285        |
| 第二节           | 线性方程组定解问题的解法 .....                          | 293        |
| 习题六           | .....                                       | 307        |
| <b>第七章</b>    | <b><math>\delta</math>函数的数学基础 基本解 .....</b> | <b>310</b> |
| 第一节           | $\delta$ 函数的数学基础介绍.....                     | 310        |
| 第二节           | 利用 $\delta$ 函数研究基本解.....                    | 323        |
| 习题七           | .....                                       | 337        |
| <b>附录 I</b>   | <b>偏微分方程的一般概念 .....</b>                     | <b>339</b> |
| 第一节           | 基本概念与二阶线性偏微分方程的一般解法 .....                   | 339        |
| 第二节           | 二阶线性偏微分方程的化简与分类 .....                       | 344        |
| <b>附录 II</b>  | <b>积分变换表 .....</b>                          | <b>353</b> |
| 一             | Fourier变换表.....                             | 353        |
| 二             | Laplace变换表.....                             | 354        |
| <b>附录 III</b> | <b>基本解简表 .....</b>                          | <b>358</b> |
| 习题答案          | .....                                       | 361        |

# 第一章 概 论

本章在简要介绍偏微分方程基本概念的基础上，着重讨论建立方程的方法，并研究如何将实际问题化为数理方程的求解问题，即定解问题。

## 第一节 偏微分方程的基本概念

### 一、偏微分方程及其阶

我们已知，含有自变量、未知函数及其导数的方程叫常微分方程，方程中出现的最高阶导数的阶数叫方程的阶。类似地，偏微分方程及其阶的概念如下。

定义 含自变量、未知函数及其偏导数的方程叫偏微分方程，方程中出现的最高阶偏导数的阶数叫偏微分方程的阶。

应当注意，在方程中自变量和未知函数可以不明显出现，但偏导数一定要出现。例如，设 $u = u(x, y)$ 为二元函数，则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

依次为一阶、二阶、三阶偏微分方程。而一阶、二阶偏微分方程的一般形式为

$$F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$$F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

同样，可考虑三元函数或四元函数的偏微分方程。

## 二、线性方程与拟线性方程

与常微分方程类似，偏微分方程中可分线性方程和非线性方程。线性方程在实际问题中有广泛的应用。

**定义** 方程中关于未知函数及其偏导数来说是线性的，叫线性偏微分方程；否则，叫非线性偏微分方程。在非线性方程中，如果对未知函数的最高阶偏导数来说是线性的，则叫拟线性方程。

例如，对于二元函数  $u = u(x, y)$ ，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2u \text{——二阶线性方程}$$

其中函数  $a(x, y)$  为系数。而

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 \text{——一阶非线性方程}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0 \text{——二阶拟线性方程}$$

一般来说，对线性方程的研究比较容易，非线性方程较困难，拟线性方程比非线性方程要容易些。

## 三、齐次方程与非齐次方程

与常微分方程一样，偏微分方程中也有齐次方程和非齐次方程的区别。

**定义** 在线性方程中，不含未知函数与偏导数的项叫自由项，当自由项为零时叫齐次方程，否则叫非齐次方程。

例如，考虑二元函数  $u = u(x, t)$  或  $u = u(x, y)$ ，则

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

为齐次方程，其中 $a$ 为常数。而

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

为非齐次方程，其中与函数 $u$ 及其偏导数无关的函数 $f(x, t)$ 、 $\rho(x, y)$ 叫非齐次项。

应当注意，齐次与非齐次是以线性方程为前提的。

#### 四、偏微分方程的解

偏微分方程的解的概念与常微分方程有类似之处，也有较大的差别。

定义 若函数 $u$ 代入偏微分方程得到恒等式，则称函数 $u$ 为偏微分方程的解。

我们知道，常微分方程除了解的概念，还有通解与特解的区别。通解中含有任意常数，特解可从通解中得到。同样，偏微分方程中也有通解与特解的区别。但是，偏微分方程通解中含任意函数。例如，方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (u = u(x, y))$$

经对 $y$ 、 $x$ 两次积分，即得通解

$$u = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

其中 $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 为两个任意可微函数。又如方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x} - xy^2 \quad (z = z(x, y))$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \left(-\frac{1}{x}\right)z = -xy^2$$

利用常微中线性非齐次方程的求解公式，可得通解

$$z = \varphi(y)x - x^2y^2$$

其中 $\varphi$ 为任意函数。

**注意** 有明显物理背景的几种常用的偏微分方程叫数学物理方程，简称数理方程。数理方程中研究的都是在一定条件下的解，即特解。求得特解的方法一般地不像常微那样即先求出通解，再通过定常数求出特解，而是直接从方程和条件出发求出特解。这是因为求出偏微分方程的通解一般来说是很困难的。因此，本书中将以大量的篇幅来研究在一定条件下求解数理方程的问题，这正是数学物理方法的主题。

## 五、二阶方程的分类

在二次曲线

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

中，令 $\Delta = B^2 - AC$ ，则当 $\Delta < 0$ 为椭圆，当 $\Delta > 0$ 为双曲线，当 $\Delta = 0$ 为抛物线。类似地，对二元函数 $u = u(x, y)$ 的二阶线性方程的一般形式为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0$$

其中 $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ， $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ，余类推，而 $a_{11}, a_{12}, \dots, c, f$

为 $x, y$ 的已知函数。考虑平面上点 $P_0(x_0, y_0)$ ，记 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ ，则在 $P_0$ 点 $\Delta$ 可出现不同的情况：

当 $\Delta < 0$ ，则称方程在 $P_0$ 点属于椭圆型方程；当 $\Delta > 0$ ，则称方程在 $P_0$ 点属于双曲型方程；当 $\Delta = 0$ ，则称方程在 $P_0$ 点属于抛物型方程。如果在区域 $D$ 内每点都属于什么类型，便称方程在 $D$ 内属于什么类型。

从另一角度看，方程在 $P_0$ 点属于什么类型，与二次型

$$A(\lambda) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

在  $P_0$  点的代数性质有关。此二次型的矩阵和特征方程分别为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

易证：当  $\Delta < 0$ ，两特征根同号；当  $\Delta > 0$ ，两特征根异号；当  $\Delta = 0$ ，有零特征根。这表明：可按二次型  $A(\lambda)$  的特征根的不同情况，对方程进行分类。特征根同号、异号、有零根分别叫做椭圆型、双曲型、抛物型方程。

同样，对于三个自变量的二阶线性方程，也可仿此用三个变量的二次型

$$A(\lambda) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

的特征根的不同情况对方程进行分类。例如，方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

相应的二次型的矩阵有三个同号的特征根  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ，属于椭圆型。方程

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$$

相应的二次型的矩阵有零特征根  $\lambda_1 = 0$ ，及特征根  $\lambda_2 = \lambda_3 = a^2$ ，属于抛物型。而方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$$

相应的二次型的矩阵的特征根异号，但有两个同号，即  $\lambda_1 = -1$ ， $\lambda_2 = \lambda_3 = a^2$ ，属于双曲型。

一般地， $n$  个自变量的二阶线性方程的形式为

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f$$

其中 $a_{ij}$ 、 $b_i$ 及 $f$ 是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的连续函数, 而

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

类似地, 在 $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 点考察二次型

$$A(\lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(P_0) \lambda_i \lambda_j$$

根据 $A = (a_{ij})$ 的特征根的不同情况, 可对方程进行分类, 如

当 $n$ 个特征根同号, 则在 $P_0$ 点属于椭圆型; 至少有一零特征根, 则在 $P_0$ 点属于抛物型; 当 $n$ 个特征根异号, 但有 $n-1$ 个同号, 则在 $P_0$ 点属于双曲型。如果在区域 $D$ 内每点属于什么类型, 便叫方程在区域 $D$ 内属于什么类型。

## 六、三类典型的数学物理方程

在物理学、力学、工程技术问题中, 常常要把问题归结为求解波动方程、热传导方程、Laplace方程, 并且除时间 $t$ 外, 通常在一、二、三维空间中讨论问题。

波动方程分别为

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$$

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \quad a \text{ 为常数.}$$

## 二、三维波动方程常记作

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{或} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

其中 $f$ 为 $f(x, y, t)$ 或 $f(x, y, z, t)$ 。这些方程均为二阶线性非齐次方程, 属双曲型方程。若非齐次项 $f=0$ , 则称为与其对应的齐次方程。

热传导方程分别为

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),$$

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t)$$

其中 $a$ 为常数。二、三维热传导方程常记作

$$u_t = a^2 \Delta u + f,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{或} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

它们属于抛物型方程，其中 $f$ 为 $f(x, y, t)$ 或 $f(x, y, z, t)$ 。当非齐次项 $f=0$ ，则称为与其对应的齐次方程。

Laplace方程通常为二维和三维两种情况，即

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

可记为 $\Delta u = 0$ ， $u = u(x, y)$ 或 $u = u(x, y, z)$ 。这是二阶线性齐次方程，属椭圆型方程。如果有非齐次项

$$\Delta u = \rho \quad \rho = \rho(x, y) \text{ 或 } \rho = \rho(x, y, z)$$

则称为Poisson方程。

研究这些方程在一定条件下特解的求法和解的性质、物理意义是数学物理方程这门课的主要内容，对于理论方面的研究或证明将从简。

## 第二节 三类基本方程的建立

### 一、物理规律与数理方程

数理方程是研究具体物理现象发展规律的学科。物理现象是通过物理量来描述的，反映这些量之间的联系等的等式便是物理规律的数量表达式，从而数理方程是物理规律的反映。物理量的存在和变化总是离不开空间范围和时间过程的，所谓与空间位置或时间无关是相对的。因而一般说来物理量是

空间位置坐标 $(x, y, z)$ 和时间 $t$ 的函数，常记以 $u(x, t)$ ,  $u(x, y, t)$ 或 $u(x, y, z, t)$ 。

用物理量反映的物理规律，对时间而言可分瞬时规律和过程规律，对空间而言可分局部规律和整体规律。由导数的概念知，物理量对时间的偏导数，反映了物理量的瞬时变化率，对空间位置坐标的偏导数，则反映了物理量的局部变化率。数理方程是含偏导数的等式，并且通常是对时间与位置坐标的偏导数。因此，数理方程反映了物理量局部的瞬时的规律，而数理方程之解，如同常微分方程之解一样，反映了物理量的整体的过程的规律。这在电路理论的过渡过程分析中清楚地说明了这个问题。如同解常微分方程一样，求解数理方程，实质上就是人们通过局部的瞬时的规律去认识整体的过程的规律的一种数学方法。

## 二、建立方程的分析方法

数理方程是含偏导数的等式，因此建立方程的着眼点应放在发生物理量的点上，放在考察物理量的瞬时状态上，即要建立反映物理量的点的瞬时的等式。但是，在分析问题、建立反映物理量的等式即方程时，却可表现出不同的方式。常被采用的有以下几种。

第一，根据某些物理规律，直接从点和瞬时出发建立等量关系。当然，这也要联系到整体和过程去分析，这是因为物理上的点总是占有空间位置的，而瞬时也总有相对地很短的时间过程。例如，一维空间中的点 $x$ ，物理上指 $x + \Delta x (\Delta x \rightarrow 0)$ ，而瞬时物理上指 $t + \Delta t (\Delta t \rightarrow 0)$ 。如果离开微小量 $\Delta x$ 、 $\Delta t$ ，把着眼点放在不占空间位置的点 $x$ 上，放在没有时间过程的瞬时下。这样，物质没有了，运动没有了，便无法根

据物理规律建立物理量所满足的等量关系。用这种方法建立方程常用到Newton运动定律和Kirchhoff回路电压定律。

第二，先从任意的整体和过程下手，建立物理量所满足的数量等式。既然整体和过程是任意取的，那末对于空间范围收缩为一点的局部、时间过程趋于某一时刻的瞬时数量等式仍然是成立的。根据这点便可获得点的瞬时的数量等式，即方程。整体的量过程的量数学中常通过积分来反映。因此，这种方法与第一种不同，常常是先从建立物理量的积分等式下手，再根据积分域的任意性即可获得方程。运用这种方法，常要用到场论中的Gauss公式

$$\oiint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_Q dw a dv$$

其中 $S$ 为区域 $Q$ 的外侧面， $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ ， $(x, y, z) \in Q$ 。同时，要注意到一个重要命题：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，如果在 $[a, b]$ 中任取两点 $x, x + \Delta x$ ，有 $\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = 0$ ，则必有 $f(x) \equiv 0$ 。对于重积分有类似的结论，并且不难用反证法证明。

第三，从方程到方程，即在某些已知方程组的基础上，通过微积分运算，导出所要建立的方程。例如，从真空中的Maxwell方程组的微分形式出发，通过求导运算可导出电磁波方程。

### 三、波动方程

#### 例1 弦振动方程

设弦均匀柔软，即线密度 $\rho$ 为常量、张力 $T$ 沿切线方向，平衡时两端固定拉紧，弦的自重忽略不计；弦在某种条件下

作微小的横向振动，以致弦上切线斜率的平方可忽略不计，试求振动过程中弦上各点位移所满足的运动方程。

解 取坐标系如图1.2—1所示。平衡时拉紧，固定在O、A两点。振动时，取出 $x$ 至 $x + \Delta x$ 微段，相应的弦长记以 $ds$ ，则注意到 $u_x^2 \approx 0$ ，有

$$ds = \sqrt{1 + u_x^2} \Delta x \approx \Delta x$$

即振动过程中弦的伸长可忽略不计，其中 $u = u(x, t)$ 表示 $x$ 点 $t$ 时刻弦的位移。从而

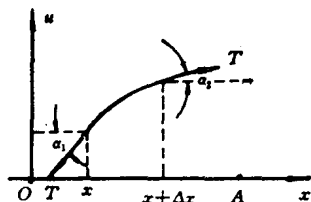


图 1.2—1

由Hooke定律知，弦上张力与点 $x$ 和时间 $t$ 无关，即张力 $T$ 为常量 $T(x, t) = T$ 。

对于弦的横向即 $u$ 轴方向，按Newton运动定律知

$$T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1 = \rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2}, \quad \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x + \Delta x \text{ 间}.$$

由假设 $u_x^2 \approx 0$ ，故弦上任一点切线的倾角 $\alpha$ 满足

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx 1$$

从而有  $\sin \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x}$ ,  $\sin \alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x$ 。于是，得

$$\frac{T [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]}{\rho \Delta x} = \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2}$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$ ，即得弦的振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = \frac{T}{\rho} \quad (1.2-1)$$

若振动弦还受到垂直于 $x$ 轴的外力作用，力密度为 $F(x, t)$

(每单位长度的弦所受到的力), 则振动方程应为

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad f = \frac{F}{\rho} \quad (1.2-2)$$

这是一个非齐次方程, 描述了强迫振动的规律; 而(1.2-1)是相应的齐次方程, 描述了弦的自由振动规律。

下面对所建立的两个方程作几点分析:

### 1. 量纲分析

将长度、质量、时间的量纲记成  $L$ 、 $M$ 、 $T$ , 则由导数概念知  $u_x$  是无量纲的, 记以  $[u_x] = 1$ , 从而  $u_{xx}$  的量纲为  $L^{-1}$ , 记以  $[u_{xx}] = L^{-1}$ , 而  $[u_{tt}] = LT^{-2}$ . 从而, 方程中常数  $a^2$  的量纲

$$[a^2] = [u_{tt}] / [u_{xx}] = L^2 T^{-2}, \text{ 或 } [a] = LT^{-1}$$

即  $a$  为速度的量纲。这也可从  $a^2$  的定义式中得到证实。方程中非齐次项  $f(x, t)$  的量纲与加速度是一致的, 即

$$[f] = [u_{tt}] = LT^{-2},$$

这也可从  $f$  的定义式中得到证实。

怎样看量纲分析在研究物理规律中的作用呢? 如果反映物理规律的等式正确, 则各项量纲必一致, 当然, 各项量纲一致并不能保证等式正确。

### 2. 一维波动方程

湖水受某种原因使水分子偏离平衡位置而发生振动, 这种振动的传递叫水波。同样, 弦振动现象也叫波动。这里用来描述波动现象的物理量是弦上点离开平衡位置的位移  $u(x, t)$ 。由于位移  $u(x, t)$  除时间  $t$  外, 用一个位置坐标来描述。因此, 上述建立的振动方程叫作一维波动方程, 而常数  $a$  的物理意义表示波速。