高等学校教学用书

# 物 理 实 验

李长江 主编

刘晓来 谢超然
刘丽敏 何惠梅 等编

化 学 工 业 出 版 社
教 材 出 版 中 心
·北 京·

（京）新登字 039 号

**图书在版编目（CIP）数据**

物理实验/李长江主编 .—北京：化学工业出版社，2002.2

高等学校教学用书

ISBN 7-5025-3632-9

Ⅰ．物… Ⅱ．李… Ⅲ．物理学-实验-高等学校-教材 Ⅳ．04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 002629 号

高等学校教学用书

**物 理 实 验**

李长江 主编

刘晓来 谢超然<br>刘丽敏 何惠梅 等编

责任编辑：唐旭华

责任校对：凌亚男

封面设计：郑小江

*

化学工业出版社<br>教 材 出 版 中 心 出版发行

（北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029）

发行电话：（010）64918013

http://www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销

北京云浩印刷厂印刷

三河市宇新装订厂装订

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 17¼ 字数 429 千字

2002 年 3 月第 1 版 2002 年 3 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-3632-9/G·973

定 价：26.00 元

# 前　　言

本书根据高等学校工科本科物理实验课程教学基本要求，结合目前高等工科院校的实际教学情况与仪器设备现状和发展趋势而编写的。同时扩展了近代物理实验的内容以拓宽其应用范围，除作为工科本科各专业的物理实验教材外，也可作为工科本科高年级、电子、信息等近物理专业本科生和硕士研究生的近代物理实验教材。此外还在形成特色方面作了一些新的尝试，以适应创新教育对实践教学的新的和更高的需求。期望通过本书的出版能够有利于物理实验教学质量的提高，有利于对学生创新精神和实践能力的培养。

全书包括绪论、误差基本知识、数据处理、物理实验基础知识、基础物理实验、物理设计实验和近代物理实验等内容。给出了43个实验项目（含约10个有关诺贝尔物理学奖的实验），可根据不同教学对象和不同专业类别的教学需要，选排和选做其中部分实验项目。充实和增添了一些有一定应用性、扩展性和设计性的实验项目和实验内容，有利于教学与科研相结合，以期逐渐形成特色。适当地引入了对科研、生产、商贸和国际技术交流等诸多相关测量领域影响甚大的测量不确定度评定和表示。其中，选择了4个实验作为测量不确定度评定和表示的示例，为今后进一步全面贯彻执行国家计量技术规范JJF 1059—1999《测量不确定度评定与表示》做准备。

本书在编写过程中，参考了多年来在北京化工大学为本科生开设的物理实验课程和为本科生及硕士研究生开设的近代物理实验课程的讲义，并作了较大的修改和补充。它反映了北京化工大学物理学与电子科学系全体教师和技术人员长期共同努力所取得的成果；同时借鉴和参阅了兄弟院校的有关教材和经验，编者对此深表谢意。

本书由李长江主编，刘晓来、谢超然、刘丽敏、何惠梅、王云、林静、伦秀君、王文科和战可涛等分工编写。

由于编者水平有限，时间紧迫，本书一定会有不少不当和疏漏之处，热切希望读者批评指正，以便重印、再版时改正。

本书的编写得到了“北京化工大学化新教材建设基金”的资助。

**编　者**

**2001年11月**

# 目　　录

# 1 绪　　论

## 1.1 物理实验的地位和作用

物理学是研究物质、能量和它们的相互作用的学科，它对人类未来的进步起着关键作用。

物理学的研究对象具有极大的普遍性。它的基本理论渗透在自然科学的许多领域，应用于生产技术的各个部门，它是自然科学的许多领域和工程技术的基础。

物理学是建立在实验基础上的一门自然科学学科。任何物理规律的发现和理论的建立都是以严格的实验为基础，并受到实验的检验。在物理学的整个发展过程中，物理实验起着直接或间接的作用。

在经典力学发展之初，首先把科学的实验方法引入到物理学研究中来的物理学家是伽利略。在此之后，物理学的研究才真正走上科学的道路。经典物理学的奠基人牛顿则在大量实验的基础上总结出牛顿三定律和万有引力定律。

物理学中的麦克斯韦电磁学理论是一个较完善的理论。然而其理论的建立则离不开奥斯特在一次课堂实验中发现的电流的磁效应和法拉第数十年的实验研究结论——磁也可以产生电。正因为有了这两位科学家的实验研究结论，才使得电磁学的理论大厦得以完满建成。奥斯特和法拉第的结论推动了电磁学的发展，同样杨氏双缝实验和光电效应实验也相应推动了光学的发展。前者揭示了光的波动性，后者告诉人们光具有量子性。

现代科学技术的高速发展是离不开物理学理论和实验的构思和方法的。物理实验的一些实验理论、方法已经广泛渗透到了自然科学各个学科和工程技术领域。例如，声波测井、物质的化学成分与光谱的结构分析、原油或油品流动性质的研究等，实际上，都是一些专业的物理实验。正是把物理实验方法运用于专业，才使其专业得到迅速发展。高等工科院校的学生一般将从事生产或生产技术研究工作，解决科研与生产实际中遇到的问题。这些问题往往要通过实验来解决。这样，高等工科院校的学生们就必须具备一定的实验知识，掌握一系列的实验方法，熟悉并会运用必要的实验仪器；知道怎样对实验所得数据进行归纳总结，加工处理，从而找出对解决问题有用的结论和规律；懂得怎样估计误差，判断所得规律与结论的可靠性。这就是所谓的实验能力。物理实验课是大学学习过程中的第一门实验课，是学生进入大学后受到的实验方法和实验技能训练的开始。对学生实验能力的培养，物理实验课担负着重要的基础任务。

## 1.2 《物理实验》的教学目的和任务

物理实验的目的是通过物理实验知识和方法的学习和实验技能的训练，初步了解科学实

验的主要过程与基本方法为今后的学习和工作奠定良好的实验基础，其基本任务如下。

①通过物理实验现象的观察、分析和对物理量的测量，使学生进一步掌握物理实验的基本知识、基本方法和技能，并能运用物理原理、物理实验的方法来研究物理现象，总结物理规律，加深对物理原理的理解。

②培养与提高学生从事科学实验的素质。包括理论联系实际和实事求是的科学作风；严肃认真的工作态度；不怕困难，主动进取的探索精神；遵守操作规程，爱护公共财物的优良品德以及在实验过程中同学间的相互协作，共同探索的协同心理。

③培养与提高学生科学实验的能力。包括：

a. 自学能力—能够自行阅读实验教材和参考资料，正确理解实验原理与方法，在实验前作好实验的各项准备工作；

b. 动手能力—能借助教材与仪器说明书正确操作仪器，联系与拆除线路，制作必要的简单样品等；

c. 思维判断能力—能正确记录和处理实验数据，绘制图表，说明实验结果，撰写合格的实验报告；

d. 初步的实验设计能力—能够根据实验课题要求，对简单实验题目，确定实验方法和实验条件，合理选择与搭配仪器仪表，拟订实验步骤，写出实验注意事项等。

## 1.3 物理实验规则

①实验前必须认真预习，并写出预习报告，不预习和达不到要求者不准进行实验。

②准时到实验室上课。迟到者，教师应对其进行批评教育。迟到超过10min 者不准进行当日的物理实验。

③做实验时态度要严肃认真，积极思考。注意保持实验室安静、整洁。不得自行调换仪器，如遇仪器发生故障应及时报告指导教师。

④操作仪器、连接线路必须按照有关规程和注意事项进行。违反规程或违反纪律而损坏仪器时，应填写仪器损坏报告并按学校规定赔偿。数据测量完毕，应交给指导教师检查，当教师在你的原始记录上签字后，才能整理仪器，离开实验室。每个实验班应安排值日组清扫实验室。

⑤不能无故缺课。缺课者不得参加考试。物理实验不及格者必须重修。

⑥教师签字的原始记录纸不得丢失，如丢失则需补做该实验。

## 1.4 物理实验课的基本程序

（1）实验前的预习

由于实验课的课内时间有限，而熟悉仪器和测量数据的任务一般都比较繁重，因此不允许在实验课内才开始研究实验的原理和操作步骤等。

预习要以理解所做实验的原理为主。对于实验的具体操作过程要有一定的了解，以便能抓住实验的关键，较好地控制实验的物理过程和现象，及时、迅速、准确地获得所需要的测

量数据。为了做到这一点，在预习时一定要弄清楚该实验依据什么定律进行测量，测量时所需仪器是什么，该仪器的主要功能和主要操作要点以及仪器的精度如何等。只有这样，实验课才可能进行得更好些。预习时应根据实验要求画好数据表格，表格上要标明文字符号所代表的物理量及其单位，以及表格的名称。这张实验数据表格称为原始记录纸，它不应小于32开，记录时不应用铅笔。一份合格的预习报告应包括如下内容：实验名称，实验目的，实验原理，实验仪器（或实验装置），实验步骤和注意事项等。在实验原理部分应包括：必须的文字叙述、原理图、公式及公式的推导或公式的说明。预习报告可作为正式实验报告的一部分，上实验课时教师要检查。

（2）实验的进行

实验开始前要先熟悉仪器，了解仪器的工作原理和使用方法。按照要求安装调整好仪器，并按照操作方便与否来安置仪器。每次测量后，应立即将实验数据记录在预习时准备好的实验数据表格内，不允许随意记在教材上。要根据仪器的最小刻度单位或准确度等级来决定实验数据的有效数字位数和单次的测量误差。数据表格要画得大方些，不要太挤，以便在必要时补充数据。当你认为某些数据有错误时，可用笔在此数据上画一横线，然后将你认为正确的数据记录在旁边。情况允许时可简单地说明错误原因。如需要，则室温、空气湿度和大气压等也要记录在原始记录纸上，记录数据时要实事求是，千万不能随意改动，更不能依赖一、二个测量值按臆想的“规律”改变读数。

（3）实验报告的书写

实验报告是实验工作的全面总结，要用简明的形式将实验结果完整而又真实地表达出来。写报告时要求文字通顺，字迹端正，图表规矩，结果正确，讨论认真。应养成实验完成后尽早将实验报告写出来的习惯。因为这样做可以收到事半功倍的效果。一份完整的实验报告应包括：实验名称、实验目的、实验原理、实验仪器（或实验装置）、实验步骤、注意事项、数据处理、实验结果和结果讨论。前六项在预习报告中已经写好，如你认为不需再改动时可将后三项在报告上填写好即可完成了一份实验报告。在数据处理一项中应包括：数据表格、计算过程、图示法、图解法处理数据和误差分析（它包括确定实验结果的误差范围，找出影响实验结果的主要因素等；误差过大时应分析原因，对误差作出合理的解释）。实验结果一项中应包括测量结果，即被测量的最佳估计值。若是对同一量的多次测量，则测量结果应是测量值的算术平均值。并且必须附带测量不确定度或绝对误差和相对误差（含计算方法、概率及测量次数）。必要时，应说明测量所处的条件，或影响量的取值范围。

如果实验是观察某一物理现象或验证某一物理定理，则需要根据误差判断出实验是否验证了理论。结果讨论一项包括：实验过程中观察到的异常现象及其可能的解释，对实验仪器装置和实验方法改进的建议等。还可以记录下实验者印象特别深刻的体会。

# 2 误差基础知识

## 2.1 误差的定义及表示

任何实验都是在理论指导下，利用仪器设备，人为地控制或模拟自然现象，使它们以比较纯粹和典型的形式表现出来，然后再通过观察与测量来探索自然界客观规律的过程。自然界的条件千变万化，错综复杂，即使在实验过程中已作了充分的控制也难免不受其影响。所以，所观测的结果也就不可能完全是客观世界的真实反映。为此，在实验中除了测得应有的数据外，还需对测量结果的可靠性作出合理的评价，对测量结果的误差范围作出合理的估计。

### 2.1.1 测量

［可测量的］量　现象、物体或物质可定性区别和定量确定的属性。

量值　一般由一个数乘以测量单位所表示的特定量的大小。

［量的］真值　与给定的特定值定义一致的值。真值按其本性是不确定的，它不一定只有一个。量的真值只有通过完善的测量才有可能获得。

［量的］约定真值　对于给定目的的具有适当不确定度的、赋予特定量的值，有时该值是约定采用的。约定真值有时称为指定值、最佳估计值、约定值或参考值。常用某量的多次测量结果来确定约定真值。

被测量　作为测量对象的特定量。实践中，被测量应根据所需准确度予以完整定义，以便对所有的测量，其值是单一的。

测量结果　由测量所得到的赋予被测量的值。在给出测量结果时，应说明它是示值、未修正测量结果或已修正测量结果，还应表明它是否为若干个值的平均值。在测量结果的完整表述中，应包括测量不确定度，必要时还应说明有关影响量的取值范围。测量结果仅是被测量之值的估计。很多情况下，测量结果是在重复观测的情况下确定的。在测量结果的完整表述中，还应给出自由度。

［测量结果的］重复性　在相同测量条件下，对同一被测量进行连续多次测量所得结果之间的一致性。重复性条件包括：相同的测量程序；相同的观察者；在相同的条件下使用相同的测量仪器；相同地点及在短时间内重复测量。重复性可以用测量结果的分散性定量地表示。重复性用在重复性条件下，重复观测结果的实验标准差（称为重复性标准差）$s_r$ 定量地给出。

［测量结果的］复现性　又称为再现性，在改变了测量条件下，同一被测量的测量结果之间的一致性。在给出复现性时，应有效说明改变条件的详细情况。可改变的条件包括：测量原理；测量方法；观测者；测量仪器；参考测量标准；地点；使用条件和时间。复现性可用测量结果的分散性定量地表示。复现性用在复现性条件下，重复观测结果的实验标准差（称为复现性标准差）$s_R$ 定量地给出。

测量可分为直接测量和间接测量。直接测量就是把一个未知大小的被测量和一个选为标准的同类量（即取为单位的）进行比较，定出它是标准量的多少倍，即完成了测量。而间接测量则是被测量由若干直接测量的物理量经过一定的函数关系运算后获得。例如：用单摆测重力加速度 $g$，要先测出摆长 $L$ 和周期 $T$，再由公式 $g=4\pi^2\dfrac{L}{T^2}$ 计算出 $g$。$g$ 的测量就称为间接测量。

### 2.1.2 ［测量］误差

［测量］误差——测量结果减去被测量的真值。由于真值不能确定，实际上用的是约定真值。误差之值只取一个符号，非正即负。

测量仪器的特性可以用［示值］误差、最大允许误差等术语描述。

测量结果 $x_i$ 与被测量的真值 $x_0$ 间的差记作 $\delta_i$，称为误差或绝对误差。即

$$\delta_i = x_i - x_0 \tag{2.1.1}$$

误差存在于一切测量过程中，被测量之值永远不是真值。那么怎样才能找到真值的最佳替代值，又如何估算测量的误差范围，或评定测量不确定度，这就需要研究误差规律。误差理论包括下列内容。

①误差的性质、分类、出现的规律及对误差大小的估算方法。

②减小或消除误差的实验方法与数据处理方法。

③误差的传播与合成方法。

④用误差理论指导选择实验方案。

### 2.1.3 误差的分类

根据误差产生的原因和它对实验结果的影响，误差可分为两类。

随机误差：测量结果与重复性条件下对同一量进行无限多次测量所得结果的平均值之差。由于实际上只能进行有限次测量，因而只能得出这一测量结果中随机误差的估计值。

系统误差——在重复性条件下，对同被测量进行无限多次测量所得结果的平均值与被测量真值之差。由于系统误差及其原因不能完全获知，因此通过修正值对系统误差只能有限程度的补偿。当测量结果以代数和与修正值相加之后，其系统误差之模会比修正前的要小，但不可能为零。

修正值——用代数法与未修正测量结果相加，以补偿其系统误差的值。为补偿系统误差，而与未修正测量结果相乘的因子称为修正因子。

需要指出的是，在整个测量过程中，除上述两种性质的误差以外，还可能因仪器故障或操作不当等造成测量上的或读数、记录上的错误。这种错误明显歪曲测量结果。从而其数值与其他值相比较差别较大。错误不同于误差，它是不允许存在的，同时，也是完全可以事先发现和避免的。

### 2.1.4 测量准确度

测量准确度——测量结果与被测量的真值之间的一致程度。准确度是一个定性概念。例如：可以说准确度高低、准确度为 0.25 级、准确度为 3 等及准确度符合 × × 标准；尽量不使用如下表示：准确度为 0.25%、16mg、≤16mg 及 ± 16mg。

### 2.1.5 ［测量］不确定度

一切测量结果都不可避免地具有不确定度。测量不确定度是评定测量水平的指标，是判定测量结果质量的依据。它对科研、生产、商贸和日益广泛的国际技术交流中与测量相关的

领域的影响很大。因此，学习如何正确评定和表示测量不确定度具有实际和重要的意义。

测量不确定度的评定在发达国家和许多发展中国家已经普遍采用。我国根据国际标准（GUM）于1999年1月发布并于同年5月正式实施的国家计量技术规范（JJF 1059—1999）对测量不确定度的评定与表示作了较详尽的规定。此规定对科学研究、工程技术及商贸等测量领域中各种准确度等级的测量结果的处理和表示，均具有适用性。

测量不确定度是表征合理赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。此定义虽然着眼于测量结果及其分散性，但与通常的概念，即表征被测量的真值所处范围的评定是不矛盾的。

不确定度可以是标准差或其倍数，或是说明了置信水准的区间的半宽。以标准差表示的不确定度称为标准不确定度，以 $u$ 表示。以标准差的倍数表示的不确定度称为扩展不确定度，以 $U$ 表示，其倍数以 $k$ 表示，称为包含因子。扩展不确定度表明了具有较大置信概率的区间的半宽度。不确定度通常由多个分量组成，对每一分量均要评定其标准不确定度。评定方法分为A、B两类。A类评定是用对观测列进行统计分析的方法，以实验标准差表征；B类评定则用不同于A类的其他方法，以估计的标准差表征。各标准不确定度分量的合成称为合成标准不确定度，以 $u_c$ 表示，它是测量结果标准差的估计值。

不确定度的表示形式有绝对、相对两种，绝对形式表示的不确定度与被测量的量纲相同，相对形式无量纲。

## 2.2 随机误差的分布规律

在测量过程中，系统误差和随机误差往往同时出现。但在某些实验中可能以某种误差为主。在这里为了讨论方便假定在实验过程中不存在错误，且消除了系统误差，仅存在随机误差的情况。

### 2.2.1 统计直方图

作统计直方图的方法如下，将所测得的数据按数值的大小划分为若干个小区间，统计出在每一个区间内的数据有几个（即频数 $K$），$K_i$ 表示在第 $i$ 个区间内的频数，$K_i/n$ 为第 $i$ 区间内的频数占总测量次数 $n$ 的百分率或概率。例如，测量某一物理量所得到的数据如表2.2.1所示。

**表 2.2.1 测量数据例**

| 区间 $i$ | $x$ 值范围 | 中间值 | 频数 $K_i$ | 概率 $K_i/n$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00～1.02 | 1.01 | 0 | 0.000 |
| 2 | 1.02～1.04 | 1.03 | 1 | 0.005 |
| 3 | 1.04～1.06 | 1.05 | 4 | 0.022 |
| 4 | 1.06～1.08 | 1.07 | 7 | 0.038 |
| 5 | 1.08～1.10 | 1.09 | 15 | 0.082 |
| 6 | 1.10～1.12 | 1.11 | 31 | 0.170 |
| 7 | 1.12～1.14 | 1.13 | 54 | 0.297 |
| 8 | 1.14～1.16 | 1.15 | 38 | 0.203 |

续表

| 区间 $i$ | $x$ 值范围 | 中间值 | 频数 $K_i$ | 概率 $K_i/n$ |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 1.16～1.18 | 1.17 | 20 | 0.110 |
| 10 | 1.18～1.20 | 1.19 | 9 | 0.049 |
| 11 | 1.20～1.22 | 1.21 | 3 | 0.016 |
| 12 | 1.22～1.24 | 1.23 | 0 | 0.000 |
| 13 | 1.24～1.26 | 1.25 | 1 | 0.005 |
| 14 | 1.26～1.28 | 1.27 | 0 | 0.000 |
| 总数 | | | 183 | 0.997 |

以频数 $K$ 为纵轴，以测量数值 $x$ 为横轴作直方图，如图 2.2.1 所示。也可以用中间值代表此区间的测量值 $x$，以它为横轴，以概率 $K_i/n$ 为纵轴，联成一条光滑曲线，如图 2.2.2 所示，这就是概率分布曲线。我们常用这种方法从实验数据中得到被测量所遵循的分布规律。必须指出，如用上面所述的作图法求分布规律，只有在观测次数足够多时才有统计意义。

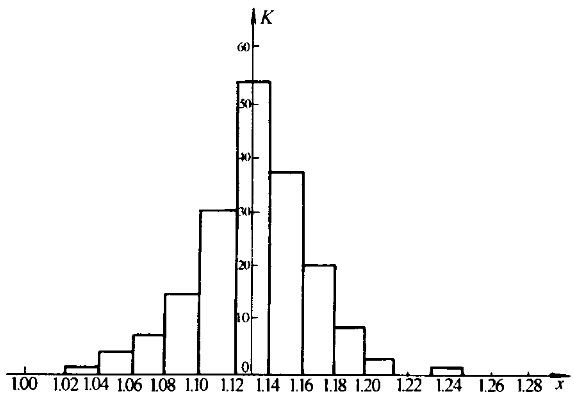


图 2.2.1　统计直方图

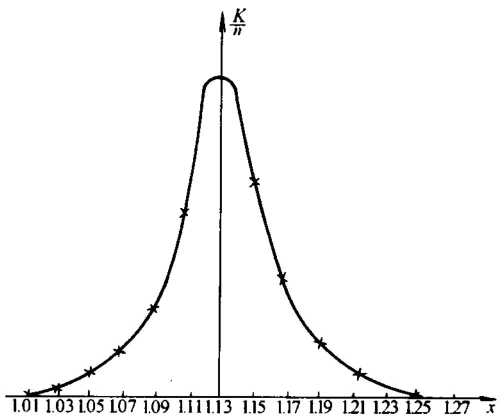


图 2.2.2　概率分布曲线

### 2.2.2　正态分布（拉普拉斯-高斯分布）

（1）性质

在一系列等精度测量（简称测量列）中，大多数情况下，测量列的随机误差服从正态分布规律，正态分布有以下特点。

①单峰性　即曲线在均值处具有极大值。绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。

②对称性　即曲线有一对称轴。绝对值相等，符号相反误差出现的概率相等。

③有界性　大于某一界限的误差出现的机会趋于零。

④抵偿性　所有测量值的误差代数和为零。即

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0 \tag{2.2.1}$$

（2）分布函数

设被测量 $x$ 的总体平均值为$\mu$，标准差为 $\sigma$，则 $x=\mu\pm\sigma$。由数理统计得知，正态分布的概率密度分布函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.2.2}$$

式中，$\mu$，$\sigma$（$\sigma>0$）是正态分布的两个参数。正态分布以 $x=\mu$ 为其对称轴，它是正态总体平均值。参数 $\sigma$ 刻画总体的分散程度，它是总体的标准差。当 $\sigma$ 大时，曲线较低宽，代表函数离散，精度差；当 $\sigma$ 小时，曲线瘦高，代表函数集中，精度高，如图 2.2.3 所示。图 2.2.3（b）中曲线下斜线部分的面积为 $x$ 落在$\mu-\sigma$ 到$\mu+\sigma$ 区间的概率。整个曲线下的面积在测量次数趋于无穷时是 1，对于有限次测量，则结果略有差异。

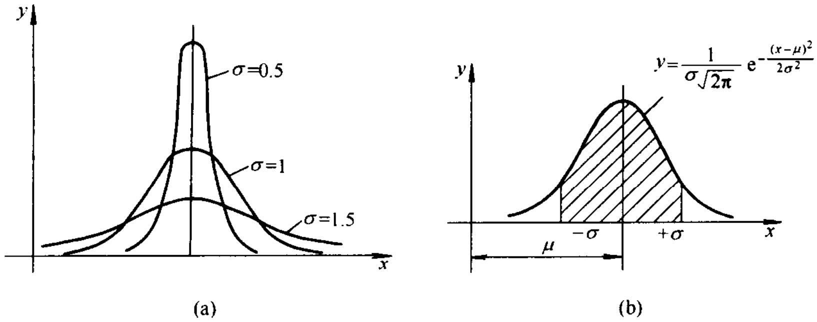


图 2.2.3　正态分布概率密度曲线

（3）算术平均值

由于误差时刻存在，所以其真值就无法测得。为了使测量有意义，就必须找到真值的最佳替代值。对于一个测量列来说，用任何一个测量值来替代真值都是不可取的。下面通过简单的说明可以知道多次测量的算术平均值是真值的最佳近似值。

在等精度测量条件下，对被测量 $x$ 作$n$ 次测量，测得

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

其算术平均值

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \tag{2.2.3}$$

当 $x_k$ 的分布是正态分布时，则根据正态分布的抵偿性有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_0)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_0=0$$

所以

$$x_0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\lim_{n\to\infty}\overline{x}$$

由此可知对于无限多次测量列来说，多次测量的平均值 $\overline{x}$ 等于真值$x_0$。而有限多次测量的平均值最接近真值，因此，可用某量的多次测量结果的平均值作为约定真值或最佳估计值。

测量中，被测量 $Y$（即输出量）由 $N$ 个其他可测的量$X_1$，$X_2$，…，$X_N$ 通过函数关系 $f$ 来确定，即

$$Y=f(X_1, X_2, \cdots, X_N)$$

式中，$X_i$ 是对 $Y$ 的测量结果$y$ 产生影响的影响量（即输入量，可以是物理量，当叙述为 $X_i$

具有某概率分布时，$X_i$ 也代表随机变量）。

如被测量 $Y$ 的估计值为 $y$，输入量 $X_i$ 的估计值为 $x_i$，则有

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

当 $x_i$ 是由 $n$ 次独立重复观测值的算术平均值得出时：$x_i = \overline{X_i}$。

在一列观测值中，第 $k$ 个 $X_i$ 的观测值用 $X_{ik}$ 表示。

被测量 $Y$ 的最佳估计值 $y$ 在通过输入量 $X_1$，$X_2$，…，$X_N$ 的估计值 $x_1$，$x_2$，…，$x_N$ 得出时，可以有以下两种方法。

① $$y = \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{Nk})$$

式中，$y$ 是取 $Y$ 的 $n$ 次独立观测值 $y_k$ 的算术平均值，其每个观测值 $y_k$ 的不确定度相同，且每个观测值 $y_k$ 都是根据同时获得的 $N$ 个输入量 $X_i$ 的一组完整的观测值求得的。

② $$y = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_N})$$

式中，$\overline{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}$，它是独立观测值 $x_{ik}$ 的算术平均值。这一方法的实质是先求 $X_i$ 的最佳估计值 $\overline{x_i}$，再通过函数关系式得出 $y$。

（4）$t$—分布（学生分布）

误差理论指出，被测量 $x_i$，其测量次数 $N$ 充分大，标准差为 $\sigma$，满足标准正态分布。但是，实验时，一般测量次数都较少，若以有限 $n$ 次测量的标准差 $s$，代替无穷 $N$ 次测量的标准差 $\sigma$，此时满足自由度为 $\nu$ 的 $t$（$\nu$）分布。当自由度 $\nu$ 趋于∞时，$s$ 趋于 $\sigma$，$t$（$\nu$）趋于标准正态分布。从图 2.2.4 可以看出 $t$ 分布与正态分布的区别，即正态分布曲线略高、略窄于 $t$ 分布曲线。因此，为了达到相同的概率（曲线下的面积相同），$t_p$（$\nu$）要大于 $\sigma$。可以这样理解，测量次数少了，数据的分散性就大，亦即测量精度差。为了达到同样的概率，就要把误差的范围扩大些。于是测量结果应表示为

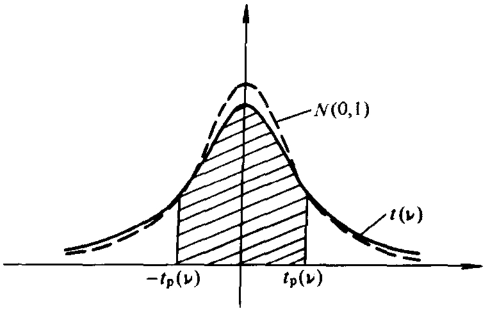


图 2.2.4　$t$ 分布与标准正态分布

$$\overline{x} \pm t_\xi s(\overline{x})$$

$t_\xi$ 为大于 1 的系数，$\xi$ 为概率大小。为了方便起见，表 2.2.2 中列出了不同自由度 $\nu$（$\nu = n - 1$，$n$ 为测量次数）下，概率为 $\xi = 0.683$ 时的 $t_\xi$ 值。

**表 2.2.2　不同自由度 $\nu$ 对应的 $t_\xi$ 值**

| $\nu$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 16 | 20 | 30 | 40 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_{0.683}$ | 1.84 | 1.32 | 1.20 | 1.14 | 1.11 | 1.09 | 1.08 | 1.07 | 1.06 | 1.05 | 1.04 | 1.03 | 1.02 | 1.01 | 1.00 |

由此表可以看出，当测量次数多于 10 次时，即 $\nu > 9$，$t_{0.683} < 1.06$ 非常接近于 1，此时 $t$ 分布和正态分布就非常接近了，两者可以不加区分，在要求不高时测量 5 次也就够了。

## 2.3 直接测量值的随机偏差估算

### 2.3.1 算术平均值的绝对偏差

前面曾定义过误差为 $\delta_i = x_i - x_0$，这表明测量值与真值之差为误差。定义测量值与平均值之间的差 $\nu_i = x_i - \overline{x}$ 称为残差。由于 $\overline{x}$ 是 $x_0$ 的最佳估计值，则 $\nu_i$ 即为 $\delta_i$ 的最佳估计值。用残差表示的误差称为偏差。

①实验标准［偏］差　实验标准［偏］差——对同一被测量作 $n$ 次测量，表征测量结果分散性的量 $s$ 可按贝塞尔公式算出

$$s(x_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2}{n-1}}$$

式中，$x_k$ 是第 $k$ 次测量结果；$\overline{x}$ 是 $n$ 次测量的算术平均值。

当将 $n$ 个测量结果视作分布的样本时，$\overline{x}$ 是该分布的期望值 $\mu_x$ 的无偏估计，实验方差 $s^2(x_k)$ 是这一分布的方差 $\sigma^2$ 的无偏估计。$s(x_k)/\sqrt{n}$ 为 $\overline{x}$ 的分布的标准差估计，称为平均值的实验标准差。将平均值的实验标准差称为平均值的标准误差是不正确的。

平均值的实验标准差通常用 $s(\overline{x})$ 表示。由统计理论我们知道

$$s(\overline{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \quad (n \geqslant 5) \tag{2.3.1}$$

有关随机误差的处理，均应用标准差来进行。

②平均值的平均偏差（用 $\eta(\overline{x})$ 来表示）

$$\eta(\overline{x}) = \frac{\sum|\nu_i|}{n\sqrt{(n-1)}} \tag{2.3.2}$$

③极限偏差　定义 $3\,s(\overline{x})$ 为极限偏差。

### 2.3.2 几种偏差的置信概率

置信概率——与置信区间或统计包含区间有关的概率值，符号为 $p$，经常用百分数表示。

①根据数理统计，由概率密度函数 $f(x)$ 对某一区间积分，即可得到偏差落在该区间的概率，即

$$p = \int f(x)\mathrm{d}x \tag{2.3.3}$$

则平均值实验标准差的概率为

$$p = \int_{-s(\overline{x})}^{s(\overline{x})} f(x)\mathrm{d}x = 0.683 \tag{2.3.4}$$

它表明真值落入 $\overline{x} \pm s(\overline{x})$ 内的概率为 68.3%。

②平均值平均偏差的概率为

$$p = 57.4\%$$

它表明真值落入到 $\overline{x} \pm \eta(\overline{x})$ 内的概率为 57.4%。

③平均值的极限偏差的概率为

$$p = 99.7\%$$

表明真值落入 $\overline{x} \pm 3s(\overline{x})$ 范围内的概率为 99.7%。

由前面可以看出，偏差的不同估算方法表明真值落入在该区间内的概率不同。如不指明置信概率我们就无法判断一个测量结果的优劣。

### 2.3.3 相对偏差

相对偏差用 $E$ 表示，定义为绝对偏差除以算术平均值再乘以 100% ，即

$$E = \frac{s(\overline{x})}{\overline{x}} \times 100\% \tag{2.3.5}$$

### 2.3.4 测量结果的表示

计算出了算术平均值及误差，又知其概率，则其测量结果的表达式为

$$x = \overline{x} \pm s(\overline{x})(\text{单位}) \qquad (p = 68.3\%, n = \quad) \tag{2.3.6}$$

$$E = \frac{s(\overline{x})}{\overline{x}} \times 100\%$$

或

$$x = \overline{x} \pm \eta(\overline{x})(\text{单位}) \qquad (p = 57.4\%, n = \quad)$$

$$x = \overline{x} \pm 3s(\overline{x})(\text{单位}) \qquad (p = 99.7\%, n = \quad)$$

以上三种表示使用任一种都可以，因为上面的三种表示没有原则差别，但一定注意必须写明 $p=?$ $n=?$ 否则结果就没有意义了。

表 2.3.1 给出了分别用误差 $\delta_i = x_i - x_0$ 和残差 $\nu_i = x_i - \overline{x}$ 表示的误差计算公式。

**表 2.3.1 误差计算公式**

| | 用误差 $\delta_i = x_i - x_0$ 表示法 | | 用残差 $\nu_i = x_i - \overline{x}$ 表示法 | |
|---|---|---|---|---|
| | 测量列误差 | 平均值误差 | 测量列误差 | 平均值误差 |
| 标准误差 | $\delta = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}}$ | $\delta_{\overline{x}} = \dfrac{\delta}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}}{n}$ | $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2}{n-1}}$ | $s(\overline{x}) = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2}{n(n-1)}}$ |
| 平均误差 | $\eta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\|\delta_i\|}{n} = 0.7979\delta$ | $\eta_{\overline{x}} = \dfrac{\eta}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\|\delta_i\|}{n\sqrt{n}} = 0.7979\delta_{\overline{x}}$ | $\eta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\|\nu_i\|}{n(n-1)} = 0.7979s$ | $\eta(\overline{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\|\nu_i\|}{n\sqrt{n-1}} = 0.7979s(\overline{x})$ |
| 极限误差 | $\delta_{\max} = 3\delta$ | $\delta_{\overline{x}\max} = \dfrac{\delta_{\max}}{\sqrt{n}} = 3\delta_{\overline{x}}$ | $\delta_{\max} = 3s$ | $\delta(\overline{x})\max = 3s(\overline{x})$ |
| | $x_i$ 为随机变量 $x$ 的 $n$ 个观测值，$x_0$ 为真值 | | $\overline{x}$ 为平均值 $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ | |

值得提出的是，实验标准差 $s$ 并不是总体标准差或概率分布标准差 $\sigma$ 的无偏估计，而是它的有偏估计。而方差 $s^2$ 才是总体方差 $\sigma^2$ 的无偏估计或最佳估计。因此数理统计中，总以

$s^2$ 作为分散性的测度，$s^2$ 是基本的量，但实际工作中使用标准差 $s$ 更方便。这是因为它是方差的正平方根，并具有与 $x$ 相同的量纲。

### 2.3.5 单次测量的误差

在实验过程中有时条件不允许重复测量，或测量精度不高，不需重复测量。由于仅测量一次，很明显无法用上述公式来估算偏差。下面就介绍一下单次测量时偏差的估算。

(1) 固定性误差

多数级别较低的仪器如电表、温度计和游标卡尺等多采用固定性误差来表示仪器允许误差的大小。一般由仪器说明书给出本仪器的最大允许误差。例如，某一钢直尺规定的最大允许误差为 0.2cm，则用此钢直尺测量某物的长度时，只测量一次，它的测量误差应为 ±0.2cm。有时固定性误差也可表示为

$$\Delta X = bX_0 \tag{2.3.7}$$

式中，$X_0$ 为仪器的最小刻度值；$b$ 为一个小于 1 的数，通常为 1/10、1/5 或 1/2，可根据实际情况来决定。

(2) 积累性误差

多数级别较高的仪器如电桥，电位差计，以及经过逐点校正的高级电表等多采用积累性误差来表示仪器的结构误差。它通常表示为

$$\Delta X = X \times a\% \tag{2.3.8}$$

式中，$X$ 为这次测量的测量值；$a$ 为此仪器的级别；$\Delta X$ 即为这次测量的测量误差，根据上式可知，这种误差的大小随测量值的增加而增大，所以称之为积累性误差。

为了说明方便，举例如下。

如用 UJ 31 型电位差计来测量电位差。某次测量测得电位差为 120.05mV，另一次测得电位差为 160.06mV，现利用上式来计算这两次测量的测量误差。

首先查阅仪器说明书，找到它的仪器级别，如此电位差计的级别为 $a = 0.05$。则利用

$$\Delta V = V \times a\% \text{ 可知}$$

$$\Delta V_1 = 120.05 \times 0.05\% = 0.06 \text{ mV}, \Delta V_2 = 160.06 \times 0.05\% = 0.08 \text{ mV}$$

所以两次测量的结果应为

$$V_1 = (120.05 \pm 0.06) \text{ mV}, V_2 = (160.06 \pm 0.08) \text{ mV}$$

(3) 平衡调节误差

平衡检测是实验中常用的检测方法之一，天平是其中最典型的例子。下面以天平为例来讨论这种平衡检测误差的估算方法。天平的称量过程是平衡调节的过程，称量的精度在很大程度上取决于天平的调节灵敏度。定义调节灵敏度 $S = \frac{\Delta n}{\Delta m}$，$\Delta m$ 是天平的平衡位置附近增减的质量，$\Delta n$ 为指针偏转的格数。$\frac{1}{S}$ 即为天平感量。

由于调节灵敏度有限而引起的误差成为平衡调节误差，以 $\Delta m_S$ 来表示这种来源于平衡判断的误差，当确认指针已达到平衡时，就认为平衡状态已实现。但事实上由于仪器的灵敏度所限制，仪器可能没有达到平衡状态，所以实际上这种判断必然存在一定的误差。

$$\Delta m_S = \frac{c}{S} \tag{2.3.9}$$

式中，$S$ 为调节灵敏度；$c$ 为某一常数。

在一般情况下，仪器的结构误差应该是上述三部分误差的总和