概率论与随机过程

胡细宝　孙洪祥　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 摘 要

本书介绍了概率论与随机过程的基本概念、基本理论和方法。内容包括：随机事件及其概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，极限定理，随机过程的基本概念，马尔可夫过程，平稳过程，平稳过程的谱分析，每章均附有习题，供学生练习之用。

本书是高校工科、理科（非数学系）“概率论与随机过程”课程的教材。本书也可作为高等学校理工科各专业本科学生及教师的教材和教学参考书，也可供科技工作者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与随机过程/胡细宝，孙洪祥编著．北京：北京邮电大学出版社，2001.2

ISBN 7-5635-0435-4

Ⅰ．概… Ⅱ．①胡…②孙… Ⅲ．①概率论②随机过程 Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 01788 号

书　　名：概率论与随机过程
编　　著：胡细宝　孙洪祥
责任编辑：马相平
出 版 者：北京邮电大学出版社（北京市海淀区西土城路 10 号）
　　　　　邮编：100876　电话：62282185　62283578
　　　　　网址：http://www.buptpress.com
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京源海印刷厂
印　　数：1－4000 册
开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32　印张：10.5　字数：261 千字
版　　次：2001 年 2 月第 1 版　2001 年 2 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5635-0435-4/O·28-4
定　　价：18.00 元

前　言

在高等学校理工科专业的数学教育体系中,"概率论与随机过程"一直是一门很具特色又具重要地位的工程数学课。当前,改革之风正吹遍高等教育界,课程重组,内容改造与学时调整的呼声日益高涨,在此形势下北京邮电大学理学院数学部对概率论与随机过程的教学进行了改革探索,本书的出版也是一个改革探索的结果。

面对科学技术的迅速发展以及对人才要求的提高,北京邮电大学理学院数学部多年来一直在组织力量探索数学课程新的内容体系和教学方法。概率论与随机过程是北京邮电大学各专业学生必备的基础课,我们结合本课程特点及各专业的特点对概率论与随机过程的教学进行了大胆而有益的改革探索与实践,在些基础上编写出了这本教材。我们在编写过程中力图做到:(1) 培养学生对随机现象的理解及概率的直觉,注重数学观念的直观背景和数学概念的直观理解。比如在讲述概率论中独立性、相依性、条件概率等这些重要概念时,我们不仅花了较大篇幅论述其直观背景与直观含义,而且还举了许多实际例子。又如在介绍概率的公理化定义之前,我们全面介绍了概率的几种定义(统计定义、古典定义、几何定义),使学生了解人类形成的丰富的概率思想。(2) 提高学生的数学修养及严密的思维能力,加强教材内容的系统性与严谨性。比如本书中我们较系统地介绍了概率的公理化定义并引入了概率空间这一现代概率论的理论框架,这样既可以使学生初步了解现代数学思想及处理方法,也可以使学生为进一步深造打

下较好的理论基础。

本书第一章至第五章概率论部分由胡细宝编写，第六章至第八章随机过程部分由孙洪祥编写。编写过程中得到了北京邮电大学姜炳麟教授、王玉孝教授、闵祥伟副教授的关心与帮助，并得到了北京邮电大学出版社的大力支持，在些一并表示衷心的感谢。

限于编者水平，书中不足与错误在所难免，希望广大读者批评指正。

编者

2001年1月

目　　录

第一章　随机事件和概率

本章将引入随机试验、随机事件、随机事件的概率诸概念。由此引入概率论中的基本框架——概率空间。这里核心问题是随机事件概率的概念和计算。

§1.1　随机试验，随机事件和样本空间

在自然界和人类社会中存在着两类现象，一类是确定性现象，即在一定条件下必然发生的现象。例如，"同性电荷互斥"，"在标准大气压下，纯水加热到100℃必然会沸腾"，等等；另一类现象是非确定性现象，即在一定条件下可能发生这样的结果，也可能发生那样的结果。例如，在相同条件下抛一硬币可能是正面朝上，也可能反面朝上，其结果事先是不确定的。用同一仪器在相同条件下测量某一物体的重量，每次称重的结果都略有差异。炮手用同一门炮向同一目标射击，各次的弹道点不尽相同，等等。这类现象和确定性现象有着本质的区别。虽然表面上这类现象杂乱无章，然而人们经过长期的实践与观察发现这类现象是有规律可循的。例如，大量重复抛一硬币得正面朝上与反面朝上的次数大体相同。同一射手用同一门炮向同一目标射击，弹道点按一定规律分布。气体的分子运动是杂乱无章的，但大量气体分子的运动有其规律性，等等。这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律，就是我们以后所说的统计规律性。

在个别试验中其结果呈现出不确定性；在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，我们称之为随机现象。概率论是

研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

一、随机试验

我们遇到各种试验。在这里我们把试验作为一个含义广泛的术语。它包括做一科学实验,也包括进行一次测量,或一次抽样观察。

概率论中讨论具有如下特点的试验:

(1) 在相同条件下可重复进行。

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果。

(3) 进行一次试验之前,不能确定会出现哪一个结果。

具有以上三个特点的试验称为随机试验,常用 E 表示。随机试验简称为试验。下面给出几个随机试验的例子。

E_1: 抛一硬币,观察正反面出现的情况。

E_2: 将一硬币抛三次,观察正面 H,反面 T 出现的情况。

E_3: 将一硬币抛三次,观察正面出现的次数。

E_4: 掷一骰子,观察出现的点数。

E_5: 记录某寻呼台在午间 1:00—2:00 间接到的寻呼次数。

E_6: 从一批电脑中,任取一台观察无故障运行时间。

E_7: 向一平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 10\}$ 内随机投掷一点,观察落点 P 的坐标(假定点必落在 D 上)。

由以上例子可知,随机试验是产生随机现象的过程,随机试验和随机现象是并存的。我们也正是通过研究随机试验来研究随机现象的。

二、随机事件

随机试验的某种结果称为随机事件,简称事件。一般用大写

字母 A,B,C 等表示。例如在 E_1 中{出现正面},{出现反面}都是 E_1 的某种结果,它们都是 E_1 的随机事件,再如在 E_4 中{出现点数1},{出现偶数点},{出现的点数不超过3},在 E_6 中{电脑的无故障运行时间超过1 000小时}……等也都是随机事件。

事件又分为基本事件和复合事件。基本事件是指试验的一个基本结果。这里所说的基本结果是指在试验的条件和观察目的下能直接观察到的简单结果。例如在 E_4 中{出现点数 i},$i=1,2,3,4,5,6$ 都是基本事件,在 E_5 中{接到1次寻呼},{接到2次寻呼},…,{接到 n 次寻呼}都是基本事件。再如在观察某射手的射击结果时,{中靶},{脱靶}也是基本事件。复合事件是由若干个试验的基本结果组成的事件。例如在 E_4 中{出现偶数点}、{出现的点数不超过3},在 E_5 中{接到的寻呼次数超过10},在 E_6 中{电脑的无故障时间超过1 000小时}等都是复合事件。但应注意,区分事件为基本事件和复合事件是相对于具体试验的观察目标而言的,不可绝对化。例如{正面恰好出现一次}既是 E_2 的事件也是 E_3 的事件,它是 E_3 的基本事件而在 E_2 中它是复合事件。在 E_6 中如规定电脑的无故障运行时间超过1 000小时为正品,当我们观察电脑是正品还是次品时,{电脑为正品}={电脑无故障运行时间超过1 000小时}则是一基本事件,再如当两位赌徒掷一骰子,以出现奇数点还是偶数点决定输赢的场合下,{出现奇数点}及{出现偶数点}都是基本事件。

随机事件中有两个极端情况:一个是每次试验中都必然发生的事件,称为必然事件,记为 Ω。再一个是每次试验中都不发生的事件,称为不可能事件,记为 ϕ。例如在 E_4 中{出现的点数不超过6}是必然事件,{出现的点数超过6}是不可能事件。必然事件和不可能事件已无随机性可言,但为了方便,把它们视为随机事件的特例。正如微积分中常数可视为变量的特例。

三、样本空间

为了用数学方法描述随机现象及随机事件，需要样本空间的概念。

试验 E 的所有基本结果构成的集合称为样本空间，记为 Ω，Ω 中的元素即 E 的每个基本结果称为样本点，记为 ω，即 $\Omega=\{\omega\}$。

例 1.1 给出随机试验 E_1-E_7 的样本空间。

解 $\Omega_1=\{H,T\}$

$\Omega_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$

$\Omega_3=\{0,1,2,3\}$

$\Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega_5=\{0,1,2,\cdots\}$

$\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\}$

$\Omega_7=\{(x,y)\}\mid x^2+y^2\leqslant 10\}$

要注意的是：在描述各个不同的试验时，我们不仅要规定正要进行的程序，而且要规定什么是我们所观察的。例如 E_2 和 E_3 同是将一硬币抛三次，但由于观察目的不同，它们视为不同的随机试验，因而它们的样本空间也不一样。

有了样本空间的概念后，我们可将随机事件表示为样本空间中的某些样本点的集合，即表示为样本空间 Ω 的子集。例如 E_4 的样本空间为 $\Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\}$，事件 $A_i=\{$出现点数 $i\}$，$i=1,2,\cdots,6$，$B=\{$出现偶数点$\}$，$C=\{$出现的点数不超过 3$\}$ 可表示为 Ω_4 的子集：$A_i=\{i\}\ i=1,2,\cdots 6$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{1,2,3\}$。在 E_7 中事件 $A=\{$落点与原点的距离不超过 1$\}$ 可表示为 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，它是 Ω_7 的子集。

基本事件是样本空间的单点集。复合事件是由多个样本点组

成的集合。必然事件包含一切样本点，它就是样本空间 Ω。不可能事件不含任何样本点，它就是空集 ϕ。

所谓事件 A 发生，是指在一次试验中，当且仅当 A 包含的某个样本点出现。

四、事件间的关系及其运算

事件是一集合，因此事件之间的关系及其运算可用集合之间的关系和运算来处理。下面我们通过例子加以说明。

例 1.2 从一批产品中任取 8 件，观察其中的正品件数，则这一试验的样本空间为

$$\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

我们引入下列随机事件

$A = \{$正品件数不超过 3$\} = \{0,1,2,3\}$

$B = \{$取到 2 件或 3 件正品$\} = \{2,3\}$

$C = \{$取到 2 至 5 件正品$\} = \{2,3,4,5\}$

$D = \{$取到的正品件数不少于 2 且不多于 5$\} = \{2,3,4,5\}$

$E = \{$取到的正品件数至少为 4$\} = \{4,5,6,7,8\}$

$F = \{$取到的正品件数多于 4$\} = \{5,6,7,8\}$

设 Ω 为试验 E 的样本空间，$A, B, A_k (k = 1,2,\cdots)$ 为随机事件。

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A。此时 A 中的样本点一定属于 B。记为 $A \subset B$。

如在例 2 中 $B \subset A$，$F \subset E$。

显然对任意事件 A 都有 $\phi \subset A \subset \Omega$。

若事件 A 与 B 满足 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A = B$。

例如在例 2 中 $C=D$。

2. 事件的和

"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"是一事件，称该事件为事件 A 与事件 B 的和(并)事件，记为 $A\cup B$。事件 $A\cup B$ 是由 A 或 B 的样本点组成的集合。

例如在例 1.2 中 $A\cup C=\{0,1,2,3,4,5\}$。

一般地，"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"是一事件，称为 $A,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。

当涉及无穷多个事件时，可把事件和推广到可列无穷(集合可列无穷是指集合中的元素与自然数集建立一一对应的关系)多个事件的场合，即引进事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$"表示 $A_1,A_2,\cdots\cdots$诸事件中至少有一个发生"。

3. 事件的积

"事件 A 与事件 B 同时发生"是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的积(交)事件，记为 $A\cap B$ 或 AB。积事件 AB 是由 A 与 B 的公共样本点所构成的集合。

例如在例 1.2 中，$AC=\{2,3\}$，$AF=\phi$。

与和事件情形相同，可把积事件的概念推广至 n 个事件及可列无穷多个事件的场合。即"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$，也可简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$。在可列无穷的场合，用 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"$A_1,A_2,\cdots\cdots$诸事件同时发生"。

4. 互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，则称 A 和 B 是

互不相容的或互斥的。基本事件是两两互不相容的。

例如在例 1.2 中，A 与 F 互不相容，B 与 E 是互不相容的。

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都互不相容，即 $A_iA_j = \phi(i \neq j, i, j = 1,2,\cdots n)$，则称这 n 个事件互不相容

5. 对立事件

若 A，B 互不相容，且它们的和事件为必然事件，即 $AB = \phi$ 且 $A \cup B = \Omega$，则称 A 和 B 互为对立事件，或称 A 与 B 互为逆事件。事件 A 的逆事件记为$\overline{A}$。$\overline{A}$ 表示“A 不发生”这一事件。

例如在例 1.2 中 A 与 E 互为逆事件，即 $\overline{A} = E$，$\overline{E} = A$。

A 与 B 对立，是指事件 A 与事件 B 既不能同时发生又必然有一个发生，即在每次试验中 A 与 B 有且只有一个发生。显然有

$$\overline{\overline{A}} = A, A\overline{A} = \phi, A \cup \overline{A} = \Omega, \overline{\Omega} = \phi, \overline{\phi} = \Omega$$

由定义可知，对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容的两个事件未必是对立事件。

6. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的差事件。记为 $A - B$。

例如在例 1 中 $A - B = \{0,1\}$，$B - A = \phi$，$C - A = \{4,5$

差事件 $A - B$ 是由属于 A 而不属于 B 的样本点组成的集合。显然有

$$A - B = A\overline{B} = A - AB, \overline{A} = \Omega - A$$

对于任意两事件 A，B，总有如下分解

$$A = AB \cup A\overline{B}, A \cup B = A \cup (B\overline{A}) = B \cup (A\overline{B})$$

为了帮助大家理解上述概念，现把集合论中的集合的关系和运算与概率论中的事件的关系和运算对应起来，如表 1.1 所示。

表 1.1

符　号	集合论	概率论
Ω	全 集	样本空间:必然事件
ϕ	空 集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω 中的元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A\subset B$	集合 B 包含 A	事件 B 包含事件 A (事件 A 发生则事件 B 必发生)
$A=B$	集合 A 与集合 B 相等	事件 A 与事件 B 相等
$A\cup B$	集合 A 与集合 B 的并集	事件 A 与事件 B 的和事件 (事件 A 与 B 至少有一个发生)
$A\cap B$	集合 A 与集合 B 的交集	事件 A 与事件 B 的积事件 (事件 A 与 B 都发生)
$A-B$	集合 A 与集合 B 的差集	事件 A 与事件 B 的差事件 (事件 A 发生而 B 不发生)
$\overline{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的逆事件或对立事件 (A 不发生)
$AB=\phi$	集合 A 与集合 B 没有公共元素	事件 A 与事件 B 互不相容或互斥 (A,B 不能同时发生)

以上事件间的关系与运算可用文氏(Venn)图来直观地表示。若用平面上的一个矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示样本点,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,则 A 与 B 的关系和运算如图 1.1(a)~(f)所示。