SHUXUE GUINAFA ZONGHENGTAN SHUXUE GUINAFA ZONGHENGTAN

数学归纳法纵横谈

夏兴国

河南科学技术出版社

数学归纳法纵横谈

夏兴国

河南科学技术出版社

豫新登字 02 号

内 容 简 介

本书首先从有趣的例子入手，以浅近的语言讲述了数学归纳法的基本原理，接着逐步深入，分析了初学者易陷入的误区及其原因，并进一步给出了数学归纳法的理论背景；在《高考园地》中，分门别类地给出了近10年来高考数学试题中有关数学归纳法的几乎全部题目的分析、详解和评注；在《竞赛技艺》中，作者以深湛的数学理论素养和丰富的经验，在中学数学竞赛的水平上，结合大量例题，深入讨论了“第二数学归纳法”、“双基归纳法”、“大跨度归纳法”、“分段归纳法”、“曲线归纳法”、“多参数处理方法”等一系列数学归纳法的变着和各种解题技巧，并提出了一系列重要的数学思想.

书中所有例题都有详尽深入的分析和评注，各节后面多附有习题和难题提示.

本书是为中学生们写的，对中学教师和大学生也颇富教益.

数学归纳法纵横谈

夏兴国

责任编辑　袁元

河南科学技术出版社出版
（郑州市农业路73号）
河南第一新华印刷厂印刷
河南省新华书店发行
787×1092 毫米　32 开本　6 印张　121 千字
1993年4月第1版　1993年2月第1次印刷
印数：1— 7050 册
ISBN7－5349－1147－8/T · 237
定　价：　3.50 元

前　言

自然数是无穷的.一个与自然数n有关的命题当$n=1$时表示一个命题,当$n=2$时又表示一个命题,如此等等,无穷无尽.因此,一个与自然数n有关的命题本质上包含了无穷多个命题.

假如我们对于这无穷多个命题,按部就班地一个一个去证,那么不管我们证题的速度有多快,也是今生今世证不完的.毕竟"人生有限,数目无穷",徒叹奈何?

然而,人不愧为万物之灵.君不见牙牙学语的幼儿学识数,先学会数一、二、三,过些时日数到十,又过些时日,便能数到百了……你根本无需担心,他何日才能彻底学会数数,一定会有那么一天,你突然发现,他领悟了,他说:"我什么数都会数了."

在一个与自然数n有关的命题面前,作为万物之灵的人,也发明了一种方法,叫做"数学归纳法".人们运用此法,只须寥寥几步,像变戏法似的,便把无穷多个命题一个不剩地全都证完了.

无怪乎初学数学归纳法的人,常对数学归纳法产生一种神奇感:有限的几步,竟跨越了无限的空间,好不神奇!

当我动笔写这本书的时候，当初的那种神奇感记忆犹新．当初，我们兴奋着、思考着、探索着，一个一个的问题接踵而来：为什么数学归纳法要规定这么几步？为什么这么几步能保证无穷多个命题都成立？它凭什么可以从有限跨越无限？

而今转眼已经三十几个春秋，但我对数学归纳法的思索依然没有停止——数学归纳法常与哪些类命题挂钩？数学归纳法是归纳还是演绎？运用数学归纳法涉及哪些知识？运用数学归纳法常有哪些技艺？数学归纳法究竟有多少变种？运用数学归纳法的功夫在哪里？

当初，我像一个初到海边的游人，迎着海上吹来的劲风，听着如雷贯耳的长啸，看着澎湃汹涌的浪潮，完全沉浸在海的神奇之中．而今仿佛在海边住久了，和海交上了朋友，除了海的狂暴、海的汹涌、海的长啸、海的风云之外，还听到海浪和谐动听的音符和潮头富有情感的节奏，感觉到海的热情、海的温馨、海的朦胧和海的深沉．

不管任何事情，只要你和它接触多了，思索多了，就会了解到更深层的东西，从而产生一种情感，一种油然而生的创作激情．这就是我写本书的初衷．

这本书是为青年学生而写的．全书共分三章：第一章《从游戏到原理》，力图用比较浅近的语言，通过饶有兴味的游戏，把数学归纳法那神奇的原理送到青年学生的眼前；第二章《高考园地》，分析了十年来高考中有关数学归纳法的试题，告诉青年学生，如果你有志于继续深造，社会将如何要求你；第三章《竞赛技艺》，探讨了数学竞赛中的数学归纳法，你将看到使

用数学归纳法的各种变着和技巧，你将明白数学竞赛在哪些地方比高考的要求更高. 当你读完全书的时候，你会意识到：数学归纳法不仅仅是几个步骤，数学也不仅仅是公理、定义、定理、习题，数学归纳法乃至整个数学包括了数学家在发现和创造这些理论和方法时的全部智慧和经验. 我希望青年学生能喜欢这本书，更希望青年学生能由此产生一股勃发的朝气，更深一层地去体察数学的内涵和思想，为开拓科学的未来去拼搏.

感谢所有在数学归纳法的园地里耕耘过的诸多作者们. 他们的作品在各个不同方面启迪了我的思维，成为我写作本书的重要基础.

本书如有不妥之处，恳请教正，恳请研讨.

夏兴国

1992 年 4 月

夏兴国 浙江宁波人，1942年生，1962年毕业于新乡师范学院数学系．曾多次担任中国数学奥林匹克代表队教练．现任河南师范大学数学系副教授，数学教育教研室主任，中国数学会普及工作委员会副主任．

目　录

第一章　从游戏到原理 …… (1)

§1　迷人的"多米诺" …… (1)

§2　命题的长蛇阵 …… (4)

§3　智慧的闪光 …… (7)

§4　初试锋芒 …… (10)

§5　误区 …… (14)

§6　递推构思 …… (19)

§7　三证恒等式 …… (23)

§8　恒等式的来历 …… (27)

§9　重组法 …… (30)

* §10　理论背景 …… (34)

第二章　高考园地 …… (37)

§1　代数恒等式 …… (37)

§2　不等式 …… (44)

§3　三角函数 …… (58)

§4　归纳 …… (66)

§5　待定系数法 …… (74)

第三章　竞赛技艺 …… (81)

§1 第二数学归纳法…………………………………（81）
§2 双基归纳法……………………………………（90）
§3 大跨度归纳法…………………………………（99）
§4 分段归纳法 ……………………………………（106）
§5 曲线归纳法 ……………………………………（114）
§6 多参数处理方法 ………………………………（125）
§7 优化假设 ………………………………………（131）
§8 强化命题 ………………………………………（138）
§9 顺势分流 ………………………………………（150）
§10 返璞归真 ………………………………………（160）
§11 功夫在法外 ……………………………………（170）

第一章　从游戏到原理

数学归纳法是高考、竞赛、学习高等数学乃至进行现代数学研究的一种重要的演绎方法.

为了真正弄清数学归纳法的原理,我们先从一个十分有趣的游戏谈起.

§1　迷人的“多米诺”

1979年6月9日,英国伦敦.

一群记者和上千名热情的观众静静地注视着一个人,急切地等待着一项基尼斯世界纪录的诞生.

这个人名叫迈克·凯尼,是一个23岁的小伙子.

此刻,他望着自己花了整整13天的时间,用了169713块骨牌所搭出的一个长达6900米的多米诺牌阵,长长地松了一口气.

他脸上挂着微笑,心中却不平静,创造基尼斯世界纪录的梦想今天就要实现了.

但是,有把握吗?

骨牌很像普通的麻将牌或陆战棋棋子,用数学眼光看,它

就是一个实心的长方体，由于长、宽、高不等，因此平放的时候，重心低，怎么推也不会倒，而立起来的时候，重心升高，用一个手指轻轻一推，它就倒下来了.

如果把两个骨牌立起来，放得位置适当，那么就可以使第一块骨牌倒下时正好压在第二块骨牌上，让第二块骨牌也跟着倒下.

如果把三块骨牌立起来，放得位置适当，那么当第一块骨牌倒下时将压在第二块骨牌上，使第二块骨牌跟着倒下，而它又将压在第三块骨牌上，使第三块骨牌跟着倒下.

迈克·凯尼清楚地记得，初次玩多米诺骨牌游戏时，他用手指轻轻地推倒了第一块骨牌，接着数十块骨牌一个接一个地倒下了.尽管现在他已是玩多米诺骨牌游戏的老手了，但是那种初次亲手制造神秘的多米诺现象时的紧张与兴奋感，却至今难以忘怀.

迈克·凯尼深深地懂得，玩多米诺骨牌的关键是要把每一块立起来的骨牌按顺序一个接一个地放到适当的位置上.所谓位置适当，指的是当其中任何一块骨牌倒下时，都会正好倒在下一块骨牌上，并使下一块骨牌跟着倒下.

如果做到了这一点，那么只要用手指轻轻推倒第一块骨牌，就会使第二块骨牌、第三块骨牌……直到最后一块骨牌一个接一个地倒下来.

但是，迈克·凯尼现在已经摆上了169713块骨牌，万一有一块骨牌没有摆好，当它的前一块骨牌倒下时，不能使它跟着倒下，那么在它之后的所有骨牌就都不会倒下，于是，精心

设计的多米诺现象就会到此终止，梦寐以求的基尼斯世界纪录就会远离自己而去，上千观众的热情何以相报？

想到这里，迈克·凯尼的心骤然一阵紧张.

决定性的时刻终于到了.迈克·凯尼环顾一下四周的观众，稳定一下自己的情绪，健步走到第一块骨牌前，用一个手指轻轻地推倒了它，奇迹出现了——将近17万块骨牌组成的长达6900米的多米诺阵在半小时内统统倾覆.

在全场欢声雷动的时刻，迈克·凯尼眼里噙着泪水笑了.

迈克·凯尼的名字以多米诺骨牌个人纪录保持者的名义载入了《基尼斯世界之最大全》.

多米诺骨牌的团体纪录是美国人约翰·维克汉和埃勒丝·克莱恩在1980年8月24日在日本创下的.他们花了35天时间，用了255389块骨牌，摆下了壮观的多米诺牌阵，电视台实况转播了这个多米诺阵在53分钟内全部倾覆的动人场面.

读者不妨自己去摆一个多米诺阵，没有骨牌可以用陆战棋棋子、麻将牌或砖块代替.

下面读者就会发现，神奇的多米诺现象竟然与数学中一个极其重要的证明方法——数学归纳法如出一辙，并且摆多米诺阵的人应该注意的关键问题竟然也同使用数学归纳法的人应该注意的关键问题神似韵合.因此迈克·凯尼曾经经历过的紧张和兴奋也会在使用数学归纳法的人身上重现.

思考题

1. 骨牌游戏中的多米诺现象与燃放鞭炮在哪一点上是类似的？

2. 请再举一个与骨牌游戏中的多米诺现象类似的实例.

---

§2　命题的长蛇阵

先看一个命题.

试证：任意 $n+1$ 个(其中 n 为自然数) 给定的正方形，都可以把它剪成适当的形状后，拼成一个大正方形.

我们可以把这个命题看成是无穷多个命题组合而成的，这无穷多个命题列举如下：

命题 1：任意两个给定的正方形，可以把它剪成适当的形状后，拼成一个大正方形.

命题 2：任意 3 个给定的正方形，可以把它剪成适当的形状后，拼成一个大正方形.

命题 3：任意 4 个给定的正方形，可以把它剪成适当的形状后，拼成一个大正方形.

命题 4：任意 5 个给定的正方形，可以把它剪成适当的形状后，拼成一个大正方形.

……

命题 k：任意 $k+1$ 个给定的正方形，可以把它剪成适当的形状后，拼成一个大正方形.

命题 $k+1$：任意 $k+2$ 个给定的正方形，可以把它剪成适当的形状后，拼成一个大正方形.

……

上述无穷多个命题排成了一个命题的长蛇阵，它像无穷多个骨牌，一个接着一个地摆放在那里.

如何证明这无穷多个命题呢？

命题 1 的证明：

当两个正方形边长相同时，可将每个正方形沿对角线剪开，再将所得的 4 个等腰直角三角形的直角顶点重合，就可拼成一个大正方形(图 1).

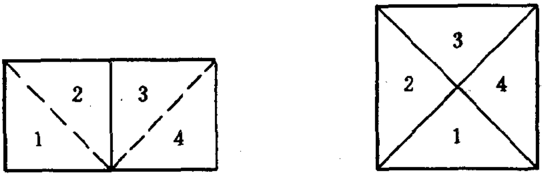

图 1

当两个正方形边长不同时，不妨设边长为 a,b，且 $a>b$. 由于两个正方形的面积之和是 a^2+b^2，因此拼成的大正方形的边长应是 $\sqrt{a^2+b^2}$，这是以 a,b 为直角边的直角三角形的斜边. 根据这一点，我们不难找到如图 2 所示的剪拼方法. 命题 1 得证.

命题 2 的证明：

根据命题 1，可将给定的前两个正方形拼成一个较大的正方形，再将所得的较大的正方形与所剩的一个正方形拼成一个大正方形，命题 2 得证.

命题 3 的证明：

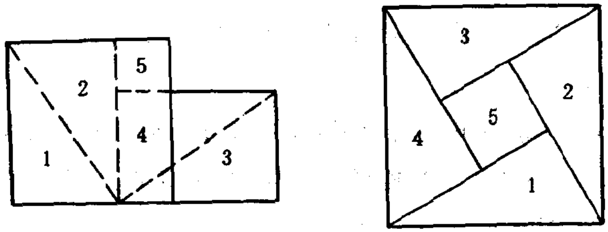

图 2

根据命题2,可将给定的前3个正方形拼成一个较大的正方形,再将所得的较大的正方形与所剩的一个正方形拼成一个大正方形.命题3得证.

命题4的证明:

根据命题3,可将给定的前4个正方形拼成一个较大的正方形,再将所得的正方形与所剩下的一个正方形拼成一个大正方形.命题4得证.

从命题2、3、4的证明中,读者不难通过比较看出:

把命题2证明中的"1"改成"2","2"改成"3",就得到命题3的证明;

把命题3证明中的"2"改成"3","3"改成"4",就得到命题4的证明.

读者不妨想一想,命题5是什么?如何证明命题5?

显然,把命题4中的"5"改成"6",就得到命题5;而把命题4证明中的"3"改成"4","4"改成"5",就得到命题5的证

明.

继续这个过程，我们可以依次证明命题6、命题7、命题8、……. 也就是说，我们可以证明这一系列命题中的任何一个命题. 因此，本节一开始给出的命题，当 n 是任意自然数时都是正确的.

我们艰难地一步一步前进，终于看到了希望，看到了成功.

习　题

1. 仿照本节的写法，将下列命题按 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 的顺序写成一个命题长蛇阵：

   在一个正方形的纸上有 n 个点，已知这 n 个点连同正方形的 4 个顶点，其中任意 3 点都不共线. 试证：至多可以剪得顶点属于上述 $n + 4$ 个点的三角形纸片 $2n + 2$ 个.

2. 依次证明你写出的命题长蛇阵中每一个命题，并且要求利用上一个命题证明下一个命题.

---

§3　智慧的闪光

在上一节中，我们把一个与自然数有关的命题写成了一个命题长蛇阵，然后依次来证明它们. 这种方法显然给人一种繁琐冗长的感觉.

怎么办？

自从有人类以来，人的占体重1/50的大脑始终在思维着.

人的思维，破译了多少宇宙的文字，创造了多少人类的文明，建筑了多少科学的殿堂，发现了多少自身的奥秘！

现在应该开动思维的机器，摸索规律，设法改进上述证明方法.

我们可以看到，从命题2开始，命题长蛇阵中的每一个命题都是在前一个命题成立的基础上被证明的，并且证明的方法十分类似. 也就是说，命题 $k+1$ 是在命题 k 成立的基础上被证明的（其中 k 是任意的自然数）. 因此我们可以把命题 $k+1$ 的证明叙述如下：

根据命题 k，可将给定的前 $k+1$ 个正方形拼成一个较大的正方形，再将所得的较大的正方形与所剩下的一个正方形拼成一个大正方形. 故命题 $k+1$ 得证.

显然，当 $k=1$ 时，命题 $k+1$ 的证明正是上一节中命题2的证明；当 $k=2$ 时，命题 $k+1$ 的证明正是上一节中命题3的证明；当 $k=3$ 时，命题 $k+1$ 的证明正是上一节中命题4的证明……. 也就是说，命题 $k+1$ 的证明实质上已经表示了除命题1的证明以外的所有其它命题的证明.

因此，我们处理命题长蛇阵的方法可以改用以下两步：

1. 证明命题1成立；

2. 根据命题 k 成立，推出命题 $k+1$ 成立.

由第一步可知命题1成立；