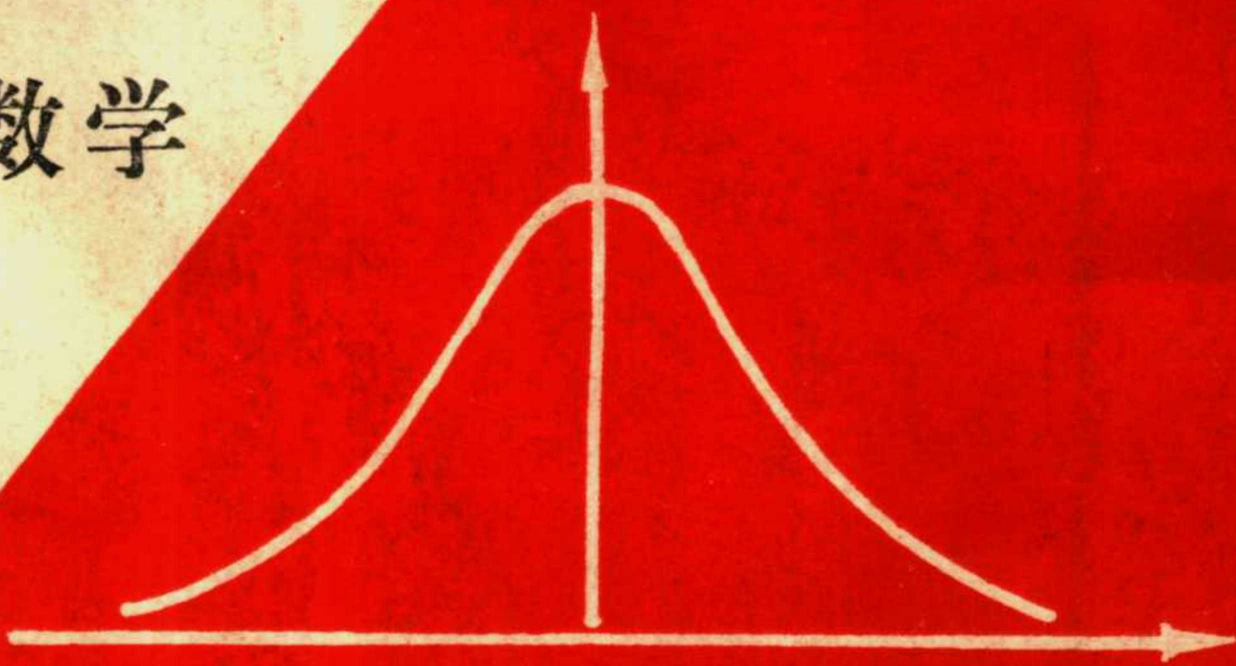
概率论与应用统计

《经济管理应用数学》编委会

经济管理数学

4



成都科技大学出版社

经 济 管 理 数 学（四）

概率论与应用统计

《经济管理数学》编委会编著

成都科学技术大学出版社

一九八九年·成都

概 率 论 与 应 用 统 计
《经济管理数学》编委会编著

成都科技大学出版社出版
四 川 省 新 华 书 店 发 行
（成 都 盐 道 街 三 号）
四川省德阳市罗江印刷厂印刷
ISBN 7-5616-0369-X/TB·20(课)

开本787×1092毫米 1/32　印张：12.25
1989年5月第1版　1989年5月第1次印刷
字数：256千字　印数：1—2000册
定　价：4.80元

前 言

在"改革、开放"的新时期，经济管理和决策的现代化更加迫切。在经济计划、管理、预测和决策中，大量使用数学方法是管理决策现代化的标志之一。在我国，实现管理决策现代化的根本途径是培养大批现代化管理人材。

许多高等院校有关管理专业已经开设了高等数学、线性代数、概率论与数理统计、运筹学等课程。对于一些文理交叉学科、边缘学科和新兴的管理学科，如经济信息管理（管理信息系统）、数量经济、计划统计、企业管理等专业，对数学方法有更高的要求。为适应这一要求，由西南财经大学、中南财经大学、东北财经大学、上海财经大学、天津商学院、北京经济学院、北京商学院、北京信息工程学院、湖南财经学院、广东商学院、浙江财经学院，沈阳财经学院等十二所院校有关专业的教师编写了这套《经济管理数学》教材，计为《高等教学（上、下）》、《线性代数》、《概率论与应用统计》、《运筹学》等五本。这套教材除作为有关专业的基本教材外，也可作为其它专业对数学有更多兴趣的学生学习参考，同时，对从事实际管理工作需要提高现代化管理水平的同志，也会是一套解决数学基础不足问题的深浅适度的自学材料。

《概率论与应用统计》共十章，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律

与中心极限定理、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等，全部讲完约需110学时。

全书由（以编写章节先后为序）徐乃则（第一、五章）、马绍芹（第二、三章）、刘云（第四章）、陈戈止（第六章及第十章§10.1与§10.2）、何孟平（第七、九章）、周录君（第八章及第十章§10.3至§10.6）等老师主编，由周录君、徐乃则老师主纂。

编者水平有限，错误难免，恳请读者批评斧正。

《经济管理数学》编委会

一九八九年春节

《经济管理数学》编委会成员（以姓氏笔划为序）

目　　录

第一章 事件与概率

在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象，一类是确定性现象，它在一定的条件下必然会发生某个结果，例如物体不受外力作用必然保持其运动状态不变。而另一类现象则截然不同，它在一定的条件下，可能发生的结果不止一个，事先无法确定会发生哪一个结果，这种现象称为随机现象。例如某零售商店一天的营业额；又如抽查10件产品中出现的次品数等。

虽然个别随机现象是无规律的，但大量性质相同的随机现象总是有统计规律性的。概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学分支。由于随机现象是普遍存在的，因而概率论与数理统计就具有广泛的应用性。

本章介绍概率论中最基本的一些概念，还介绍最基本的一些计算方法。它是学习后继章节的基础。

§1.1 随机事件及其运算

一 随机试验和样本空间

要研究随机现象，就要对它进行观察或试验，这个过程统称为随机试验。由于随机现象在一次试验中出现的结果带有偶然性，所以要掌握它的规律只有大量重复做试验方能呈

现出某些规律，这种规律称为统计规律，确切地说，如果：

1．每次试验的结果不止一个，并且试验的所有可能结果是事先可以明确知道的；

2．每次试验总是出现这些可能结果中的一个，但事先不能肯定这次试验将出现哪一个结果；

3．试验在相同条件下可以重复进行。

这样的试验为随机试验，简称试验。随机试验记为E。

随机试验E的每一个可能结果，称为样本点（基本事件），用ω表示，全体样本点的集合$\{\omega\}$称为样本空间，用Ω表示，即$\Omega=\{\omega\}$。在具体问题中，认清样本空间的构成是十分重要的。我们来举些例子。

【例1】 E——抽一件产品作检验，ω_1表示产品合格，ω_2表示产品不合格，于是Ω由两个样本点构成，即$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$。

试验只有两个可能结果的不同实际问题，都可概括成两个样本点构成的样本空间。例如掷硬币出现正面或反面，工厂"完成指标"与"未完成指标"，贸易经营"盈"或"亏"等等。

【例2】 E——从标号为1，2，…，6的六个相同球中任取一个球，以ω_i表示取得标号为i的球，$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_6\}$。若简记$\omega_i$为$i$，则$\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$。

【例3】 E——抽取一个灯泡作寿命试验，ω_t表寿命为t小时，$\Omega=\{\omega_t: 0\leqslant t<+\infty\}$。若简记$\omega_t$为$t$，则$\Omega=(0, +\infty)$。

由于试验的所有可能结果是事先可以确切知道的，所以下面的讨论中，都认为样本空间Ω是已经给定的。

二　随机事件

在随机试验中，我们通常关心的是具有某种特征的基本事件是否发生。如在例 2 中考虑

A = { 球的标号为3 } = { 3 }

B = { 球的标号为奇数 } = { 1，3，5 }

C = { 球的标号大于4 } = { 5，6 }

它们在一次试验中发生与否具有随机性，称之为随机事件，简称事件。用大写字母 A，B，C 等表示。随机事件由若干个样本点所组成，在试验中当且仅当事件A所包含的某个样本点出现时，称事件A发生。用集合论的观点看，随机事件是样本空间的子集，是样本点的某个集合。因每次试验中，必然要出现Ω中的某个样本点，即 Ω 必然发生，所以称Ω为必为事件。相应地，空集 φ 可看作Ω的子集，它不含任何一个样本点，每次试验它都不可能发生，所以称 φ 为不可能事件。必然事件Ω与不可能事件 φ 是否发生已没有随机性，所以它们本质上不是随机事件，但为了讨论的方便，我们仍把它们作为随机事件的两个极端情形来处理。

三　事件的运算

在一个样本空间Ω中，有很多的随机事件。为了从简单事件的规律去认识复杂事件的规律，我们引进事件间的一些主要关系及事件的运算。

1．如果事件A发生必导致事件B发生，即A的每个样本点都包含在B中，称事件A包含于事件B，或称事件B包含事件A，记作$A\subset B$。如例 3，A表示“灯泡寿命不超过 1 千

小时”，B：“灯泡寿命不超过2千小时”，则 $A\subset B$。显然对任何事件A，有$\phi\subset A\subset\Omega$。

如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B相等，记作$A=B$。

2．“事件 A与B 中至少有一个发生”这一事件，称为A与B的并，记作$A\cup B$。事件$A\cup B$表示至少属于A或B中的一个的样本点全体。如例 2 中，A：“取球标号$\leqslant 3$”，B：“取球标号为偶数”，则$A\cup B$：“取球标号为1，2，3，4，6”。

3．“事件A与B同时发生”这一事件，称为A与B的交（或积），记作$A\cap B$或AB。事件$A\cap B$表示同时属于A及B的样本点集合。如上例，则$A\cap B$：“取球标号为2”。

4．“事件A发生而B不发生”这一事件称事件A与B的差，记作$A-B$。事件$A-B$表示包含在A中而不含在 B 中的样本点集合。如上例$A-B$：“取球标号1，3”。

5．若事件A与B不能同时发生，即AB是一个不可能事件，即 $AB=\phi$，则称事件 A 与 B 互斥（互不相容）。事件$AB=\phi$表示 A与B 的样本点互斥。如例 2 中，A：“取球标号1，3”，B：“取球标号2，4”，则$AB=\phi$。

若事件A与B互不相容，就称A与B的并为和，这时 $A\cup B$可记作$A+B$。

6．若A是一个事件，则$\overline{A}=\Omega-A$称为A的逆（对立）事件。事件$\overline{A}$表示不属于A 的样本点集合，在一次试验中，它们有关系：

$$A\cup\overline{A}=\Omega,\qquad A\overline{A}=\phi$$

这说明 A，$\overline{A}$必出现其一，但 A，$\overline{A}$不能同时出现。如例2

中，若 A：“取球标号为奇数”，则$\overline{A}$：“取球标号为偶数”。

事件的关系与集合的相应关系一致，我们就可以用集合图形来直观表示事件的关系。

不难把事件并和事件交推广到有限多个事件，对 n 个事件A_1，A_2，…A_n，“A_1，A_2，…A_n，中至少有一个发生”这一事件称为A_1，A_2，…A_n的并，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$或者 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$。

特别当 A_1，A_2，…A_n 两两互不相容时，即 $A_iA_j = \phi$，$i \neq j$ 时，把并称为和，记作 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$或

$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$。

“A_1，A_2，…A_n同时发生”这一事件称为A_1，A_2，…A_n的交，记作$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$或$A_1A_2\cdots A_n$或

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$。

类似地对无穷可列多个事件，定义

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i。$$

例如某射手向目标射击，直到击中目标为止，用A表示击中目标，A_i表示第i次才击中目标，则有

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i。$$

虽然事件的运算与集合的运算是完全相似的，但必须用

事件的概念来理解和运用这些运算关系。

【例4】设A、B、C是Ω中的随机事件，则：

事件“A与B发生，C不发生”可表为：$AB\overline{C}$或$AB-C$或$AB-ABC$；

“A、B、C中至少有二个发生”可表为$AB\cup AC\cup BC$；

“A、B、C中恰好发生二个”可表为$AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$；

“A、B、C中有不多于一个事件发生”可表为$\overline{AB\cup AC\cup BC}$或$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cancel{\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$。

可以验证事件的运算满足下列规则：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)；$$

（3）分配律：$A\cap(B\cup C)=AB\cup AC$，

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)；$$

（4）德摩根定理（对偶原则）：

$$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\qquad\overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$$

对有限个或可列个事件A_i，定理也成立，即：

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}，\qquad\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}。$$

§1.2 频率与概率

一 概率的统计定义

研究随机现象的规律性，不仅要知道它可能出现哪些事

件，更主要的是知道出现这些事件的可能性大小。随机事件在一次试验中是否发生事先不能预料，不同的随机事件发生的可能性是有大小之分的。但在大量重复试验中，事件发生的可能性大小这个事件本身所固有的客观属性就会呈现出来。我们自然想到用一个数字来描述事件A发生的可能性，较大的可能性用较大的数字表示，较小的可能性用较小的数字表示。为此引入：

定义 1.1　表示事件A发生可能性大小的数量指标，就称为事件A发生的概率。记为P(A)。

对给定的事件A，怎样从数量上确定P(A)呢？一般可通过大量重复试验来估计。

设事件A在n次重复试验中发生了n_A次，比值

$$f_n(A)=n_A/n$$

称为事件A在这n次试验中发生的频率。一般而言，如事件A出现的可能性愈大，频率$f_n(A)$也愈大，反之，如$f_n(A)$愈大，可以想到A出现的可能性也愈大。

例如掷100次硬币中得到51次正面，若记正面出现为事件A，则$f_{100}(A)=51/100=0.51$，当这种试验次数n很大时，事件A的频率$f_n(A)$在常数0.5左右波动。而且一般而言，试验次数n愈大，这种波动就愈小。

一般地说，在大量重复试验中，事件A的频率在某个固定常数p附近波动，随着试验次数增多，这种波动的幅度将变小。事件频率的这种稳定性是事件固有的客观属性，它呈现了事件发生可能性大小的统计规律。事件发生的可能性大小，就是它的“频率稳定值”。这就给出了概率的统计定义：