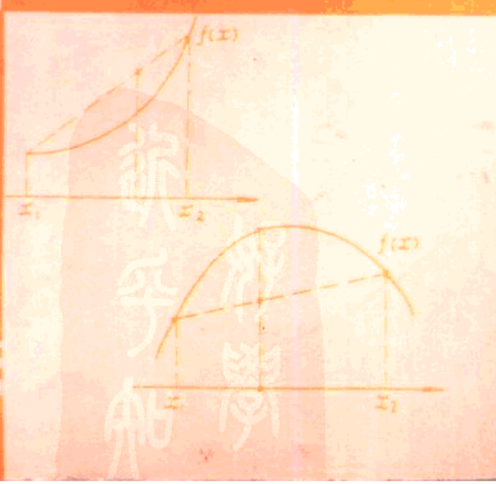
广播电视大学中等专业
自学辅导实验教材

数 学

下 册

主编 王兴华 孙国辉



中国经济出版社

广播电视大学中专自学
辅导实验教材编委会

序

中国科学院心理研究所，经过多年实验研究，利用心理学原理提出了中学数学自学辅导教学方法，并编写了一些实验教材。在许多学校进行试教，效果显著，受到老师、家长和同学们的欢迎，并得到国家教委的支持。大家都认为时代在前进，条件在变化，教学方法也要更新、要改革；否则就不能适应四化建设多出人才、出好人才的需要。心理学应多做贡献。

在目前的情况下，我国许多中小学的条件尚不十分完备，师资也很缺乏，特别是有经验、高水平的老师更是难以满足实际的需求。如果我们能够根据学生的心理特点，研究出一种更为有效的教学方法和编写一套有心理学特点的教材，特别是充分调动学生的学习潜力，增加其自学的技能与积极性，将会有助于提高整个教学水平。这种思想也反映了当代的教学理论。早在60年代，中央宣传部的负责同志，即指示中国科学院心理研究所探索新的教学方法，提高学生的学习效果。当时曾组织力量介绍引进了在国外兴起的程序教学（programmed instruction）方法。其主要思想是将教材按其本身逻辑分解为许多单元和小步子，每个项目都要求学生做出反应，然后核对答案及时判断其正误。如果正确则往下进行，如果错误，则按教材指示，返回到某一步子重新进行学习。这一方法的优点在于分步学习，循序渐进，学习顺利者进度很快，学习缓慢者可以自定速度，没有压力。不像班级教学，大家一起走，快的等慢的，慢的又感到跟不上。而且及时看到自

己的答案是否正确，这是一种及时强化，对巩固学习成果很有效。但这种方法也存在不足之处，如学习方式呆板、学生思维的灵活性难以发挥；学习材料分割太细，难以整体掌握；强调个人自学，忽视了教师的指导作用等。后来心理研究所的同志们经过多年实验、改进，发扬程序教学的优点，克服存在的问题，把教师的作用与学生的自学更好地结合，在教材编写上也注意分割与整体的结合，通过联系中学的教学实践，取得了较完整的经验，受到师生与家长的欢迎。

本书在借鉴心理所研究成果的基础上与唐山电大等单位合作编写了中专自学辅导实验教材。1991 年 8 月还在北京召开了有关省市教育行政部门、教学科研单位参加的经验交流会，大家提出宝贵建议，经过修订与充实，现正式予以出版发行，希望这一工作能得到更多的支持与合作，也欢迎大家多提宝贵意见，共同为教育改革创造新的经验。

徐联仓

中国科学院心理研究所

一九九五年四月

前　言

现在，学校教育面临的任务是培养学生适应21世纪的要求，能参与国家竞争。这就要求学生形成积极参与科学技术活动和社会进步活动的个性品格，具有丰富的科学知识、独立思维能力。学习活动是学生的主要活动。教育工作者和心理学工作者需要探索在学习活动中如何提高学生的学习积极性与主动性。这既有助于提高学生的学习成绩，也有助于培养学生的良好道德品质和思维能力。

人类的一切活动都离不开思维。思维的灵活与呆板，是后天培养的结果。那么，只靠课堂上教师进行“工厂式”“填鸭式”的教学方式能否培养出灵活的思维能力和创造思维能力呢？很多研究证实了靠传统的教授方法已不能培养出适应社会所需要的人才了。因为这种方法不能培养学生灵活的思维能力和创造思维能力，所以必须研制一种新方法进行教学活动。

50年代，著名的心理学家斯金纳在教儿童学习上提出了一种新的思想，他主张不是对儿童讲授，而是编写“程序教材”让学生自己去学。有的科学家提出让学生考察解题的样例、分析解答的例题、发现问题、分类推进的学习方法。

我们这次编写的中专实验教材，就是从心理学的学习规律和学生的能力差异、年龄特点和个性差异入手，研究教与学的过程。

以概念学习为例，心理学研究表明：概念学习有四种水平。(1) 具体水平：如儿童认识了桌上的铅笔；(2) 认同水

平：如儿童在其他地方也认出了铅笔；(3) 分类水平：如儿童能认识铅笔、钢笔，各有归类；(4) 规范水平：如儿童能对铅笔的属性做出说明。简单问题的学习过程是如此，复杂问题的学习过程也是如此。我们就是按照心理学的基本原理编写教材。

这套教材运用了心理学的原理和方法，参照中专教学大纲和中专的现行课本，保证了知识的系统性和心理学原理、方法使用的合理性，力争出色地实现教学目标。按照心理学原理和方法编写的高中数学和初中史地实验教材在全国各地的学校已实验多年，都取得了良好的教学效果（1993年—1994年实验班学生升大学考试数学成绩高出对照班数学成绩2.4—10分，其他学科的成绩也很好）。因此，我们可以预测，按照同样的原理和方法编写的中专教材，也一定取得成功。

这套教材具有以下特点：

1. 此书遵循了小步子原则。将教材划分一定模块和小步子，保证学生可以由浅入深地自学。这利于激发学生学习动机。

2. 此书运用及时强化原则（书后备有答案）。学生自学时可以及时知道自己作题的正误。由于及时强化，学生学习起来颇感有趣，这样就提高了学习积极性和主动性。

3. 为了解决学生自学的困难，教材提出了各种学习方法和思考路线及启发式和产生式规则，减少了学生认知负荷。

4. 学习本教材，是自学为主，辅导居次。学生可以自定学习进度，基础好的同学可以快学，基础差的可以慢学，都可以学会，使各类学生不同程度得到提高。这就避免教师满堂灌、学生被动听的情况，也避免老师主讲不能照顾个别差

异的一刀切现象。

5. 学生基本上可以在课时以内看书，完成作业。教师只需做简要讲解和巡视辅导，课内检查学生作业，课下老师不用批改作业，减轻了师生的负担。

6. 使用本书有特定的教学模式。这就是“回忆、自学、辅导、讲解”几个字。具体说，上课时老师先提问与本节课有关的旧知识（创设情景），唤起学生的回忆、再现，集中学生的注意力，引入新课，用时3—5分钟；自学：学生积极主动地看书、眉批（或写笔记）、做练习，对答案（做对了，画勾；错了，纠正），有问题举手问老师（或同学，最好少问同学），用时30分钟左右（中间不要打断学生思维）；辅导：学生自学时教师主动深入到学生中间解决疑难问题、检查作业、发现问题，辅导差生学习，指导优生提高等，使自学顺利进行下去；讲解：老师巡视课堂时，发现学生的共性和典型问题、关键地方和不懂的难题，进行分析、归纳、概括讲解和小结，用时10分钟左右。

7. 使用本教材，可以培养学生自学能力。这种自学能力可以迁移到其他学科，并将终身受益。

为了在课堂上体现此教材的特点，必须遵照下边提出的六条教学原则：①自学与讲授相结合；②刺激、反映与强化相结合；③自定步调与群定步调相结合；④外显反映、内隐反映和暗含反映相结合；⑤自然强化和人工强化相结合；⑥知道结果与不知道结果相结合。

由于学识浅薄，不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

王兴华

一九九五年四月

目　　录

第一章　直线

一、有向线段和定比分点

1·1　有向直线和有向线段

1. 有向直线

任何一条直线都有两个相反的方向。如果我们规定了它的一个方向为正向，那么与它相反的方向就是负向。这种规定了正方向的直线叫做有向直线，也叫做轴。

怎样表示有向直线呢？在画图时通常是用箭头标出正向（见图 1）；书写时可以结合图形，在箭头旁边标以字母，如图 1 中的 l，称为有向直线 l，或在有向直线上顺着它的正向依次取两点（如图 1 的 A、B），这时称为有向直线 AB。

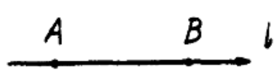


图 1

注意，图 1 中的有向直线不能写为有向直线 BA，这是因为它与有向直线 AB 不同——正方向不同。

（做练习 1·1　第 1、2 题）

2. 有向线段

我们也可以规定线段的方向：一条线段有两个端点，如果规定其中一个端点为起点，另一个端点为终点，这样的线段就叫做有向线段，它的正向是从起点到终点的方向。

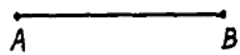


图 2

图 2 中的线段 AB，如果规定 A 为起点，则 B 为终点，这时它的方向是从 A 到 B；反之，若规定 B 为起点，则它的方向就是从 B 到 A 了。

位于有向直线上的线段，在没有规定起止点的情况下，其方向应与有向直线的方向一致。图 3 中有向线段 AB 的方向是从 B 到 A(为什么?)。

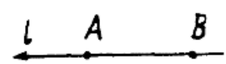


图 3

怎样表示有向线段？这里的关键是它的方向。规定先写出表示起点的字母，再写出表示终点的字母，然后在这两个字母上方画一横杠。例如有向线段起点为 A，终点为 B，则记为 $\overline{AB}$，读作“有向线段$\overline{AB}$”。要注意$\overline{AB}$与$\overline{BA}$是不相同的。

(做练习 1·1　第 3、4 题)

3. 有向线段的长度和数量

有向线段的长度是通过计量得到的：取一个定长的线段作为长度单位，用这个长度单位去度量有向线段，所量得的数

称为这条有向线段的长度。

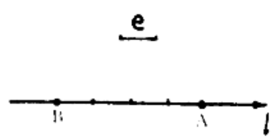


图 4

图 4 中，线段 e 的长度为长度单位，$\overline{AB}$是轴 l 上的有向线段，用 e 度量$\overline{AB}$，结果是 4，就说$\overline{AB}$的长度是 4 个长度单位，记作 $|AB|=4$。注意$\overline{AB}$的方向与 l 的正向相反，但是其长度却与此无关，仍是正实数。容易知道，有向线段的长度与它的方向无关。如图 4 中$\overline{AB}$的长度与$\overline{BA}$的长度相等 $|AB|=|BA|$。

象图 4 中的有向线段$\overline{AB}$和$\overline{BA}$，它们的长度相等，但方向相反，在代数上怎样区别它们？我们这样规定：当有向线段位于有向直线上或与后者平行时，根据它与有向直线的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号（即同向为正，异向为负），这样所得到的数叫做有向线段的数量（或数值）。有向线段$\overline{AB}$的数量用 AB 表示。

图 4 中，$\overline{AB}$的数量 $AB=-4$，$\overline{BA}$的数量 $BA=4$，而 $|\overline{AB}|=|\overline{BA}|=4$，一般地 $AB=-BA$。

（做练习 1·1　第 5、6 题）

到现在为止，我们学习了有向线段$\overline{AB}$、有向线段的长度 $|AB|$ 和有向线段的数量 AB 这三个概念。“有向线段$\overline{AB}$”是几何上的概念；“有向线段的数量 AB 及长度 $|AB|$”则是把$\overline{AB}$配置在有向直线之上得出的有关$\overline{AB}$的代数表示。这样一来，我们就能利用代数的方法来研究线段以及与之有关的问题。请看下面的例子。

例 1　如图 5，轴 l 上每一小格代表一个长度单位。求有向线段$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AC}$、$\overline{DB}$、$\overline{CB}$的数量。

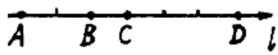


图 5

解：$AB=2$，$BC=1$，$CD=3$，$AC=3$，$DB=-4$，$CB=-1$.

在这个例子中，我们是通过度量$\overline{AC}$的长度和根据它的方向与 l 的正向一致得到 $AC=3$；换一个角度，当我们已求出 $AB=2$，$BC=1$，并且注意$\overline{AB}$的终点恰好与$\overline{BC}$的起点重合，而$\overline{AC}$的起点、终点又分别是$\overline{AB}$的起点和$\overline{BC}$的终点，就可以把 AC 看作 $AB+BC$：$AC=AB+BC=3$。

一般地，设 A、B、C 为轴 l 上任意三点（图 6），规定有向线段$\overline{AB}$与有向线段$\overline{BC}$的数量和为有向线段$\overline{AC}$的数量，记作 $AB+BC=AC$。

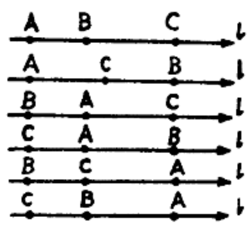


图 6

在线段求和时，注意相加的两个线段中前一个线段的终点要与后一个线段的起点重合，而作为和的那条线段，它的起点、终点分别是相加两线段中第一个线段的起点和第二个线段的终点。至于这两条线段的方向是否相同，是没有限制的，因此两条线段的数量和，是这两条线段的数量的代数和。

例 2　在例 1 及图 5 中，求 $AC+CB$，$DC+CB$，$CD+DB$.

解：$AC+CB=AB=3+(-1)=2$；

$DC+CB=DB=(-3)+(-1)=-4$；

$CD+DB=CB=3+(-4)=-1$.

更一般地，对于轴 l 上任意 $n(n\geqslant 3)$ 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，规定 $P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{n-1}P_n=P_1P_n$.

(做练习 1·1　第 7、8 题)

(习题一　第 1—3 题)

4. 数轴上两点间的距离

初中数学课已经介绍过有关数轴的知识。在一条直线上规定了正方向、取定一点 O 及长度单位(通常记为 1)，就构成了数轴(图 7)，O 叫做原点。

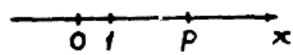


图 7

显然数轴是有向直线。数轴上每一个点 P 的位置都能用唯一的实数 x 来刻划：$|x|=|OP|$，当 $\overline{OP}$ 的方向与数轴的方向相同时，x 为正数；当 $\overline{OP}$ 的方向与数轴的方向相反时，x 为负数。可见 x 等于有向线段 $\overline{OP}$ 的数量，即 $x=OP$；点 O 则对应于数零。反之，对任意给定的实数 x，数轴上有且只有一点 P 与它对应。P 是有向线段 $\overline{OP}$ 的终点，$|OP|=|x|$；$x>0$ 时，$\overline{OP}$ 与数轴同向，$x<0$ 时，$\overline{OP}$ 与数轴反向，$x=0$ 时，点 P 与 O 重合。这就建立起数轴上所有点与全体实数之间的一一对应关系。x 叫做 P 点的坐标，记为 $P(x)$。

(做练习 1·1　第 9 题)

在数轴上任意给定两点 $P_1(x_1)$、$P_2(x_2)$，下面推导有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的数量 P_1P_2 的坐标表示：

由有向线段数量和的规定，有 $OP_2 = OP_1 + P_1P_2$，因此 $P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1$，可见：

数轴上两点 P_1、P_2 的坐标分别是 x_1、x_2，则有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的数量 $P_1P_2 = x_2 - x_1$，即用终点坐标减去起点坐标。

进一步可以得到数轴上坐标分别是 x_1、x_2 的两点 P_1、P_2 之间的距离为 $|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$.

例 3 数轴上有三点 P(－4)、Q(1)、R(3)，求点 P 到 Q、R 的距离(图 8)。

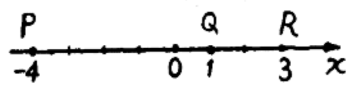


图 8

解：已知 $x_P = -4$，$x_Q = 1$，$x_R = 3$，则

$|PQ| = |x_Q - x_P| = |1-(-4)| = 5$；

$|PR| = |x_R - x_P| = |3-(-4)| = 7$.

例 4 数轴上点 A 坐标为－1，B 点到 A 的距离为 4，求 B 点坐标。

解：设 B 点坐标为 x_B，由题设有 $|x_B-(-1)| = 4$，即 $|x_B + 1| = 4$；从而

$x_B + 1 = \pm 4$；$x_B = -5$ 或 $x_B = 3$

(做练习 1·1 第 10—13 题)

(习题一 第 4—6 题)

1·2 平面上两点间的距离公式

在平面上取两条互相垂直且有公共原点 O 的数轴，一条