

GAODENG SHUXUE
JIBEN XUNLIAN

高等数学
基本训练 (上册)

● 李群高
寿玉亭 等 编
吴昌泽



科学出版社
Science Press

(O-1657.0101)

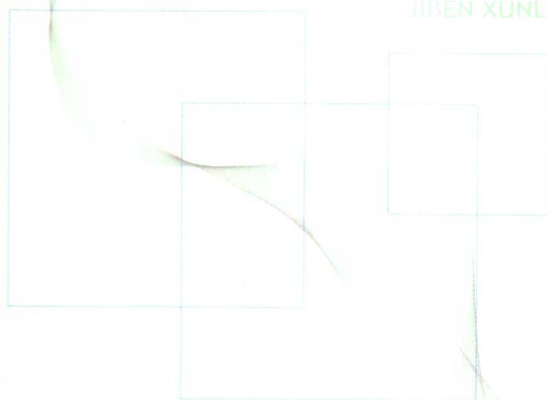
责任编辑：刘剑波

封面设计：[Logo] 910-88385578

责任印制：钱玉芬

高等数学基本训练 (上册)

GAODENG SHUXUE
JIBEN XUNLIAN



ISBN 7-03-010687-3



9 787030 106872 >

ISBN 7-03-010687-3/O·1657

定价：23.00 元 (上、下册)

GAODENG SHUXUE
JIBEN XUNLIAN

高等数学
基本训练 (下册)

● 李群高
寿玉亭 等 编
吴昌泽



科学出版社
Science Press

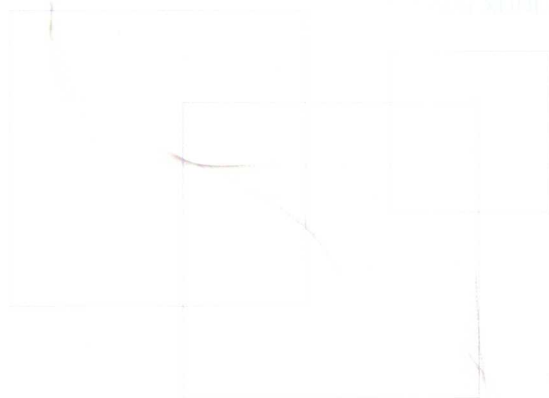
(O-1657.0101)

责任编辑：刘剑波

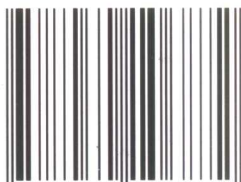
封面设计： 科学出版社
010-88385576

责任印制：钱玉芬

高等数学基本训练 (下册)



ISBN 7-03-010687-3



9 787030 106872 >

ISBN 7-03-010687-3/O·1657

定价：23.00 元（上、下册）

高等数学基本训练

(上册)

李群高
寿玉亭 等 编
吴昌泽

科学出版社

2002

高等数学基本训练

(下册)

李群高
寿玉亭 等 编
吴昌泽

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书是为普通工院校高等数学课编写的教学参考书。包括函数、极限、连续,一元函数微积分学,空间解析几何与向量代数,多元函数微积分学,常微分方程等十二个单元。每单元分为内容提要与基本要求、练习题、习题选编、自测题、习题解答五个部分。全书共选编 1800 多道题,题型全面、覆盖面广、信息量大,可满足不同层次学生的需要。

本书也可作为夜大、电大、职大等学生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基本训练(上、下册)/李群高等编. — 北京:科学出版社,2002
ISBN 7-03-010687-3

I. 高… II. 李… III. 高等数学—高等学校—习题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 054197 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 8 月 第 一 版 开本:720×1000 B5

2002 年 8 月第一次印刷 印张:21

印数:1—6 000 字数:400 000

定价:23.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

本书是根据国家教委制定的工科高等数学基本要求,配合同济大学《高等数学》(第四版)教材,为加强学生“三基”训练而编写的一本教学参考书。

全书分上、下两册,分别供第一学期和第二学期使用。上册为第一至七单元,包括函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数应用,不定积分,定积分及其应用,空间解析几何与向量代数。下册为第八至十二单元,包括多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,常微分方程。每单元的具体内容如下:

一、内容提要与基本要求:对本单元基本概念、基本内容、基本方法进行归纳总结,并给出本单元的基本要求,使学生心中有数、目的明确。

二、练习题:针对相关内容编写的供学生课后练习用习题,题型有选择、填空、计算、证明、应用等,与全国工科高等数学试题库的题型相对应。

三、习题选编:为教师编写的习题课用题,也可作为学生课堂练习之用。

四、自测题:每单元编有一套基本内容占 80% 的自测题,学生可用来检测本单元学习效果,也可作为章节测验题。

五、习题解答:给出练习题、习题选编、自测题的详细解答。

在每册书末的附录中,还选编了几套模拟试卷,供学生考前模拟之用。

本书共选编 1800 多道题,题型全面、覆盖面广、信息量大,既有基本题,又有一定难度的提高题,能满足不同层次学生的要求。

本书主要是为普通工科高等院校学生做课外练习而编写的,也可作为夜大、电大、职大等学生的参考书。

由于本书编者水平有限,书中一定会有错误和不妥之处,恳请同行专家和热心读者批评指教,不胜感激。

编 者

2002 年 4 月

目 录

前 言

上 册

第一单元 函数、极限与连续	1
1.1 内容提要与基本要求	1
1.2 练习题	4
1.3 习题选编	10
1.4 自测题	11
1.5 习题解答	13
第二单元 导数与微分	18
2.1 内容提要与基本要求	18
2.2 练习题	20
2.3 习题选编	26
2.4 自测题	28
2.5 习题解答	30
第三单元 中值定理与导数应用	39
3.1 内容提要与基本要求	39
3.2 练习题	42
3.3 习题选编	50
3.4 自测题	52
3.5 习题解答	53
第四单元 不定积分	67
4.1 内容提要与基本要求	67
4.2 练习题	70
4.3 习题选编	74
4.4 自测题	75
4.5 习题解答	76
第五单元 定积分	83
5.1 内容提要与基本要求	83
5.2 练习题	86

5.3	习题选编	91
5.4	自测题	92
5.5	习题解答	93
第六单元	定积分的应用	99
6.1	内容提要与基本要求	99
6.2	练习题	101
6.3	习题选编	105
6.4	自测题	105
6.5	习题解答	107
第七单元	空间解析几何与向量代数	111
7.1	内容提要与基本要求	111
7.2	练习题	117
7.3	习题选编	123
7.4	自测题	125
7.5	习题解答	126
附录	第一学期模拟试卷	134
	期中模拟试卷 1	134
	期中模拟试卷 2	136
	期末模拟试卷 1	139
	期末模拟试卷 2	141
	期末模拟试卷 3	144
	期末模拟试卷 4	147
	期末模拟试卷 5	150

下 册

第八单元	多元函数微分法及其应用	155
8.1	内容提要与基本要求	155
8.2	练习题	160
8.3	习题选编	172
8.4	自测题	173
8.5	习题解答	175
第九单元	重积分	192
9.1	内容提要与基本要求	192
9.2	练习题	197
9.3	习题选编	204

9.4	自测题	205
9.5	习题解答	207
第十单元	曲线积分与曲面积分	215
10.1	内容提要与基本要求	215
10.2	练习题	221
10.3	习题选编	229
10.4	自测题	231
10.5	习题解答	233
第十一单元	无穷级数	243
11.1	内容提要与基本要求	243
11.2	练习题	251
11.3	习题选编	261
11.4	自测题	263
11.5	习题解答	265
第十二单元	常微分方程	280
12.1	内容提要与基本要求	280
12.2	练习题	284
12.3	习题选编	292
12.4	自测题	293
12.5	习题解答	295
附录	第二学期模拟试卷	303
	期中模拟试卷 1	303
	期末模拟试卷 1	306
	期末模拟试卷 2	309
	期末模拟试卷 3	311
	期末模拟试卷 4	314

第一单元 函数、极限与连续

1.1 内容提要与基本要求

1.1.1 预备知识

1) 区间及其表示法。

2) 绝对值及其性质。

定义：

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}, \quad |a| = \sqrt{a^2} \geq 0$$

性质：

$$|ab| = |a||b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |a-b| \geq ||a| - |b||$$

$$|a| \leq b \Rightarrow -b \leq a \leq b, \quad |a| \geq b (b > 0) \Rightarrow a \geq b \text{ 或 } a \leq -b$$

3) 邻域： $U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$, a 为邻域中心, δ 为邻域半径。

$$\text{去心邻域: } \dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

1.1.2 内容提要

1. 函数

(1) 一元函数 $y = f(x)$ 的概念

1) 函数的三内容及两要素。

$$\text{三内容} \begin{cases} \text{定义域} \\ \text{对应关系} \\ \text{值域} \end{cases} \quad w = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

两要素：定义域和对应法则。两个函数当定义域 D 与对应法则 f 完全相同时恒等。

2) 确定函数的定义域。

3) 分段函数。

(2) 反函数及其图形

(3) 函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性(要求知道定义及函数图形的特点)

(4) 初等函数

1) 基本初等函数的定义域、图形及主要性质。

基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数。

2) 复合函数及其分解。

说明:① 不是任何两个函数都能组合成复合函数,函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 通过中间变量 u 组合成复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的条件是: $u = \varphi(x)$ 的值域的全部或部分包含在 $y = f(u)$ 的定义域内。

② 分解复合函数可由外往里顺次拆开,拆开后的每个函数都是基本初等函数或是由基本初等函数与常数通过四则运算组成的表示式。

3) 初等函数。

2. 极限

(1) 极限的概念及性质

1) 数列极限的定义($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$)。

2) $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限定义 $[\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A]$ 。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

3) $x \rightarrow x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限定义 $[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A]$ 。

4) 左极限与右极限 $[f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)]$ 。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在} \Leftrightarrow f(x_0 - 0) \text{ 与 } f(x_0 + 0) \text{ 存在且相等}$$

5) 无穷小的定义 $[\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 0]$ 。

注: $x \rightarrow \square$ 包括 $x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$,以下同。

无穷小与函数极限的关系:

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha, \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow \square} \alpha = 0$$

6) 无穷大的定义 $[\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \infty]$;无穷大与无穷小的倒数关系。

7) 无穷小的比较;等价无穷小的性质。

8) 函数极限的局部保号性。

注意:如果 $f(x) > 0$ [或 $f(x) < 0$], 且 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A$, 其结论仍为 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$)。

9) 函数极限的有界性。

注意:数列收敛可保证数列有界($|x_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$), 函数极限存在只能

保证函数局部有界。

10) 函数图形的水平渐近线与铅直渐近线。

(2) 求极限的方法

1) 极限运算法则。

2) 公式。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & (m = n) \\ 0 & (m < n) \\ \infty & (m > n) \end{cases} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

3) 无穷小的运算性质(无穷小 $\times$ 有界函数 = 无穷小, 等价无穷小代换等)。

4) 两个重要极限。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \right)$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \right]$$

5) 函数的连续性。

$$f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 点连续} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \square} \varphi(x) = B, f(u) \text{ 在 } u = B \text{ 点连续} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \square} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \rightarrow \square} \varphi(x)] = f(B)$$

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A > 0, \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \square} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} f(x)^{\lim_{x \rightarrow \square} g(x)} = A^B$$

6) 将函数恒等变形化为极限可确定的式子(如消去公因子、有理化、分子和分母同除以 x 的最高次幂等)。

7) 左、右极限。

左、右极限主要用于求分段函数在分段点处的极限, 及证明极限不存在。

8) 极限存在准则。

单调有界数列必有极限(只能判断极限存在, 不能用于求极限值)。

夹逼定理。

3. 连续

(1) 函数在一点处连续的定义

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 点连续} \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 点} \begin{cases} \text{① 有定义} \\ \text{② 极限存在} \\ \text{③ 极限值} = \text{函数值} \end{cases}$$

- (2) 初等函数的连续性
- (3) 间断点及其类型
- (4) 闭区间上连续函数的性质

1.1.3 基本要求

- 1) 理解函数的概念。
- 2) 了解反函数的概念。
- 3) 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。
- 4) 理解复合函数的概念。
- 5) 掌握基本初等函数的定义域、性质及图形。
- 6) 会建立简单实际问题中的函数关系。
- 7) 理解极限的概念(对极限的 ϵ - N 、 ϵ - δ 定义可在学习过程中逐步加深理解)。
- 8) 掌握极限四则运算法则。
- 9) 了解两个极限存在准则。
- 10) 会用两个重要极限求极限。
- 11) 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限。
- 12) 理解函数在一点连续的概念。
- 13) 了解间断点的概念,并会判别间断点的类型。
- 14) 了解初等函数的连续性。
- 15) 了解闭区间上连续函数的性质。

说明:高等数学课程的内容按教学要求的不同,分为两个层次。较高要求是,学生必须深入理解,牢固掌握,熟练应用,其概念、理论用“理解”一词表述,方法、运算用“掌握”一词表述。次一等的要求是必不可少的,其概念、理论用“了解”一词表述,方法、运算用“会”或“了解”表述。

1.2 练 习 题

一、填空题

1. $f(x) = \arcsin(2x - 1)$ 的定义域是_____。
2. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 3]$, 则 $f(\ln x)$ 的定义域是_____。
3. 若在 x_0 的某邻域内 $f(x) > \varphi(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, 则 A 与 B 的大小关系是_____。
4. 曲线 $y = \frac{x}{2x - 1}$ 的渐近线方程是_____。
5. 曲线 $y = \ln(x + 3)$ 的渐近线方程是_____。

6. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 10^n - 3 \times 10^{2n}}{3 \times 10^{n-1} + 2 \times 10^{2n-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \arctan x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 - 3)^3 (3x - 2)^4}{(6x^2 + 7)^5} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 若要 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^p} = \frac{1}{2}$, 则需 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{4x+4} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{3x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos[\ln(1+x)] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\sin \pi x}{x}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(\cos^2 x + \sqrt{1-x^2})}{e^x + \sin 2x} + (1+x)^x \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 + 2x - 3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, 无穷小 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

18. $f(x) = \sqrt{x} + \ln(3-x)$ 在区间 $\underline{\hspace{2cm}}$ 是连续的。

19. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$ 的连续区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

20. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < a) \\ 2a & (x = a) \\ 3x - 2 & (x > a) \end{cases}$ 在 $x = a$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

21. 若 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^a \cos \frac{1}{x-1} & (x > 1) \\ 0 & (x \leq 1) \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续, 则 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

22. 若 $f(x) = \frac{e^{x-1} - a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x = 0$ 及可去间断点 $x = 1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

23. 设 $f(x)$ 处处连续, 且 $f(1) = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f\left[\frac{1}{x} \ln(1+x)\right] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、单选题

24. $f(x) = (\sin 3x)^2$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上为_____。

(A) 周期是 3π 的周期函数

(B) 周期是 $\frac{\pi}{3}$ 的周期函数

(C) 周期是 $\frac{2}{3}\pi$ 的周期函数

(D) 不是周期函数

25. 设 $f(x) = \begin{cases} x^3 & (-3 \leq x \leq 0) \\ -x^3 & (0 < x \leq 2) \end{cases}$, 则此函数是_____。

(A) 有界函数

(B) 奇函数

(C) 偶函数

(D) 周期函数

26. $f(x) = (e^x + e^{-x})\sin x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上是_____。

(A) 有界函数

(B) 周期函数

(C) 偶函数

(D) 奇函数

27. 设 $f(x) = \begin{cases} -\sin^3 x & (-\pi \leq x \leq 0) \\ \sin^3 x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$, 则此函数是_____。

(A) 周期函数

(B) 单调增函数

(C) 奇函数

(D) 偶函数

28. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的单调增函数, $x_0 \in (a, b)$, 则_____。

(A) $f(x_0 - 0)$ 存在, 但 $f(x_0 + 0)$ 不一定存在

(B) $f(x_0 + 0)$ 存在, 但 $f(x_0 - 0)$ 不一定存在

(C) $f(x_0 - 0)$ 、 $f(x_0 + 0)$ 都存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不一定存在

(D) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在

29. “数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在”是“数列 $\{x_n\}$ 有界”的_____。

(A) 充分必要条件

(B) 充分但非必要条件

(C) 必要但非充分条件

(D) 既非充分条件, 也非必要条件

30. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 若 $f(x)$ 有极限, $g(x)$ 无极限, 则下列结论正确的是_____。

(A) $f(x)g(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时必无极限

(B) $f(x)g(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时必有极限

(C) $f(x)g(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时可能有极限, 也可能无极限

(D) $f(x)g(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 若有极限则极限必为零

31. “当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) - A$ 是无穷小”是“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”的_____。

(A) 充分但非必要条件

(B) 必要但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件, 也非必要条件

32. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的_____。